



HAL
open science

La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou

► **To cite this version:**

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou. La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique. 2018. hal-01766202v1

HAL Id: hal-01766202

<https://hal.science/hal-01766202v1>

Preprint submitted on 13 Apr 2018 (v1), last revised 8 Sep 2019 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique

Karim Belabas^{*}, Dominique Bernardi^{**} et Bernadette Perrin-Riou^{***}

^{*}IMB (UMR 5251), Université de Bordeaux, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence

^{**}IMJ-PRG, UPMC, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

^{***}Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay, France.

13 avril 2018

Abstract

We revisit the calculation of the strong Weil curve in an isogeny class of elliptic curves over \mathbb{Q} , of the Manin constant and modular degree of an elliptic curve, using modular symbols as defined in [8], now implemented in Pari/GP. There is no innovation claim.

On revisite les procédures de calcul de la courbe de Weil forte d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur \mathbb{Q} , de la constante de Manin et du degré modulaire d'une courbe elliptique en utilisant les symboles modulaires tels qu'ils sont décrits dans [8] et désormais implémentés dans Pari/GP. Il n'y a aucune prétention à une nouveauté quelconque.

Le troisième auteur (en particulier) remercie chaleureusement Bill Allombert pour l'avoir lancée sur cette question, ce qui l'a obligée à relire les articles fondateurs des années 1970 sur cette question.

Table des matières

1	Rappels sur les constantes de Manin et le degré modulaire	2
2	Espace des symboles modulaires	2
2.1	Lien entre l'espace des symboles modulaires et les cohomologies	2
2.2	Structure entière de l'espace des symboles modulaires	3
3	Espace associé à une forme modulaire et à une courbe elliptique	3
3.1	Structure rationnelle	3
3.2	Structure entière \mathcal{L}_f associée à une forme modulaire propre	4
3.3	Quelques bases particulières de l'homologie de E	4
3.4	Structure entière \mathcal{L}_E associée à une courbe elliptique	5
3.5	Calcul de \mathcal{L}_E	6
4	Conséquences	7
4.1	Critère de calcul de la courbe de Weil forte et de sa constante de Manin	7
4.2	Grphe orienté des isogénies admissibles	7
4.3	Degré modulaire et constante de Manin	8
A	Programmes non optimisés	9
B	Quelques exemples	10

1 Rappels sur les constantes de Manin et le degré modulaire

Reprenons quelques définitions et énoncés de [5].

Définition 1.1. Une *paramétrisation modulaire* π d'une courbe elliptique E/\mathbb{Q} de conducteur N est un morphisme non constant $\pi_{\text{mod}} : X_0(N) \rightarrow E$ défini sur \mathbb{Q} tel que l'image de ∞ est 0 et tel que si ω est une forme différentielle invariante non nulle de E sur \mathbb{Q} , l'image réciproque $\pi^*\omega$ sur $X_0(N)$ vue comme une forme modulaire parabolique est de niveau exactement N . Autrement dit, il existe un rationnel c non nul et une forme f primitive de niveau N (vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke de niveau N et normalisée par $a_1(f) = 1$) tels que $\pi_{\text{mod}}^*\omega = c\omega_f$ avec $\omega_f = 2i\pi f(z)dz \in (1 + q\mathbb{Z}[[q]])dq$ pour $q = \exp(2i\pi z)$.

Définition 1.2. — Le *degré modulaire* $\deg(E)$ de E est le degré minimal parmi les paramétrisations modulaires de E .

— Soit ω_E une forme différentielle de Néron de E . La *constante de Manin* de E est le rationnel $c_E > 0$ tel que $\pi_{\text{min},E}^*\omega_E = c_E\omega_f$ pour une paramétrisation minimale $\pi_{\text{min},E}$ de E .

Soit \mathcal{E} une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur \mathbb{Q} . Il existe une unique courbe E_1 dans \mathcal{E} et une unique paramétrisation modulaire $\pi_1 : X_0(N) \rightarrow E_1$ (à isomorphisme près) telle que toute paramétrisation modulaire $\pi : X_0(N) \rightarrow E$ pour $E \in \mathcal{E}$ se factorise par π_1 .

$$\begin{array}{ccc} X_0(N) & \xrightarrow{\pi_1} & E_1 \\ & \searrow \pi & \downarrow \\ & & E \end{array}$$

Le degré de $\pi_1 : X_0(N) \rightarrow E_1$ est minimal parmi les degrés des paramétrisations modulaires des courbes elliptiques de la classe d'isogénie \mathcal{E} . Si f est la forme modulaire parabolique associée à \mathcal{E} , la courbe E_1 est la *courbe de Weil forte associée à f* .

On la construit de la manière suivante. Soit $\pi' : X_0(N) \rightarrow E'$ une paramétrisation modulaire de E' dans la classe d'isogénie \mathcal{E} . Par passage à la jacobienne, on en déduit un homomorphisme de variétés abéliennes $\pi : J_0(N) \rightarrow E'$. Soit A le noyau de π . La composante connexe A^0 de l'élément neutre dans A est une variété abélienne qui ne dépend pas de la paramétrisation π' , $E_1 = J_0(N)/A^0$ est une courbe elliptique et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_0(N) & \xrightarrow{\pi_1} & J_0(N)/A^0 = E_1 \\ & \searrow \pi' & \downarrow \\ & & E' \end{array}$$

Lemme 1.3. Soit $\pi : X_0(N) \rightarrow E$ une paramétrisation modulaire minimale. Alors, E est une courbe elliptique de Weil forte si et seulement si $H_1(X_0(N), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E, \mathbb{Z})$ est surjective.

Voir lemme 3, § 4 de [5].

2 Espace des symboles modulaires

2.1 Lien entre l'espace des symboles modulaires et les cohomologies

Soit $\Delta = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]$ le groupe des diviseurs sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et Δ_0 le sous-module des diviseurs de Δ de degré 0. Les éléments de Δ_0 peuvent être vus comme des combinaisons linéaires dans \mathbb{Z} de chemins (a, b) pour a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Les modules Δ et Δ_0 sont munis d'une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ et donc de $\Gamma = \Gamma_0(N)$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\Delta, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\Delta, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

ou en explicitant

$$0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \bigoplus_{s \in C(\Gamma)} H^0(\Gamma_s, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{s \in C(\Gamma)} H^1(\Gamma_s, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

où $C(\Gamma)$ est un système de représentants de $\Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et Γ_s le stabilisateur de s dans Γ . L'application $\text{Hom}_\Gamma(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{Q})$ est donnée par $\Phi \mapsto (\gamma \mapsto \Phi((0, \gamma^{-1}0)))$. La formule des coefficients universels en cohomologie implique la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_0(X_0(N), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X_0(N), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_1(X_0(N), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

On en déduit que

$$H^1(X_0(N), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X_0(N), \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

Rappelons les résultats de Manin ([4]). Si a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sont équivalents modulo $\Gamma_0(N)$, l'image de l'arc géodésique (a, b) joignant a à b dans \mathcal{H} définit un élément de $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$.

De plus, si $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, les éléments de la forme (a, b) avec b équivalent à a modulo $\Gamma_0(N)$ engendrent $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ ([4], proposition 1.4). On peut prolonger cette application aux arcs géodésiques de la forme (a, b) avec a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ à condition d'étendre les valeurs à $H_1(X_0(N), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \otimes H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$. On en déduit une application surjective

$$\Delta_0 \rightarrow H_1(X_0(N), \mathbb{Q})$$

et par dualité un homomorphisme injectif

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_0, \mathbb{Q})$$

à valeurs dans les invariants par $\Gamma_0(N)$, donc un homomorphisme injectif

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q})$$

que l'on note provisoirement $h \rightarrow \tilde{h}$. Son image est d'intersection nulle avec l'image de $\text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})$. En effet, soit h un élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N), \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ tel que \tilde{h} est l'image de $\tilde{h}_1 \in \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})$. Si c est un lacet partant de $x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, son relèvement dans \mathcal{H} joint x_0 à $\gamma^{-1}x_0$ pour un γ dans $\Gamma_0(N)$ et $h(c) = \tilde{h}((x_0, \gamma^{-1}x_0)) = \tilde{h}_1([\gamma^{-1}x_0]) - \tilde{h}_1([x_0]) = 0$ puisque \tilde{h}_1 est invariant par $\Gamma_0(N)$.

Pour une raison de dimension (les deux espaces sont de dimension 2 fois le genre de $X_0(N)$), on en déduit les isomorphismes

$$H^1(X_0(N), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q}) / \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})$$

2.2 Structure entière de l'espace des symboles modulaires

Remarquons que le \mathbb{Z} -module $H^1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ s'injecte dans $H^1(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})$. Cela se voit facilement en écrivant la suite de cohomologie pour la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ de $\Gamma_0(N)$ -modules.

On note $W = \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q}) / \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})$ et W_{par} le supplémentaire de $\text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})$ dans $\text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q})$ stable par l'algèbre de Hecke. Soient $\mathcal{W} \subset W$ et $\mathcal{W}_{par} \subset W_{par}$ les sous- \mathbb{Z} -modules formés des éléments dont l'image dans $H^1(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})$ appartient à l'image de $H^1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ dans $H^1(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})$.

Lemme 2.1. *Les \mathbb{Z} -modules \mathcal{W} et \mathcal{W}_{par} sont de type fini et de rang maximal, respectivement dans W et W_{par} .*

Pour une démonstration analogue, voir par exemple [10], Proposition 1.

3 Espace associé à une forme modulaire et à une courbe elliptique

3.1 Structure rationnelle

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} de niveau N , f la forme modulaire parabolique normalisée de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ qui lui est associée et $\pi : X_0(N) \rightarrow E$ une paramétrisation modulaire de E .

Soit V_f le \mathbb{Q} -espace vectoriel de $W = \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q})$ associé obtenu par décomposition par les opérateurs de Hecke. Autrement dit, V_f est l'ensemble des éléments v de $\text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q})$ tel que $(T(n) - a_n(f))v = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Il est en fait contenu dans le sous-espace W_{par} de W .

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^1(E, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^1(X_0(N), \mathbb{Q}) \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(E, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
V_f & \longrightarrow & W_{par} \cong \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q}) / \text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta, \mathbb{Q})
\end{array}$$

3.2 Structure entière \mathcal{L}_f associée à une forme modulaire propre

Soit \mathcal{L}_f le \mathbb{Z} -sous-module de V_f défini par $\mathcal{L}_f = V_f \cap \mathcal{W}$. C'est donc l'ensemble des éléments Φ de V_f tels que $\Phi((0, \gamma^{-1}0)) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$. C'est aussi $H^1(X_0(N), \mathbb{Z}) \cap V_f$ (ici, on voit simplement $H^1(X_0(N), \mathbb{Z})$ comme le dual sur \mathbb{Z} de $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$).

3.3 Quelques bases particulières de l'homologie de E

Plusieurs bases de $H_1(E, \mathbb{Z})$ sont construites. La première est définie à l'aide des sous-espaces propres par la conjugaison complexe sur $E(\mathbb{C})$ dans un modèle minimal de Weierstrass, la seconde est liée à la paramétrisation modulaire de E .

3.3.1 Réseau associé à un modèle minimal

Faisons quelques rappels sur les périodes complexes de E . On note c_∞ le nombre de composantes connexes de $E(\mathbb{R})$. Soit Λ_E le réseau des périodes de E dans un modèle minimal, autrement dit le sous- \mathbb{Z} -module de rang 2 de \mathbb{C} formé des nombres $\int_c \omega_E$ pour $c \in H_1(E, \mathbb{Z})$. Soient $\Omega_E^+ \in \mathbb{R}^+$ et $\Omega_E^- \in i\mathbb{R}^+$ tels que $\mathbb{Z}\Omega_E^+ = \Lambda_E \cap \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\Omega_E^- = \Lambda_E \cap i\mathbb{R}$; on note $\Omega_1 = \Omega^+ + \Omega^-$ et

$$\Omega_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Omega_E^+ + \Omega_E^-) & \text{si } c_\infty = 1, \\ \Omega_E^- & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

On a $\Lambda_E = \mathbb{Z}\Omega_1 + \mathbb{Z}\Omega_2$ et $\Omega_E^+ \Omega_E^- = \frac{2}{c_\infty} \text{Aire}(\Lambda_E)$. Notons δ_+ , δ_- , δ_1 et δ_2 les éléments de $H_1(E, \mathbb{Z})$ tels que

$$\int_{\delta_+} \omega_E = \Omega_E^+, \quad \int_{\delta_-} \omega_E = \Omega_E^-, \quad \int_{\delta_1} \omega_E = \Omega_1, \quad \text{et} \quad \int_{\delta_2} \omega_E = \Omega_2.$$

Bien sûr, $\delta_1 = \delta_+$ et

$$\frac{2}{c_\infty} \delta_2 = \begin{cases} \delta_- + \delta_+ & \text{si } c_\infty = 1, \\ \delta_- & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

On note (δ_+^*, δ_-^*) (resp. (δ_1^*, δ_2^*)) la base duale de (δ_+, δ_-) (resp. (δ_1, δ_2)) dans $H^1(E, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(E, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$: (δ_1, δ_2) est une base de $H_1(E, \mathbb{Z})$ et (δ_1^*, δ_2^*) est une base de $H^1(E, \mathbb{Z})$. Explicitement, on a

$$\delta_2^* = \frac{2}{c_\infty} \delta_-^* \quad \text{et} \quad \delta_1^* = \begin{cases} \delta_+^* - \delta_-^* & \text{si } c_\infty = 1, \\ \delta_+^* & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

On en déduit l'action de la conjugaison complexe σ sur la base (δ_1^*, δ_2^*)

$$\sigma \delta_2^* = -\delta_2^* \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma \delta_1^* = \delta_1^* + \delta_2^* & \text{si } c_\infty = 1 \\ \sigma \delta_1^* = \delta_1^* & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

1. La normalisation de $(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{E}.\text{omega}$ dans Pari/GP change le signe de Ω_E^- : on a $\omega_1 = \Omega_1$ et

$$\omega_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Omega_E^+ - \Omega_E^-) = \Omega_1 - \Omega_2 & \text{si } c_\infty = 1, \\ -\Omega_E^- = -\Omega_2 & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

3.3.2 Réseau associé à la paramétrisation modulaire

Fixons une paramétrisation modulaire minimale $\pi : X_0(N) \rightarrow E$. On note $(n_{1,E}, n_{2,E})$ les diviseurs élémentaires de l'image $\pi_* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ de $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ dans $H_1(E, \mathbb{Z})$: il existe une base (δ_1, δ_2) de $H_1(E, \mathbb{Z})$ et une base $(\pi_*(\beta_1), \pi_*(\beta_2))$ de $\pi_* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ telles que

$$\begin{cases} \pi_*(\beta_1) &= n_{1,E} \delta_1, \\ \pi_*(\beta_2) &= n_{2,E} \delta_2, \end{cases}$$

et les deux entiers positifs $n_{1,E}$ et $n_{2,E}, n_{2,E} \mid n_{1,E}$, sont uniques.

3.4 Structure entière \mathcal{L}_E associée à une courbe elliptique

Soit une base $\mathcal{B} = (\delta_1, \delta_2)$ de $H_1(E, \mathbb{Z})$. On note (δ_1^*, δ_2^*) la base de $H^1(E, \mathbb{Z})$ duale : on a donc pour $\delta \in H_1(E, \mathbb{Q})$

$$\delta = \delta_1^*(\delta) \cdot \delta_1 + \delta_2^*(\delta) \cdot \delta_2$$

et si $\omega \in H^0(E, \Omega_E^1)$

$$\int_{\delta} \omega = \delta_1^*(\delta) \int_{\delta_1} \omega + \delta_2^*(\delta) \int_{\delta_2} \omega.$$

En particulier, si ω_E est une forme différentielle de Néron de E , on a

$$\int_{\delta} \omega_E = \delta_1^*(\delta) \cdot \Omega_{E,1} + \delta_2^*(\delta) \cdot \Omega_{E,2}$$

avec $\Omega_{E,i} = \int_{\delta_i} \omega_E$.

Soient $\Phi_{E,1}^{\mathcal{B}}, \Phi_{E,2}^{\mathcal{B}}$ les éléments de V_f définis pour $\beta \in H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ par

$$\int_{\beta} \omega_f = \Phi_{E,1}^{\mathcal{B}}(\beta) \int_{\delta_1} \omega_E + \Phi_{E,2}^{\mathcal{B}}(\beta) \int_{\delta_2} \omega_E \quad (1)$$

(seule la f -composante intervient).

Définition 3.1. Le sous- \mathbb{Z} -module de V_f engendré par $\Phi_{E,1}^{\mathcal{B}}$ et $\Phi_{E,2}^{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base choisie \mathcal{B} . On le note \mathcal{L}_E .

Lemme 3.2. Les diviseurs élémentaires (au sens généralisé) de \mathcal{L}_E dans \mathcal{L}_f sont $(\frac{n_{1,E}}{c_E}, \frac{n_{2,E}}{c_E})$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{Z}$, $\beta \in H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ et $\delta \in H_1(E, \mathbb{Z})$ sont tels que $n\delta = \pi_*(\beta)$, on a

$$n \int_{\delta} \omega_E = \int_{\pi_* \beta} \omega_E = \int_{\beta} \pi^* \omega_E = c_E \int_{\beta} \omega_f$$

puisque $\pi^* \omega_E = c_E \omega_f$. Lorsque $\mathcal{B} = (\delta_1, \delta_2)$ est une base de $H_1(E, \mathbb{Z})$ adaptée aux diviseurs élémentaires de l'image de $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ dans $H_1(E, \mathbb{Z})$ comme en 3.3.2, en appliquant cela à β_1 et β_2 , l'équation (1) devient pour tout $\beta \in H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$

$$\int_{\beta} \omega_f = \frac{c_E}{n_{1,E}} \Phi_{E,1}^{\mathcal{B}}(\beta) \int_{\beta_1} \omega_f + \frac{c_E}{n_{2,E}} \Phi_{E,2}^{\mathcal{B}}(\beta) \int_{\beta_2} \omega_f.$$

Donc $\frac{c_E}{n_{1,E}} \Phi_{E,1}^{\mathcal{B}}, \frac{c_E}{n_{2,E}} \Phi_{E,2}^{\mathcal{B}}$ est par définition une base de \mathcal{L}_f . On en déduit le lemme. \square

Remarquons que $c_E \mathcal{L}_E$ est contenu dans \mathcal{L}_f , mais que \mathcal{L}_E ne l'est pas forcément (la constante de Manin d'une courbe de Weil forte est dans \mathbb{Z} et conjecturée égale à 1, mais pas celle d'une courbe elliptique quelconque).

3.5 Calcul de \mathcal{L}_E

Le calcul de \mathcal{L}_E est fait à partir de bases δ_{\pm} des espaces propres $H^1(E, \mathbb{Z})^{\pm}$ pour la conjugaison complexe sur $E(\mathbb{C})$. Rappelons que si ψ est un caractère de Dirichlet de conducteur D premier à N ,

$$\tau(\psi)L(E, \bar{\psi}, 1) = \sum_{a \bmod D} \psi(a) \int_{\frac{a}{D}}^{\infty} 2i\pi f(z) dz$$

où $\tau(\psi) = \sum_{a \bmod D} \psi(a) e^{2i\pi a/D}$ est la somme de Gauss de ψ . Choisissons deux caractères de Dirichlet ψ_0 et ψ_1 de conducteurs respectifs D_0 et D_1 , de signe $\psi_j(-1) = \varepsilon_j = (-1)^j$ et tels que $L(E, \bar{\psi}_j, 1)$ soit non nul pour $j = 0, 1$ (on les choisira de conducteur minimal pour cette propriété).

Les conditions

$$\tau(\psi_j)L(E, \bar{\psi}_j, 1) = \sum_{a \bmod D_j} \psi_j(a) \cdot \Phi_{E, \varepsilon_j}^{(\delta_+, \delta_-)}\left(\left(\frac{a}{D_j}, \infty\right)\right) \int_{\delta_{\varepsilon_j}} \omega_E$$

pour $j = 0, 1$ déterminent les symboles modulaires $\Phi_{E, \pm}^{(\delta_+, \delta_-)}$ dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel V_f^{\pm} de dimension 1 de manière indépendante du choix des ψ_j : cela revient en effet à imposer les conditions

$$\int_{\beta_0} \omega_f = \Phi_{E, +}^{(\delta_+, \delta_-)}(\beta_0) \int_{\delta_+} \omega_E,$$

$$\int_{\beta_1} \omega_f = \Phi_{E, -}^{(\delta_+, \delta_-)}(\beta_1) \int_{\delta_-} \omega_E,$$

avec $\beta_j = \sum_{a \bmod D_j} \psi_j(a) \left(\frac{a}{D_j}, \infty\right)$. Par exemple, pour Ψ_0 trivial et $\beta_0 = (0, \infty)$, la formule devient

$$\frac{L(E, 1)}{\Omega_E^+} = \Phi_{E, +}^{(\delta_+, \delta_-)}((0, \infty)).$$

Le réseau \mathcal{L}_E de V_f associé à E est alors engendré par

$$\begin{cases} \Phi_{E, +}^{(\delta_+, \delta_-)} & \text{et } \Phi_{E, -}^{(\delta_+, \delta_-)} & \text{si } c_{\infty} = 2 \\ \Phi_{E, +}^{(\delta_+, \delta_-)} - \Phi_{E, -}^{(\delta_+, \delta_-)} & \text{et } 2\Phi_{E, -}^{(\delta_+, \delta_-)} & \text{si } c_{\infty} = 1 \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. Il est avantageux pour les calculs d'utiliser des caractères de Dirichlet de conducteur le plus petit possible. Il paraît naturel d'utiliser un caractère quadratique mais ce n'est pas toujours possible ni optimal. Par exemple, soit la courbe $E = 1225e1$ de conducteur $N = 1225 = 35^2$. Le signe de l'équation fonctionnelle de E est 1. Montrons en utilisant Pari/GP que le signe de l'équation fonctionnelle des twists de E par un caractère quadratique impair ψ est -1 , ce qui impliquera que $L(E^{(\psi)}, 1) = 0$ pour tout D négatif. Pour D discriminant fondamental, on note $E^{(D)}$ le twist de E par le caractère quadratique (D/\cdot) , $w(E)$ le signe de l'équation fonctionnelle de E . On a la formule bien connue $w(E^{(D)}) = \psi(-N)w(E)$ pour D premier à N , donc ici $w(E^{(D)}) = \psi(-1)w(E) = \text{signe}(D)w(E)$ pour $(D, 35) = 1$.

```
? E = ellinit("1225e1");
? ellrootno(E)
%2 = 1

? E7 = ellinit(elltweak(E, -7)); ellidentify(E7) [1] [1]
%3 = "1225g1"
? ellrootno(E7)
%4 = -1

? E5 = ellinit(elltweak(E, 5)); ellidentify(E5) [1] [1]
%5 = "1225f1"
```

```

? ellrootno(E5)
%6 = 1

? E35 = ellinit(elltwist(E,-35)); ellidentify(E35)[1][1]
%7 = "1225h1"
? ellrootno(E35)
%8 = -1

```

Ainsi, les twists de E par $-7, 5, -35$ sont encore de conducteur un carré.

— Si $D = -7m$ avec m premier à 35 et positif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(-7)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(-7)}) = w(E^{(-7)}) = -1.$$

— Si $D = 5m$ avec m premier à 35 et négatif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(5)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(5)}) = -w(E^{(5)}) = -1.$$

— Si $D = 35m$ avec m premier à 35 et positif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(-35)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(-35)}) = w(E^{(-35)}) = -1.$$

Autrement dit, $L(E, \psi, 1)$ est nul pour tous les caractères quadratiques impairs. On utilise alors pour le calcul de $\Phi_{E,-}^{(\delta_+, \delta_-)}$ un caractère de Dirichlet impair de conducteur 9 et d'ordre 6.

4 Conséquences

4.1 Critère de calcul de la courbe de Weil forte et de sa constante de Manin

Proposition 4.1. 1. La courbe E est une courbe de Weil forte si et seulement si les sous- \mathbb{Z} -modules \mathcal{L}_f et \mathcal{L}_E de $V_f \subset W$ sont homothétiques.

2. Si $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_f$, la courbe E est la courbe de Weil forte et la constante de Manin est égale à 1.

Démonstration. La courbe de Weil forte d'une classe d'isogénie sur \mathbb{Q} de courbes elliptiques est la courbe elliptique telle que $\pi_* : H_1(X_0(N), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E, \mathbb{Z})$ est surjective. Avec les notations précédentes, cela est le cas si et seulement si $n_{1,E} = n_{2,E} = 1$. Les deux sous- \mathbb{Z} -modules \mathcal{L}_E et \mathcal{L}_f de V_f sont alors homothétiques. Réciproquement, notons E_1 la courbe de Weil forte (dont on sait qu'elle existe et vérifie que \mathcal{L}_{E_1} est homothétique à \mathcal{L}_f) et α une isogénie de E sur E_1 de noyau cyclique. Les diviseurs élémentaires de \mathcal{L}_{E_1} dans \mathcal{L}_E sont alors $\deg(\alpha)$ et 1. Si l'on suppose ces deux réseaux homothétiques, α est un isomorphisme. Cela démontre la première partie.

Supposons maintenant que $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_f$. On a alors $n_{1,E} = n_{2,E} = c_E$. Mais il n'y a qu'une seule courbe de Weil forte à isomorphisme près. Donc, on a nécessairement $n_{1,E} = n_{2,E} = c_E = 1$. \square

4.2 Graphe orienté des isogénies admissibles

Prenons une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur \mathbb{Q} . Le graphe des isogénies de degré premier peut être orienté de la manière suivante. Si $\pi : E \rightarrow E'$ est une isogénie de degré premier et π' l'isogénie duale, on a $\pi^* \omega_{E'} = \pm \omega_E$ ou $\pi'^* \omega_E = \pm \omega_{E'}$. L'arc entre E et E' est alors orienté comme $E \rightarrow E'$ si et seulement si $\pi^* \omega_{E'} = \pm \omega_E$ (appelé *admissible isogeny* dans [4], 6.11). Le calcul de ce graphe peut se faire par un calcul des modèles minimaux des courbes elliptiques de la classe d'isogénie et des réseaux des périodes complexes associés.

4.3 Degré modulaire et constante de Manin

Soit E_1 une courbe de Weil forte et E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} dans sa classe d'isogénie. Une paramétrisation modulaire minimale $X_0(N) \rightarrow E$ est obtenue comme composé $X_0(N) \rightarrow E_1 \rightarrow E$ où $E_1 \rightarrow E$ est de degré minimal. Le degré modulaire de E est égal au produit du degré modulaire de E_1 par le degré de cette isogénie. D'autre part, le degré modulaire de la courbe de Weil forte E_1 se calcule par la formule²

$$4\pi^2 \|f\|^2 = \deg(\pi_1) \text{Aire}(E_1) = \frac{c_\infty}{2} \deg(\pi_1) \Omega_{E_1}^+ \Omega_{E_1}^- \quad (2)$$

une fois qu'on a vérifié que la constante de Manin de E_1 est bien 1.

On obtient l'algorithme suivant.

Algorithm 1 Degré modulaire et constante de Manin

Entrée: Une courbe elliptique E .

Sortie: Le degré modulaire $\deg(E)$ et la constante de Manin c_E .

- 1: On calcule la courbe de Weil forte E_1 dans la classe d'isogénie de E et on vérifie en même temps que $c_{E_1} = 1$. On calcule son degré modulaire d_1 (par exemple par `ellmoddegree` dans `Pari/GP`).
 - 2: On calcule le graphe (orienté) des isogénies de degré premier de la classe d'isogénie. Si a est un arc, on note $\deg(a)$ le degré de l'isogénie, forcément premier.
 - 3: On cherche le chemin le plus court de E_1 vers E dans le graphe non orienté associé.
 - 4: $d \leftarrow d_1$; $c \leftarrow 1$;
 - 5: **pour** a arc du chemin **faire**
 - 6: $d \leftarrow d \times \deg(a)$
 - 7: **si** a est orienté négativement **alors**
 - 8: $c \leftarrow c \times \deg(a)$
 - 9: **retourner** d et c .
-

Le graphe orienté calculé a une source (courbe optimale de Stevens, conjecturalement courbe de Weil forte relativement à $X_1(N)$, [9]). Si la courbe de Weil forte est la source du graphe orienté que l'on a construit, la constante de Manin pour une courbe elliptique quelconque isogène est toujours 1.

Prenons le cas où $N = 11$. La courbe de Weil forte est "11a1". Le graphe orienté des isogénies de degré premier est

$$11a3 \xrightarrow{5} 11a1 \xrightarrow{5} 11a2$$

La courbe optimale au sens de Stevens est "11a3". On a

```
? ellmoddegree(ellinit("11a1")) [1]
%1 = 1
```

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
11a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
11a2	5	1	5,1	5,1	
11a3	5	5	1,1/5	5,1	

$$11a3 \xrightarrow{5} \mathbf{11a1} \xrightarrow{5} 11a2$$

2. Si l'on désire rester dans le cadre algébrique, ce degré peut aussi être calculé à partir de la matrice de Gram sur une base de \mathcal{L}_f du produit de Petersson algébrique (ou produit d'intersection) défini sur l'espace $\text{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, \mathbb{Q})$ (voir article à venir).

A Programmes non optimisés

Ces programmes sont écrits en PARI/GP [7]. Nous avons utilisé les noms des courbes elliptiques de Cremona, mais les programmes sont facilement adaptables pour une courbe elliptique quelconque (avec une contrainte sur le niveau selon l'implantation !).

```
/* calcule le plus court chemin entre x et y sans tenir compte de l'orientation */
dj(A,x,y)= {
  my(m, n=length(A));
  my(v=vector(n, i, n*(i!=x)));
  my(w=vector(n));
  for(l=1, n-1,
    for(z=1, n,
      if(v[z]==l-1, for(t=1, n, if(A[z, t]&&v[t]>l, v[t]=l; w[t]=z)))
    )
  );
  m=v[y]+1;
  if(m>n, return ([]));
  my(res=vector(m));
  for(i=1, m, res[m+1-i]=y; y=w[y]);
  res
};
```

```
/* Calcule la matrice du graphe d'isogénie de e et les indices des réseaux associés
dans L_f */
graphisogeny(e)={
  my([Isog, isomat]=ellisomat(e, 1), C);
  my(nbiso=#Isog);
  Isog=vector(nbiso, i, ellminimalmodel(ellinit(Isog[i])));
  my([M, xpm]=msfromell(Isog));
  /* réseau associé à la courbe de Weil de la classe d'isogénie */
  my(Lf=mslattice(M, Mat(xpm[1][3])));
  my(orientree=matrix(nbiso, nbiso));
  my(L=vector(nbiso)); my(Lindice=vector(nbiso));
  for(i=1, nbiso,
    /* comparaison de L[i] avec Lf */
    L[i]=xpm[i][3];
    C=Lf^(-1)*L[i]; Lindice[i]=content(C)*matsnf(content(C)^-1*C);
  );
  for(i=1, nbiso-1,
    for(j=i+1, nbiso,
      if(isprime(isomat[i, j]),
        C=L[i]^-1*L[j]; C=content(C)*matsnf(content(C)^-1*C);
        if(denominator(C[1])==1 && denominator(C[2])==1,
          orientree[i, j]=C[1]*C[2],
          orientree[j, i]=(C[1]*C[2])^-1
        )
      )
    )
  );
  [orientree, vector(nbiso, i, ellidentify(Isog[i])[1][1]), Lindice]
};
```

```

ellmanin(e)={
  my(i, il, pc, c=1, d);
  my([A, B, Lindice]=graphisogeny(e)); /* matrice du graphe avec poids */
  A=A-mattranspose(A);
  /* numéro de la courbe de Weil forte e1 dans la classe d'isogénie
   (on vérifie en même temps que la constante de Manin de
   courbe Weil forte est 1) */
  i1=select(x->x==[1,1],Lindice,1)[1];
  e1=ellinit(vecextract(B,i1)[1]);
  /* numero de la courbe */
  i=select(x->x==ellidentify(e)[1][1],B,1)[1];
  /* cherche le chemin le plus court entre il et i */
  pc=dj(A,i1,i);
  /* calcule le degré d entre e et e1 et le multiplie par ellmoddeg(e1) */
  /* calcule la constante de Manin c de e */
  d=ellmoddegree(e1)[1];
  for(j=1,#pc-1, t=A[pc[j],pc[j+1]]);
    d *= abs(t);
    if(t<0, c *= abs(t))
  );
  [d,c,Lindice[i]]
};

```

B Quelques exemples

Nous avons fait une sélection de quelques exemples. Ainsi, nous donnons des exemples de courbes elliptiques ayant beaucoup de courbes isogènes et pour chaque valeur possible de degré d'isogénie (2, 3, 5, 7, 13, 1, 17, 19, 37, 43, 67, 163, voir [6]), La construction des graphes a été inspirée des programmes de F. Brunault ([1]). Nous renvoyons à [11], §4, pour une analyse de familles de courbes où la courbe optimale pour $X_0(N)$ n'est pas la source de l'arbre.

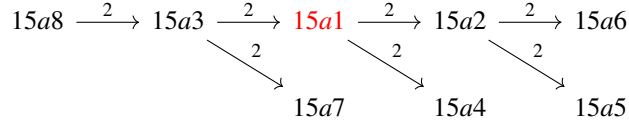
	deg	c_E	$[L_f : L_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
11a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
11a2	5	1	5,1	5,1	
11a3	5	5	1,1/5	5,1	

$$11a3 \xrightarrow{5} 11a1 \xrightarrow{5} 11a2$$

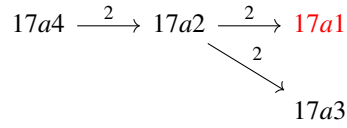
	deg	c_E	$[L_f : L_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
14a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
14a4	3	3	1,1/3	3,1	
14a3	3	1	3,1	3,1	
14a2	2	1	2,1	2,1	
14a6	6	3	2,1/3	6,1	
14a5	6	1	6,1	6,1	

$$\begin{array}{ccccc}
14a4 & \xrightarrow{3} & 14a1 & \xrightarrow{3} & 14a3 \\
& \searrow 2 & & \searrow 2 & \searrow 2 \\
& & 14a6 & \xrightarrow{3} & 14a2 & \xrightarrow{3} & 14a5
\end{array}$$

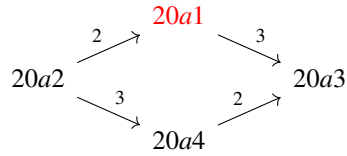
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
15a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
15a3	2	2	1,1/2	2,1	
15a7	4	2	2,1/2	4,1	
15a8	4	4	1,1/4	4,1	
15a4	2	1	2,1	2,1	
15a2	2	1	2,1	2,1	
15a6	4	1	4,1	4,1	
15a5	4	1	4,1	4,1	



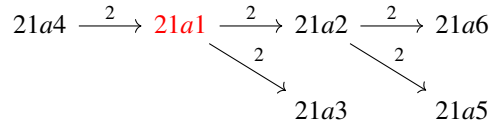
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
17a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
17a2	2	2	1,1/2	2,1	
17a4	4	4	1,1/4	4,1	
17a3	4	2	2,1/2	4,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
20a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
20a3	3	1	3,1	3,1	
20a2	2	2	1,1/2	2,1	
20a4	6	2	3,1/2	6,1	



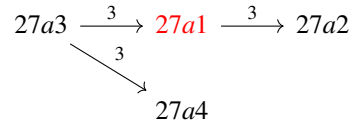
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
21a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
21a3	2	1	2,1	2,1	
21a4	2	2	1,1/2	2,1	
21a2	2	1	2,1	2,1	
21a6	4	1	4,1	4,1	
21a5	4	1	4,1	4,1	



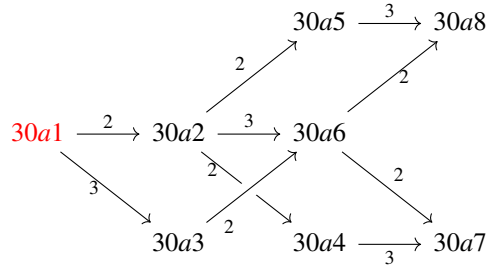
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
26b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26b2	14	1	7,1	7,1	

$$26b1 \xrightarrow{7} 26b2$$

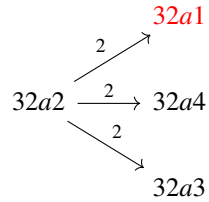
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
27a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
27a3	3	3	1,1/3	3,1	
27a4	9	3	3,1/3	9,1	
27a2	3	1	3,1	3,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
30a1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
30a2	4	1	2,1	2,1	
30a5	8	1	4,1	4,1	
30a4	8	1	4,1	4,1	
30a3	6	1	3,1	3,1	
30a6	12	1	6,1	6,1	
30a8	24	1	12,1	12,1	
30a7	24	1	12,1	12,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
32a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
32a2	2	2	1,1/2	2,1	
32a4	4	2	2,1/2	4,1	
32a3	4	2	2,1/2	4,1	



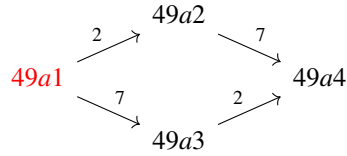
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
37b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
37b3	6	3	1,1/3	3,1	
37b2	6	1	3,1	3,1	

$$37b3 \xrightarrow{-3} 37b1 \xrightarrow{-3} 37b2$$

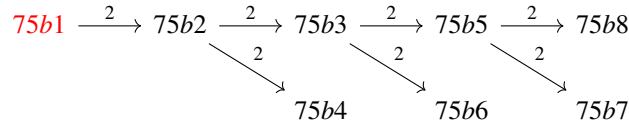
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
38b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
38b2	10	1	5,1	5,1	

$$38b1 \xrightarrow{-5} 38b2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
49a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
49a2	2	1	2,1	2,1	
49a3	7	1	7,1	7,1	
49a4	14	1	14,1	14,1	



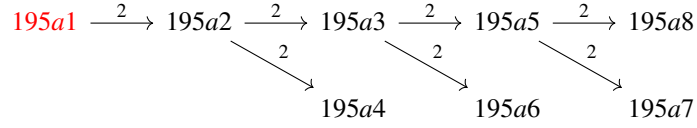
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
75b1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
75b2	12	1	2,1	2,1	
75b4	24	1	4,1	4,1	
75b3	24	1	4,1	4,1	
75b6	48	1	8,1	8,1	
75b5	48	1	8,1	8,1	
75b8	96	1	16,1	16,1	
75b7	96	1	16,1	16,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
121a1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
121a2	66	1	11,1	11,1	

$$121a1 \xrightarrow{-11} 121a2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
195a1	24	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
195a2	48	1	2,1	2,1	
195a4	96	1	4,1	4,1	
195a3	96	1	4,1	4,1	
195a6	192	1	8,1	8,1	
195a5	192	1	8,1	8,1	
195a8	384	1	16,1	16,1	
195a7	384	1	16,1	16,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
208d1	48	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
208d2	336	1	7,1	7,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$208d1 \xrightarrow{7} 208d2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
294a1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
294a2	588	1	7,1	7,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$294a1 \xrightarrow{7} 294a2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
361a1	20	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
361a2	380	1	19,1	19,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$361a1 \xrightarrow{19} 361a2$$

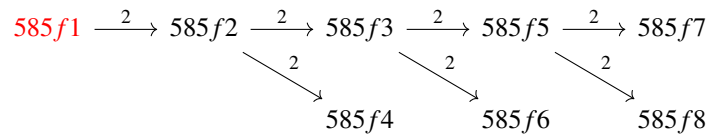
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
464e1	60	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
464e2	120	2	1,1/2	2,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$464e2 \xrightarrow{2} 464e1$$

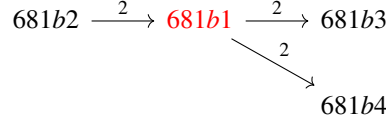
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
507a1	312	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
507a2	2184	1	7,1	7,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$507a1 \xrightarrow{7} 507a2$$

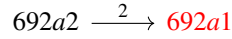
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
585f1	192	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
585f2	384	1	2,1	2,1	
585f3	768	1	4,1	4,1	
585f5	1536	1	8,1	8,1	
585f7	3072	1	16,1	16,1	
585f8	3072	1	16,1	16,1	
585f6	1536	1	8,1	8,1	
585f4	768	1	4,1	4,1	



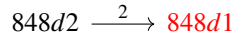
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
681b1	375	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
681b3	750	1	2,1	2,1	
681b4	750	1	2,1	2,1	
681b2	750	2	1,1/2	2,1	



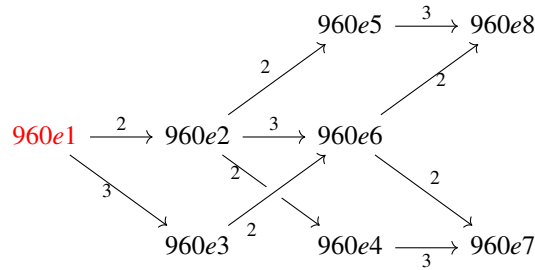
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
692a1	123	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
692a2	246	2	1,1/2	2,1	



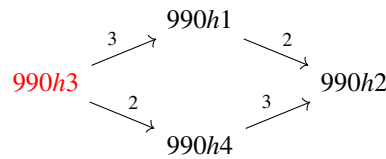
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
848d1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
848d2	168	2	1,1/2	2,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
960e1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
960e2	768	1	2,1	2,1	
960e5	1536	1	4,1	4,1	
960e4	1536	1	4,1	4,1	
960e3	1152	1	3,1	3,1	
960e6	2304	1	6,1	6,1	
960e8	4608	1	12,1	12,1	
960e7	4608	1	12,1	12,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
990h3	1728	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
990h1	5184	1	3,1	3,1	
990h4	3456	1	2,1	2,1	
990h2	10368	1	6,1	6,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
1089e1	120	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1089e2	1320	1	11,1	11,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$1089e1 \xrightarrow{11} 1089e2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
1225e1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 37 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1225e2	62160	1	37,1	37,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$1225e1 \xrightarrow{37} 1225e2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
1849a1	264	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1849a2	11352	1	43,1	43,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$1849a1 \xrightarrow{43} 1849a2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
1913b1	309	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
1913b2	618	2	1,1/2	2,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$1913b2 \xrightarrow{2} 1913b1$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
1936k1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1936k2	4224	1	11,1	11,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$1936k1 \xrightarrow{11} 1936k2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2089b1	219	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2089b2	438	2	1,1/2	2,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$2089b2 \xrightarrow{2} 2089b1$$

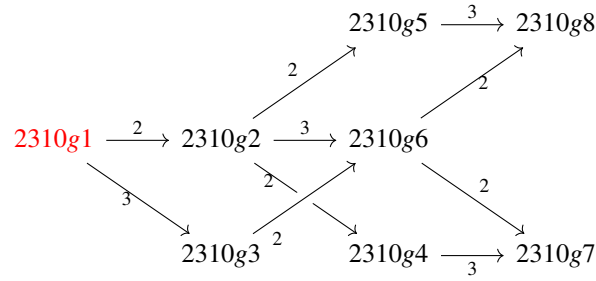
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2145e1	19968	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2145e2	39936	1	2,1	2,1	
2145e4	79872	1	4,1	4,1	
2145e3	79872	1	4,1	4,1	
2145e6	159744	1	8,1	8,1	
2145e5	159744	1	8,1	8,1	
2145e8	319488	1	16,1	16,1	
2145e7	319488	1	16,1	16,1	

$$\begin{array}{ccccccc}
2145e1 & \xrightarrow{2} & 2145e2 & \xrightarrow{2} & 2145e3 & \xrightarrow{2} & 2145e5 & \xrightarrow{2} & 2145e8 \\
& & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
& & & & 2145e4 & & 2145e6 & & 2145e7
\end{array}$$

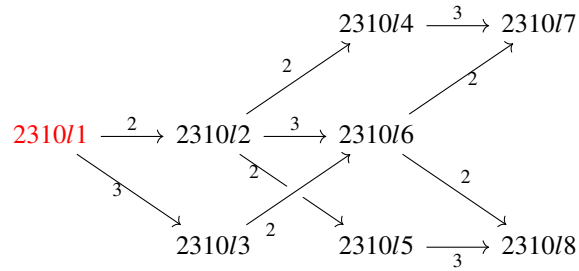
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2273a1	392	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2273a2	784	2	1,1/2	2,1	

$$2273a2 \xrightarrow{2} 2273a1$$

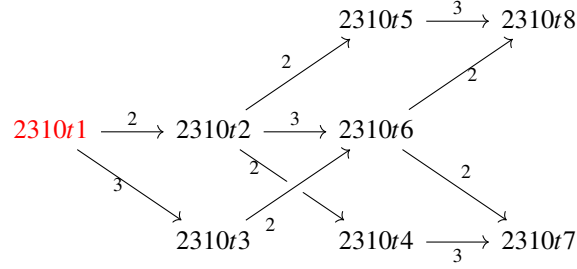
	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2310g1	13824	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310g2	27648	1	2,1	2,1	
2310g5	55296	1	4,1	4,1	
2310g4	55296	1	4,1	4,1	
2310g3	41472	1	3,1	3,1	
2310g6	82944	1	6,1	6,1	
2310g8	165888	1	12,1	12,1	
2310g7	165888	1	12,1	12,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2310l1	2304	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310l2	4608	1	2,1	2,1	
2310l4	9216	1	4,1	4,1	
2310l5	9216	1	4,1	4,1	
2310l3	6912	1	3,1	3,1	
2310l6	13824	1	6,1	6,1	
2310l7	27648	1	12,1	12,1	
2310l8	27648	1	12,1	12,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2310t1	3456	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310t2	6912	1	2,1	2,1	
2310t5	13824	1	4,1	4,1	
2310t4	13824	1	4,1	4,1	
2310t3	10368	1	3,1	3,1	
2310t6	20736	1	6,1	6,1	
2310t8	41472	1	12,1	12,1	
2310t7	41472	1	12,1	12,1	



	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
2352j1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2352j2	21840	1	13,1	13,1	

$$2352j1 \xrightarrow{13} 2352j2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
3249a1	640	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3249a2	12160	1	19,1	19,1	

$$3249a1 \xrightarrow{19} 3249a2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
4489a1	1292	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 67 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4489a2	86564	1	67,1	67,1	

$$4489a1 \xrightarrow{67} 4489a2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
14450p1	12240	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
14450p2	208080	1	17,1	17,1	

$$14450p1 \xrightarrow{17} 14450p2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
16641e1	8448	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
16641e2	363264	1	43,1	43,1	

$$16641e1 \xrightarrow{43} 16641e2$$

	deg	c_E	$[L_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E, \mathbb{Z}) : \pi^* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})]$	Matrice
26569a1	59368	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 163 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26569a2	9676984	1	163,1	163,1	

$$26569a1 \xrightarrow{163} 26569a2$$

Références

- [1] François Brunault, *Graphes d'isogénies entre courbes elliptiques*, <http://perso.ens-lyon.fr/francois.brunault/parigp>
- [2] John Cremona, *Computing the degree of the modular parametrization of a modular elliptic curve*, Mathematics of computation volume 64, number 211 (1995), p. 1235-1250.
- [3] John Cremona, *Appendice à l'article de Amod Agashe, Kenneth Ribet et William A. Stein, The Manin Constant*, Pure and Applied Mathematics Quarterly Volume 2, Number 2 (Special Issue : In honor of John H. Coates, Part 2 of 2) 617-636, 2006.
- [4] Ju. I. Manin, *Parabolic points and zeta-functions of modular curves*, Math. USSR Izvestija, vol 6 (1972), No 1, 19-64.
- [5] Barry Mazur, *Courbes elliptiques et symboles modulaires*. Séminaire Bourbaki 14 (1971-1972), p.277-294. <http://eudml.org/doc/109817>
- [6] Barry Mazur, *Rational Isogenies of Prime Degree*, Inventiones mathematicae, June 1978, Volume 44, Issue 2, pp 129-162
- [7] The PARI Group, PARI/GP version 2.10.0, Univ. Bordeaux, 2018, <http://pari.math.u-bordeaux.fr>
- [8] Robert Pollack, Glenn Stevens, *Overconvergent modular symbols and p -adic L -functions*, Annales scientifiques de l'ENS 44, fascicule 1 (2011), 1-42.
- [9] Glenn Stevens, *Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves*, Invent. Math. 98 (1989), no. 1, 75-106
- [10] Goro Shimura, *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes*, Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 11, No. 4, October, 1959
- [11] W. Stein and M. Watkins, *A Data-base of Elliptic Curves- First Report*, In Algorithmic Number Theory (Sydney, 2002), pp. 267-275, Lecture Notes in Comput. Sci. 2369. Berlin : Springer-Verlag, 2002.