



## **Modélisation de l'arbre bronchique**

Matthieu Hartenstein, Fabrice Silva

### **► To cite this version:**

Matthieu Hartenstein, Fabrice Silva. Modélisation de l'arbre bronchique. 14ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2018, Le Havre, France. <hal-01769788>

**HAL Id: hal-01769788**

**<https://hal.science/hal-01769788v1>**

Submitted on 18 Apr 2018

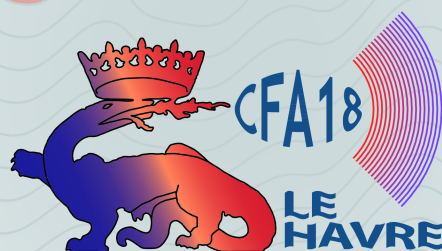
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# **CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018** **14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



## **Modélisation de l'arbre bronchique**

**M. Hartenstein<sup>a</sup> et F. Silva<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>Centrale Marseille, Technopôle de Château-Gombert, 38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13013 Marseille  
Cedex 13, France

<sup>b</sup>Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, LMA, Marseille, 4 impasse Nikola Tesla, CS40006,  
13453 Marseille Cedex 13, France  
[silva@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:silva@lma.cnrs-mrs.fr)

La phonation est un processus physique visant à la production d'ondes sonores porteuses, le plus souvent, d'une information. Elle résulte de l'interaction entre l'écoulement d'air expulsé par les poumons, les vibrations des plis vocaux et les ondes acoustiques présentes dans le larynx. Au-delà de la théorie source-filtre, les modèles actuels ne prennent pas en compte l'acoustique en amont du plan glottique et considèrent un contrôle direct de la pression subglottique supposée varier de manière quasi-statique. Pourtant Titze [1] démontre comment le comportement dynamique des voies aériennes inférieures peut influencer sur les seuils d'oscillation et d'éventuels sauts de fréquence lors de la production de glissando. Des travaux récents ont modélisé de manière très simpliste ce résonateur structurellement complexe, par exemple avec un simple cylindre ou un pavillon exponentiel. Nous proposons ici une lecture critique de ces modèles en étudiant l'impédance d'entrée de l'arbre bronchique obtenue à partir des caractéristiques géométriques de la trachée et des bronches à la manière de Jackson [2]. L'approche retenue est celle d'un réseau hiérarchique de guides d'ondes acoustiques, traité en implémentant le formalisme en ligne de transmission dans le langage Python orienté objet. Une attention particulière est apportée aux phénomènes dissipatifs du fait de l'importance des surfaces en jeu dans les fonctions respiratoires. Ainsi nous comparons les effets des pertes visco-thermiques et de l'élasticité des parois sur les résonances subglottiques.

## 1 Introduction

Les voies aériennes sont le support des fonctions respiratoires, visant au transport et aux échanges efficaces de gaz vers et depuis les poumons. Dans le sens inspiratoire, elles débutent par les cavités nasale et buccale suivies du pharynx et du larynx, formant les voies aériennes supérieures. Elles se prolongent par la trachée et les nombreuses bifurcations bronchiques jusqu'aux alvéoles (cf Fig. 1). L'ensemble des ramifications, appelé arbre bronchique, forme une structure hiérarchique complexe maximisant les surfaces d'échange où oxygène, gaz carbonique et vapeur d'eau essentiellement migrent vers ou depuis le réseau de capillaires sanguins. De nombreux travaux ont étudiés les caractéristiques de cet arbre, en s'intéressant par exemple aux caractéristiques histologiques et biomécaniques des tissus épithéliaux, musculaires et cartilagineux [3, 4] ou au transport d'aérosols médicamenteux [5].

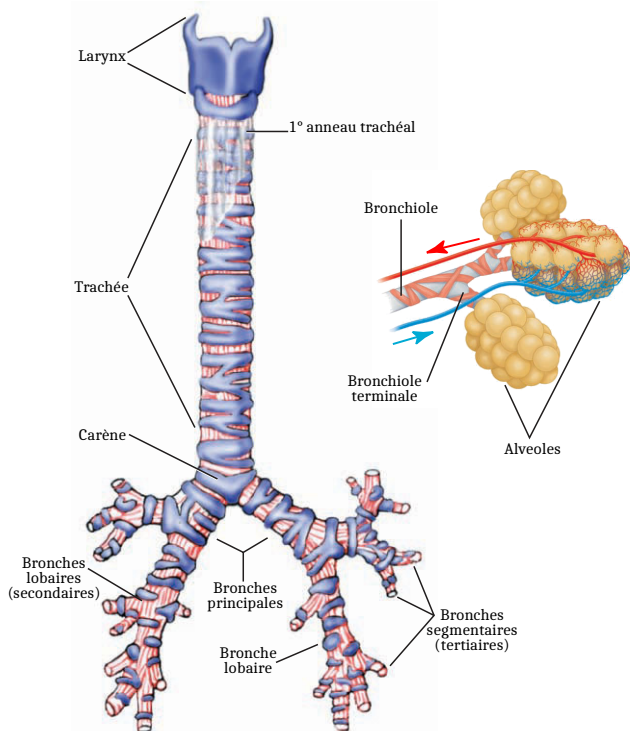


FIGURE 1 – Vue schématique des voies aériennes inférieures (à gauche) et des terminaisons alvéolaires (à droite). Adapté de la Ref. [6].

Outre les fonctions vitales (respiration, déglutition et protection des poumons), les voies aériennes supérieures ont une implication largement reconnue dans les processus phonatoire et articulaire [7]. Malgré les travaux fondateurs de van den Berg [8] et Fant [9], le rôle des voies sous-glottiques est pour sa part encore sujet à discussion, voire tout simplement ignoré. Pourtant, de nombreux travaux *in vivo* et *ex vivo* ont proposé des estimations des résonances présentées par les voies inférieures à la glotte (cf Ref. [10] pour une revue) et cherché à comprendre comment celles-ci peuvent influencer sur la mise en oscillation des plis vocaux [1].

En se basant sur les observations et paramétrisations de Weibel [11] ou Horsfield [12] pour l'évolution de la section totale avec les ramifications bronchiques, certaines modélisations assimilent l'arbre à un simple guide d'ondes de section croissante (cf Fig. 2 à droite). Cette représentation ne prend pas toute la mesure de l'effet de l'accroissement encore plus rapide de la surface des guides d'ondes, sous-estimant certains effets comme les vibrations de paroi et les phénomènes visco-thermiques. Refs. [10, 13] proposent des modèles à éléments localisés en préservant la structure de l'arbre, avec une représentation en temps-discret en vue de la simulation numérique.

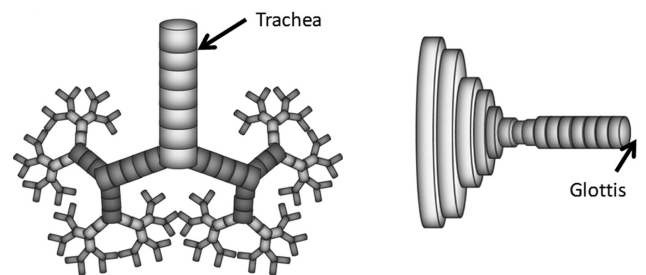


FIGURE 2 – Exemples de représentation des voies aériennes inférieures. Adapté de la Ref. [10]

Nous présentons ici les travaux menés dans le cadre d'un parcours alternance de l'École Centrale de Marseille, avec une modélisation de l'arbre dans le formalisme des matrices de transmission qui permet le calcul de l'impédance des voies aériennes inférieures vues par la glotte ou encore l'impédance des voies aériennes complètes vues depuis les lèvres. Un second modèle inclut l'effet de l'élasticité de la muqueuse trachéale dans une approche vibroacoustique.

## 2 Modèle purement acoustique

### 2.1 Guides de section non uniforme

De manière usuelle pour le conduit vocal [7], on représente les guides d'ondes de section variable (en espace) par la concaténation de cylindres (méthode dite de Kelly-Lochbaum, cf. Fig. 3). Pour chaque segment cylindrique de longueur  $L$  et section  $S$ , on considère l'évolution du débit  $u(z, t)$  et de la pression moyenne sur la section  $p(z, t)$  selon les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous l'hypothèse acoustique :

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{S}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air au repos et  $c$  la célérité du son. Dans le domaine fréquentiel (dépendance  $e^{j\omega t}$  avec une pulsation  $\omega$ ), on relie aisément (cf Ref. [16]) les pressions et débit en entrée et sortie d'un segment  $n$  à l'aide de la matrice de transmission  $M$  :

$$\begin{pmatrix} P_e^n \\ U_e^n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} P_s^n \\ U_s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kl) & jZ_c \sin(kl) \\ jZ_c^{-1} \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_s^n \\ U_s^n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où  $Z_c = \rho c/S$  est l'impédance caractéristique du tube. Le nombre d'onde  $k$  peut prendre en compte les phénomènes dissipatifs liés à la viscosité et aux échanges thermiques avec la paroi. Dans l'approximation des tuyaux larges (cf Ref. [16], Sec. 5.5), il s'écrit

$$k = \frac{\omega}{c} + 3 \times 10^{-5} (1 - j) \frac{\sqrt{f}}{R}, \quad (3)$$

où les grandeurs sont exprimées en unités SI,  $R$  est le rayon du tube cylindrique et  $f = \omega/2\pi$  la fréquence.

Finalement, la concaténation de segments se fait en supposant la continuité des débits et des pressions moyennes sur les sections de sortie et d'entrée des tubes raccordés. Ceci revient alors à multiplier les matrices de transmission de chaque segment pour obtenir la matrice de transmission du guide d'onde résultant.

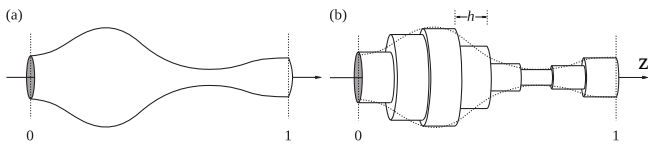


FIGURE 3 – Approximation d'un guide à section continûment variable (a) par une concaténation de cylindres (b). Extrait de Ref. [15].

### 2.2 Ramification d'un guide

Les voies aériennes présentent des ramifications, c'est-à-dire que le guide d'onde principal se sépare en plusieurs conduits. C'est le cas notamment au niveau de la carène et des bronches (cf Fig. 1), des sinus piriformes ou du velum près duquel le conduit nasal se sépare de la cavité buccale. Le principe de la conservation de la masse reste valide et amène à écrire l'invariance de la somme des débits arrivant à une jonction. D'autre part, on suppose que la pression est uniforme dans le volume de jonction (à défaut, il est nécessaire d'estimer les termes d'une matrice de

masse acoustique, cf Ref. [16], Sec. 7.7). En adoptant une convention unique pour l'orientation des débits, il vient :

$$U_s^0 = \sum_n U_e^n = \sum_n Y_e^n P_e^n = \left( \sum_n Y_e^n \right) P_s^0 = Y_s^0 P_s^0. \quad (4)$$

L'admittance de sortie  $Y_s^0$  vue par le tuyau « amont » (indexé par 0) est la somme des admittances d'entrée  $Y_e^n$  des tubes « aval » (indexés par  $n > 0$ ), ce qui revient à une association en parallèle de ceux-ci. On en déduit l'impédance d'entrée du système :

$$Z_e^0 = \frac{P_e^0}{U_e^0} = \frac{M_0^{11} + M_0^{12} Y_s^0}{M_0^{21} + M_0^{22} Y_s^0} \quad (5)$$

qui dépend naturellement de la matrice de transmission  $M_0$  du tube amont et de la charge acoustique  $Y_s^0$  placée à son extrémité.

### 2.3 Mise en œuvre numérique

Les éléments de modélisation précédents ont été mis en œuvre à l'aide du langage Python dans une approche orientée objet. Chaque guide d'onde (de section potentiellement variable) est défini comme une instance d'une classe Conduit définie à partir des caractéristiques géométriques de chacun des segments cylindriques (longueur et section) qui le composent, de la prise en compte ou non des phénomènes dissipatifs pour la propagation des ondes acoustiques et de la liste des guides raccordés à sa sortie. On considère également quelques guides particuliers, comme les terminaisons idéalement fermée ( $Y_e = 0$ ) et ouverte ( $Z_e = 0$ ) ou encore des éléments localisés comme une compliance acoustique pouvant modéliser un volume  $V$  fermé où la pression est relativement uniforme ( $Y_e = j\omega V/\rho c^2$ ). Il est évidemment possible d'implémenter d'autres éléments, par exemple des éléments modélisant le rayonnement en champ libre.

Pour calculer l'impédance d'entrée d'un système tel que l'arbre bronchique, on évalue de manière récursive les impédances d'entrée des tubes en aval, ce qui définit l'admittance de sortie du tube amont (Eq. (4)), puis l'impédance d'entrée (Eq. (5)). On peut également s'intéresser à la fonction de transfert liant le débit de sortie d'une terminaison donnée au débit d'entrée du système. Ceci est par exemple pertinent dans le cas des voies aériennes supérieures, où la fonction de transfert entre débit glottique et débit aux lèvres permet de prévoir le filtrage par le conduit vocal (incluant par exemple cavité nasale et sinus piriformes), et les formants résultants sur la pression externe [7].

### 2.4 Application aux voies aériennes inférieures

On adopte une modélisation des voies aériennes subglottiques (depuis la trachée jusqu'aux alvéoles) sous forme d'arbre binaire avec ramifications successives. Une première simplification repose sur la symétrisation des sous-arbres gauche et droit (en réalité, l'arbre gauche se divise en 2 bronches secondaires, et l'arbre droit en 3). D'autre part, on suppose que tous les tronçons d'un même niveau hiérarchique sont identiques (longueurs et sections identiques). Finalement, on considère les alvéoles comme des terminaisons de type compliance acoustique (simple

volume où la pression est uniforme). Le volume associé à chaque terminaison dépendra du volume total inspiré. La fig. 4 montre la faible dépendance de l'impédance de l'arbre vue depuis la glotte (pour les données géométriques fournies par Ref. [5] et reportées en Table 1) au taux de gonflement des alvéoles et donc au niveau de la pression pulmonaire moyenne. Les variations des fréquences de résonances sont très faibles ( $< 10$  Hz, ou encore  $< 9$  cents pour les variations relatives).

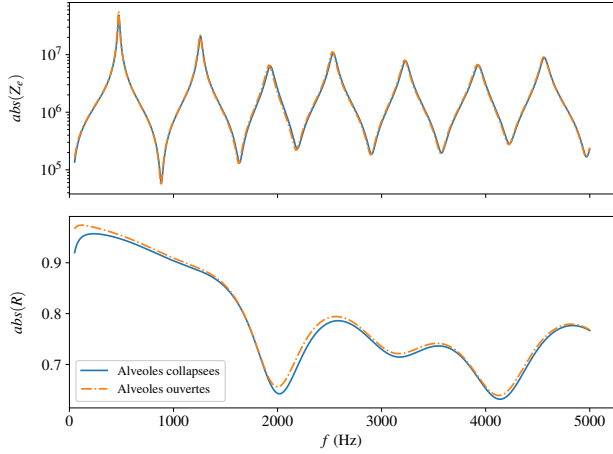


FIGURE 4 – Influence du volume des alvéoles. Modules de l'impédance (en haut) et du coefficient de réflexion (en bas) de l'arbre bronchique vue par la glotte pour des alvéoles complètement collapsées (trait plein) ou complètement gonflées (trait mixte). Données issue de Ref. [5].

Niveau	# tubes	$l$ (cm)	$S$ (cm <sup>2</sup> )	$\sum V$ (cm <sup>3</sup> )
1	1	10.0	3.173	31.730
2	2	4.36	1.911	48.400
3	4	1.78	1.003	55.540
4	8	0.96	0.537	59.690
5	16	0.99	0.333	64.980
6	32	1.01	0.259	73.350
7	64	0.89	0.149	81.810
8	128	0.96	0.109	95.270
9	256	0.87	$8.14 \times 10^{-2}$	113.34
10	512	0.67	$5.19 \times 10^{-2}$	131.06
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	16384	0.21	$4.19 \times 10^{-3}$	211.64
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	$2^{23}$	0.053	$1.45 \times 10^{-3}$	1692.02
25	$2^{24}$	0.025	$7.07 \times 10^{-4}$	5563.88

TABLEAU 1 – Caractéristiques géométriques nominales de l'arbre bronchique [5]. La dernière colonne donne le volume cumulé de la glotte jusqu'à l'étage courant.

L'examen des données collectées par Yeh [5] pose la question de la modélisation acoustique d'un grand nombre de niveaux hiérarchiques. À partir du 4<sup>e</sup> niveau, la longueur des bronches et bronchioles devient bien plus faible que les longueurs d'onde en jeu dans la phonation, et il peut être plus pertinent d'adopter une modélisation par éléments localisés que par guide d'ondes. Il faut néanmoins remarquer qu'une très grande partie du volume d'air est distribuée dans

les niveaux profonds de l'arbre bronchique. En effet, les 16 premiers niveaux (de la glotte aux bronchioles terminales) contiennent un volume de l'ordre de 0.21, bien plus faible que le volume total maximal (de l'ordre de 51). Il apparaît donc important de ne pas ignorer le volume d'air présent dans les alvéoles. La Fig. 5 montre l'effet de la troncature de l'arbre (avec prise en compte du volume des niveaux inférieurs tronqués par une compliance) sur les premières fréquences de résonance. Le critère de sélection de l'ordre de troncature et donc la précision voulue sur ces fréquences de résonances est à mettre en regard des niveaux d'incertitudes sur les mêmes quantités, ou leur contrepartie pour les voies supérieures.

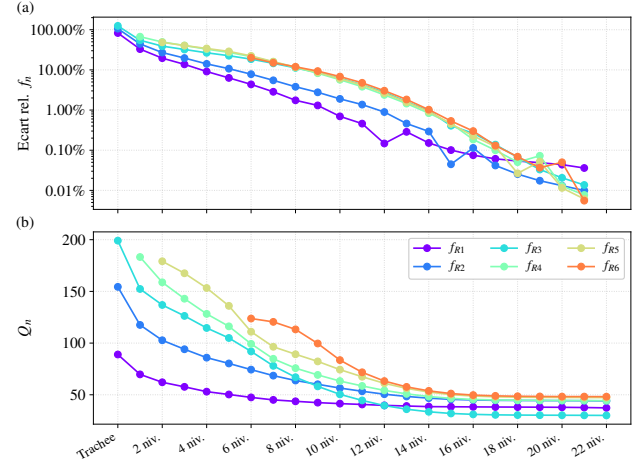


FIGURE 5 – Effet de la troncature de l'arbre bronchique : (a) écart relatif des premières fréquences de résonances obtenues en tronquant par rapport aux fréquences de résonances de l'arbre complet ; et (b) évolution des facteurs de qualité des résonances.

On peut également comparer les deux familles de modélisation des voies aériennes présentes dans la littérature. La Fig. 6 met en évidence que la modélisation intégrant la section totale des conduits d'un niveau hiérarchique en un guide d'onde de section croissante (pavillon) sous-estime largement les phénomènes dissipatifs dans les conduits de faible section. Pour les simulations de voisement utilisant cette modélisation, la glotte voit alors un résonateur subglottique avec de meilleurs facteurs de qualité, augmentant de manière artificielle l'effet d'interactions des plis vocaux avec ces résonances (comme référencée par Titze [1] par exemple).

### 3 Modèle avec parois élastiques

Le modèle précédent considère que les parois du guide d'ondes sont parfaitement rigides. Des essais mécaniques ont récemment mis en évidence les fortes disparités de rigidité des différentes couches de la paroi trachéale [3, 4]. Ainsi, aux faibles déformations, le cartilage et les tissus mous de part et d'autre du cartilage (muqueuse exposée à l'air, et adventice à l'extérieur du cartilage) présentent des modules d'Young de l'ordre de 3 MPa et 10 kPa. À titre de comparaison, Ref. [14] rapporte des plages respectives de 1 – 20 MPa et 13 – 116 kPa estimées par inversion de modèle acoustique. Ces valeurs sont à mettre en relation avec celle de la pression pulmonaire (de l'ordre du 1 kPa) et on peut



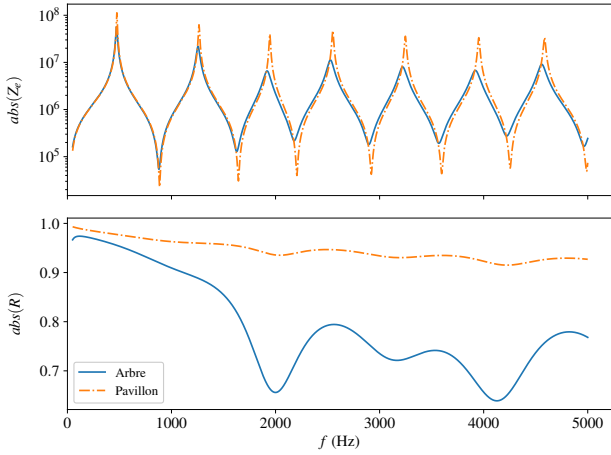


FIGURE 6 – Modules de l'impédance (en haut) et du coefficient de réflexion (en bas) de l'arbre bronchique vue par la glotte pour une représentation sous forme d'arbre binaire (trait plein) ou de pavillon (trait mixte).

s'attendre à ce que la pression dans la trachée et les bronches déforme la muqueuse de manière non négligeable.

On s'intéresse donc dans cette partie à la prise en compte de l'élasticité des tissus sur l'impédance d'entrée des voies aériennes inférieures. Dans une logique de complexité croissante, on étudie d'abord l'effet de la pression statique (pression pulmonaire moyenne), avant d'avancer vers l'inclusion d'ondes élastiques au sein de la muqueuse.

### 3.1 Dilatation statique des parois

En accord avec les données de la Ref. [12], c'est dans la trachée que le ratio entre l'épaisseur de la muqueuse et le rayon interne du guide est le plus grand (3.7 mm/8 mm = 0.46 contre 1.7 mm/6 mm = .28 pour les bronches primaires). Ceci justifie de considérer, dans un premier temps, la compression de la muqueuse dans la trachée uniquement. La muqueuse est supposée satisfaire aux hypothèses de l'élasticité linéaire isotrope, et donc obéir à la loi de Hooke reliant contrainte  $\sigma$  et tenseur des petites déformations  $\varepsilon$  :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon \quad (6)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. On détermine ceux-ci à partir du module tangent donné par Ref. [4] aux faibles allongements, et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Un premier calcul statique par éléments finis sur une géométrie réaliste (cartilage en forme de fer à cheval complété sur la face postérieure par le muscle trachéal) permet de vérifier que la rigidité élevée du cartilage empêche la déformation de celui-ci, toute la pression étant « encaissée » par la muqueuse. Pour la suite, on fera l'hypothèse d'un cartilage immobile et formant une condition d'encastrement à la frontière avec la muqueuse. Une hypothèse simplificatrice supplémentaire consiste à supposer l'axisymétrie du problème, ce qui revient à considérer le muscle trachéal comme également rigide. C'est une hypothèse forte, mais en accord avec le fait que l'on s'intéresse ensuite à l'acoustique du mode (presque) plan. Finalement, pour l'étude statique, on se place dans l'hypothèse de déformations planes.

En adoptant les coordonnées cylindriques autour de l'axe de la trachée, on se restreint donc à un champ de déplacement  $\mathbf{u}(M, t) = u_r(r) \mathbf{e}_r$  au sein de la paroi élastique ( $r \in (r_i, r_e)$ ), cf Fig. 7).

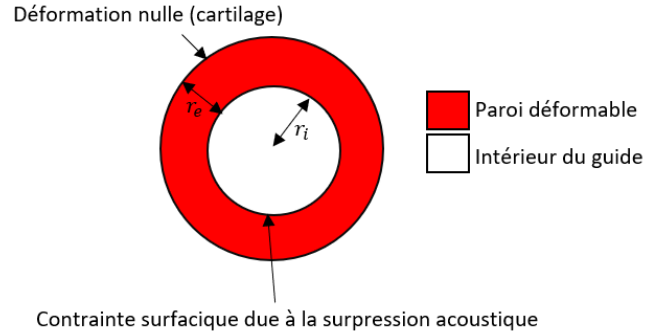


FIGURE 7 – Schéma du problème de déformation des parois élastiques sous l'effet de la pression dans le guide.

Dans ces conditions, le tenseur des contraintes  $\sigma$  se réduit aux composantes :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u'_r(r) + \lambda \frac{u_r}{r} \text{ et } \sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda u'_r(r), \quad (7)$$

et l'équation d'équilibre  $\text{div}(\sigma) = 0$  aboutit à :

$$r^2 u''_r(r) + r u'_r(r) - u_r(r) = 0. \quad (8)$$

Les conditions aux limites sont l'encastrement au niveau du cartilage ( $u_r(r_e) = 0$ ) et la continuité de la contrainte normale à l'interface avec l'air ( $\sigma_{rr}(r = r_i) = p$  où  $p$  est la pression imposée). On obtient au final le déplacement de l'interface

$$u_r(r_i) = r_i P \frac{r_e^2 - r_i^2}{2(\lambda + \mu)r_i^2 + 2\mu r_e^2}. \quad (9)$$

On vérifie alors que le résultat valide l'hypothèse de petites déformations : les elongations  $\varepsilon_{rr}$  et  $\varepsilon_{\theta\theta}$  restent inférieure à 0.05 pour des pressions  $P$  appliquées atteignant 1 kPa. D'autre part, ce résultat se montre assez sensible au choix du coefficient de Poisson : dans la limite incompressible ( $\nu \rightarrow 0.5$ ), le déplacement de l'interface serait nul (tout au moins avec les hypothèses retenues : on peut en pratique s'attendre à voir un phénomène de flambement vers une configuration non axisymétrique). On peut néanmoins estimer l'effet de la pression statique sur la section du guide d'onde et sur l'impédance d'entrée (cf Fig. 8). De la même que la variation de volume des alvéoles, la variation de section sous l'effet de la pression statique a une influence négligeable sur l'impédance de l'arbre bronchique vue depuis la glotte. Les résonances sont quasiment insensibles à ce paramètre, que ce soit en terme de fréquence ou de bande passante.

### 3.2 Modèle vibroacoustique

On étudie désormais la propagation d'une onde acoustique dans le guide couplée à une onde élastique dans la paroi du guide, avec une pulsation  $\omega$  et un nombre d'onde  $k$ . On maintient l'hypothèse d'axisymétrie. De manière classique, la pression dans le fluide est de la forme

$$p(r, z, t) = P J_0(k_r r) e^{j(\omega t - k z)} \quad (10)$$

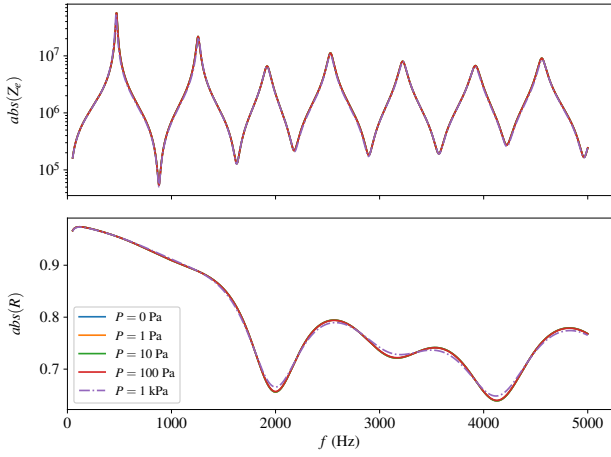


FIGURE 8 – Influence de la pression statique sur la muqueuse de la trachée : modules de l'impédance (en haut) et du coefficient de réflexion (en bas) de l'arbre bronchique.

où  $k_r = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}$  est le nombre d'onde radial. Le champ de déplacement radial associé (dans le fluide) est alors

$$u_r^f(r, z, t) = -P \frac{k_r}{\rho \omega^2} J_1(k_r r) e^{j(\omega t - kz)}. \quad (11)$$

Habituellement, les valeurs discrètes de  $k_r$  sont fixées par la condition de paroi rigide ( $u_r^f(r_i) = 0 \Rightarrow k_r = 0$  ou  $k_r r_i$  zéro de  $J_1$ ) qui est remplacée ici par la condition de continuité des déplacements normaux et des contraintes normales à l'interface air/muqueuse. On introduit ici l'admittance  $Y_{paroi}(\omega, k)$  reliant, pour une onde de pulsation  $\omega$  et nombre d'onde  $k$ , la pression  $p_r(r_i)$  (exercée par le fluide sur l'interface) au déplacement radial de la paroi  $u_r^s(r_i)$ . Les conditions de continuité amènent alors à l'équation caractéristique

$$\rho \omega^2 Y_{paroi}(\omega, k) J_0(k_r r_i) + k_r J_1(k_r r_i) = 0. \quad (12)$$

On obtient une version approchée de cette expression en travaillant directement sur les approximations 1D et en introduisant la variation temporelle de section dans l'équation de conservation de la masse

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{S}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (13)$$

Dans l'hypothèse acoustique, la section  $S = \pi(r_i + u_r(r_i))^2$  se décompose en une valeur au repos  $S_0 = \pi r_i^2$  et une fluctuation  $\tilde{S} \approx 2\pi r_i u_r(r_i)$ , où  $u_r(r_i)$  est le déplacement radial de l'interface air/muqueuse sous l'effet de la pression acoustique  $p$ . L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est inchangée, soit l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \text{ avec } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + 2\pi r_i \frac{\rho c^2}{S_0} Y_{paroi} \right) \quad (14)$$

L'équation caractéristique devient alors

$$\rho \omega^2 Y_{paroi}(\omega, k) + \frac{k_r^2 r_i}{2} = 0, \quad (15)$$

c'est une version de l'Eq. (12) supposant des formes simplifiées de la pression et du déplacement radial.

### 3.2.1 Admittance de paroi $Y_{paroi}(\omega, k)$

Il convient à ce stade de déterminer l'admittance  $Y_{paroi}$  de la paroi. On s'intéresse au problème élastodynamique avec des déplacements radial  $u_r(r) e^{j(\omega t - kz)}$  et axial  $u_z(r) e^{j(\omega t - kz)}$  satisfaisant les équations couplées :

$$r^2 u_r'' + r u_r' + \left( \frac{\omega^2 - c_s^2 k^2}{c_p^2} r^2 - 1 \right) u_r = j k r^2 \frac{c_p^2 - c_s^2}{c_p^2} u_z', \quad (16)$$

$$r^2 u_z'' + r u_z' + \frac{\omega^2 - c_p^2 k^2}{c_s^2} r^2 u_z = j k r \frac{c_p^2 - c_s^2}{c_s^2} (u_r + r u_r'). \quad (17)$$

$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  et  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  sont les célérités des ondes élastiques de compression et de cisaillement. On peut montrer que les solutions sont de la forme

$$u_r = A_p J_1(\alpha_p r) + B_p Y_1(\alpha_p r) + A_s J_1(\alpha_s r) + B_s Y_1(\alpha_s r), \quad (18)$$

$$u_z = \frac{jk}{\alpha_p} (A_p J_0(\alpha_p r) + B_p Y_0(\alpha_p r)) + \frac{\alpha_s}{jk} (A_s J_0(\alpha_s r) + B_s Y_0(\alpha_s r)) \quad (19)$$

$$\text{avec } \alpha_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - k^2} \text{ et } \alpha_s = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2}.$$

Les conditions aux limites d'encastrement en  $r_e$ , de contrainte tangentielle  $\sigma_{rz}(r_i)$  nulle et la continuité à l'interface ( $r_i$ ) des contrainte et déplacement normaux amènent à un système linéaire sur les coefficients  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $A_s$  et  $B_s$ . Pour chaque paire  $(\omega, k)$ , on peut ainsi les évaluer numériquement et déterminer l'admittance de paroi. À titre d'illustration, la figure 9 montre la réponse en fréquence de la paroi pour  $k = \omega/c$ . Les pics principaux correspondent à des résonances des ondes de compression dans l'épaisseur de la paroi (vibrations axiales), et les « accidents » localisées à des résonances des ondes de cisaillement (vibrations radiales). La prise en compte de la viscoélasticité des tissus n'introduit *a priori* pas de difficulté supplémentaire et devrait modérer l'amplitude des pics et l'effet de la vibration de paroi sur la propagation des ondes acoustiques.

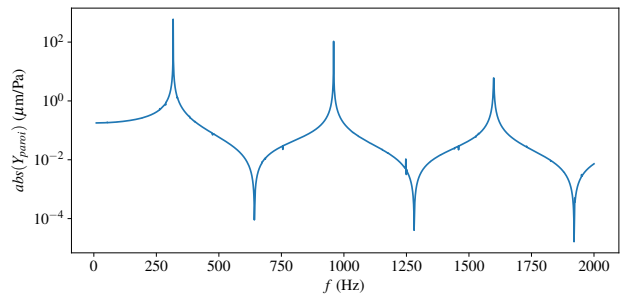


FIGURE 9 – Réponse en fréquence de la paroi trachéale soumise à une onde de pression de nombre d'onde  $k = \omega/c$ .

### 3.2.2 Relation de dispersion $k(\omega)$

Une fois que l'on sait calculer l'admittance de paroi pour un couple  $(\omega, k)$ , on peut procéder à la résolution numérique en  $k$  de l'équation caractéristique (12) (ou Eq. (15) pour le mode « presque » plan) sur une grille de pulsations  $\omega$ . On aboutit ainsi à la relation de dispersion  $k(\omega)$

pour les différents modes axisymétrique du guide d'ondes déformable et il est alors possible d'exploiter ces nombres d'ondes dans la matrice de transmission de la trachée pour le calcul de l'impédance de l'arbre vu depuis la glotte. Des premiers résultats ont été obtenus, mais demandent encore à être validés par une méthode complémentaire. Par exemple, l'approche développée par Sorohan *et coll* [17] propose sur des calculs classiques de modes propres de couplage vibroacoustiques pour un tube déformable avec conditions aux limites périodiques. Les modes correspondent alors aux ondes pouvant se propager dans un tel guide. Cela permet, moyennant une identification des modes obtenus, de construire point par point les courbes de dispersion pour chaque famille de modes. C'est un travail en cours qui nécessite d'être poursuivi.

## 4 Conclusion

Ce travail a été l'occasion de proposer un modèle de l'arbre bronchique comme arbre binaire constitué de guides d'onde de section uniforme terminés par une compliance acoustique modélisant les alvéoles. On a pu y introduire des phénomènes dissipatifs (pertes visco-thermiques), l'influence de la pression statique de l'air, du niveau de gonflement des alvéoles, ainsi que celle de la vibration de parois lors du passage d'une onde de pression acoustique, et tout ceci est accessible dans une implémentation en Python orienté objet. La finalité de l'étude est de comprendre l'importance de ces différents phénomènes du point de vue acoustique, notamment au travers de leurs influences respectives sur l'impédance vue depuis la glotte. Il apparaît que la pression pulmonaire a un impact négligeable sur l'impédance de l'arbre, tant du point de vue du gonflement des alvéoles que de la variation de section qu'elle induit.

Nous avons également pu constater que la modélisation simplifiée de l'arbre comme un pavillon que l'on trouve dans la littérature sous-estime fortement les effets dissipatifs et aboutit à des résonances de trop fort facteur de qualité. À l'inverse, il peut être inutile de considérer l'ensemble des ramifications profondes. Leur incorporation au sein d'éléments localisés semble un bon compromis, avec un ordre de troncature de l'arbre dépendant de la tolérance acceptée sur les caractéristiques des résonances.

Celle-ci est à mettre en regard des incertitudes liées aux données physiologiques et des hypothèses faites sur la structure de l'arbre. Il conviendra par la suite de vérifier la robustesse des observations précédentes pour d'autres données de la littérature, et de procéder à l'analyse de sensibilité vis-à-vis des paramètres géométriques et mécanique. À ce titre, on peut penser par exemple à une méthode de type Monte Carlo pour évaluer la variabilité des fréquences de résonance et de leurs amortissements.

## Références

- [1] I. R. Titze, Nonlinear source-filter coupling in phonation : Theory, *J. Acoust. Soc. Am.* **123**, 2733–2749 (2008).
- [2] A. C. Jackson *et coll*, Serial Distribution of Airway Diameters from Input Impedance and Computed Tomography, *Ann Biomed Eng* **23**, 740-749 (1995).
- [3] O. Trabelsi *et coll*, Experimental characterization and constitutive modeling of the mechanical behavior of the human trachea, *Med. Eng. & Phys.* **32**, 76-82 (2010).
- [4] Z. Teng *et coll*, Anisotropic material behaviours of soft tissues in human trachea : An experimental study, *J. Biomech* **45**, 1717-1723 (2012).
- [5] H. Yeh, G. Schum, Models Of Human Lung Airways and their Application to Inhaled Particle Deposition, *Bulletin of Mathematical Biology* **42**, 461-480 (1980).
- [6] J. Seikel, D. King, D. Drumright, *Anatomy & Physiology for Speech, Language and Hearing*, 4th ed., Delmar, Clifton Park, USA, 2010.
- [7] Collectif Calliope, *La parole et son traitement automatique*, éd. Masson et CNET-ENST, 1989.
- [8] J. van den Berg, An electrical analogue of the trachea, lungs and tissues, *Acta Physiol. Pharmacol. Neerl.* **9** (361-385) (1960).
- [9] G. Fant *et coll*, Subglottal formants, *STL-QPSR* **1** (1–12) (1972).
- [10] J. Ho *et coll*, An anatomically based, time-domain acoustic model of the subglottal system for speech production, *J. Acoust. Soc. Am.* **129**, 1531-1547 (2011).
- [11] E. Weibel, Morphometrics of the lungs, *Handbook of Physiology, Respiration* Sec. 3 Vol. 1, 299-305 (1964).
- [12] K. Horsfield *et coll*, Models of the human bronchial tree, *J. Appl. Physiol.* **31**, 207-217 (1971).
- [13] P. Harper *et coll*, An acoustic model of the respiratory tract, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **48** (5), 543-550 (2001).
- [14] S. Lulich, H. Arsikere, Tracheo-bronchial soft tissue and cartilage resonances in the subglottal acoustic input impedance, *J. Acoust. Soc. Am.* **137**, 3436-3446 (2015).
- [15] S. Bilbao, *Numerical Sound Synthesis*, Wiley & Sons, Chichester (2009).
- [16] J. Kergomard & A. Chaigne, *Acoustique des Instruments de Musique*, Belin (2008).
- [17] S. Sorohan *et coll*, Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes, *Ultrasonics* **51**, 503-515 (2011).