HAL open science

La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou

To cite this version:

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou. La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique. Publications Mathématiques de Besançon. Algèbre et Théorie des Nombres, 2019, 2, p. 81-103. 10.5802/pmb.37 . hal-01766202v3

HAL Id: hal-01766202

https://hal.science/hal-01766202v3

Submitted on 8 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La constante de Manin et le degré modulaire d'une courbe elliptique

Karim Belabas*, Dominique Bernardi** et Bernadette Perrin-Riou***

*Univ. Bordeaux, CNRS, INRIA, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France
**10 rue de la montagne Sainte Geneviève, F-75005 Paris, France
***Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay, France.

8 septembre 2019

Abstract

We revisit the calculation of the strong Weil curve in an isogeny class of elliptic curves over $\mathbb{Q}$, of the Manin constant and modular degree of an elliptic curve, using modular symbols as defined in [10], now implemented in Pari/GP.

Résumé

On donne une méthode de calcul de la courbe de Weil forte d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ et de la constante de Manin en utilisant les symboles modulaires de Pollack-Stevens.

keywords=elliptic curve, modular curve, Weil curve, modular symbol
Manin constant and modular degree of an elliptic curve
AMS Classification : 11Y40 11G05

Dans cet article, nous revisitons les procédures de calcul de la courbe de Weil forte d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, de la constante de Manin et du degré modulaire d'une courbe elliptique en utilisant les symboles modulaires tels qu'ils sont décrits dans [10] et désormais implémentés dans Pari/GP.

Le troisième auteur (en particulier) remercie chaleureusement Bill Allombert pour l'avoir lancée sur cette question, ce qui l'a obligée à relire les articles fondateurs des années 1970. Nous remercions aussi le rapporteur pour toutes ses remarques.

Les calculs présentés à la fin de cet article ont été réalisés sur la plateforme PLAFRIM, portée par l'action de développement INRIA PlaFRIM avec le soutien de l'IMB, du LaBRI et d'autres entités : Conseil Régional d'Aquitaine, FeDER, Université de Bordeaux et CNRS (voir `https://www.plafrim.fr/en/home/`).

Table des matières

1 Rappels sur les constantes de Manin et le degré modulaire **1**

2 Espace des symboles modulaires **2**
2.1 Lien entre l'espace des symboles modulaires et les cohomologies 2
2.2 Structure entière de l'espace des symboles modulaires 3

3 Espaces associés à une forme modulaire et à une courbe elliptique **3**
3.1 Structure rationnelle 3
3.2 Structure entière $\mathcal{L}_f$ associée à une forme modulaire propre 4
3.3 Quelques bases particulières de l'homologie de E 4
3.4 Structure entière $\mathcal{L}_E$ associée à une courbe elliptique 5
3.5 Calcul de $\mathcal{L}_E$ 6

4 Conséquences **7**
4.1 Critère de calcul de la courbe de Weil forte et de sa constante de Manin 7
4.2 Graphe orienté des isogénies admissibles 7
4.3 Degré modulaire et constante de Manin 8

A Programmes **8**

B Quelques exemples **10**

1 Rappels sur les constantes de Manin et le degré modulaire

Reprenons quelques définitions et énoncés de [7].

Définition 1.1. Une *paramétrisation modulaire* π d'une courbe elliptique $E/\mathbb{Q}$ de conducteur N est un morphisme non constant $\pi_{\text{mod}} : X_0(N) \to E$ défini sur $\mathbb{Q}$ tel que l'image de ∞ est 0 et tel que si ω est une forme différentielle invariante non nulle de E sur $\mathbb{Q}$, l'image réciproque $\pi^*\omega$ sur $X_0(N)$ vue comme une forme modulaire parabolique est de niveau exactement N. Autrement dit, il existe un rationnel c non nul et une forme f modulaire parabolique primitive de niveau N (vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke de niveau N et normalisée par $a_1(f) = 1$) tels que $\pi^*_{\text{mod}}\omega = c\omega_f$ avec $\omega_f = 2i\pi f(z)dz \in (1 + q\mathbb{Z}[[q]])\, dq$ pour $q = \exp(2i\pi z)$.

Définition 1.2.
— Une *paramétrisation minimale* de E est une paramétrisation modulaire de E de degré minimal. Elle est unique au signe près.
— Le *degré modulaire* $\deg(E)$ de E est le degré d'une paramétrisation minimale de E.
— Soit ω_E une forme différentielle de Néron de E. La *constante de Manin* de E est le rationnel $c_E > 0$ tel que $\pi^*_{\text{min},E}\omega_E = c_E\omega_f$ pour une paramétrisation minimale $\pi_{\text{min},E}$ de E.

Soit $\mathcal{E}$ une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. Il existe une unique courbe E_1 dans $\mathcal{E}$ et une unique paramétrisation modulaire $\pi_1 : X_0(N) \to E_1$ (à isomorphisme près) telle que toute paramétrisation modulaire $\pi : X_0(N) \to E$ pour $E \in \mathcal{E}$ se factorise par π_1.

$$\begin{tikzcd} X_0(N) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & E_1 \arrow[d] \\ & E \end{tikzcd}$$

Le degré de $\pi_1 : X_0(N) \to E_1$ est minimal parmi les degrés des paramétrisations modulaires des courbes elliptiques de la classe d'isogénie $\mathcal{E}$. Si f est la forme modulaire parabolique associée à $\mathcal{E}$, la courbe E_1 est la *courbe de Weil forte associée à* f. La conjecture de Manin affirme que $c_{E_1} = 1$. Il est démontré dans [5] que c_{E_1} est un entier. On en déduit que c_E est toujours un entier (voir par exemple, l'algorithme 1).

On construit la courbe de Weil forte de la manière suivante. Soit $\pi' : X_0(N) \to E'$ une paramétrisation modulaire de E' dans la classe d'isogénie $\mathcal{E}$. Par passage à la jacobienne, on en déduit un homomorphisme de variétés abéliennes $\pi : J_0(N) \to E'$. Soit A le noyau de π. La composante connexe A^0 de l'élément neutre dans A est une variété abélienne qui ne dépend pas de la paramétrisation π', $E_1 = J_0(N)/A^0$ est une courbe elliptique et on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_0(N) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi'"'] & J_0(N)/A^0 = E_1 \arrow[d] \\ & E' \end{tikzcd}$$

Lemme 1.3. *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ et $\pi : X_0(N) \to E$ une paramétrisation modulaire minimale de E. Alors, E est une courbe elliptique de Weil forte si et seulement si $\pi_* : H_1(X_0(N), \mathbb{Z}) \to H_1(E, \mathbb{Z})$ est surjective.*

Démonstration. Voir lemme 3, § 4 de [7]. □

2 Espace des symboles modulaires

2.1 Lien entre l'espace des symboles modulaires et les cohomologies

Soit $\Delta = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]$ le groupe des diviseurs sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et Δ_0 le sous-module des diviseurs de degré 0. Les éléments de Δ_0 peuvent être vus comme des combinaisons linéaires dans $\mathbb{Z}$ de chemins (a,b) pour a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Les modules Δ et Δ_0 sont munis d'une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ et donc de $\Gamma = \Gamma_0(N)$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(\Delta,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(\Delta_0,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\Delta,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\Delta_0,\mathbb{Q})$$

ou en explicitant

$$0 \to \mathbb{Q} \to \oplus_{s\in C(\Gamma)} H^0(\Gamma_s,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(\Delta_0,\mathbb{Q}) \to H^1(\Gamma,\mathbb{Q}) \to \oplus_{s\in C(\Gamma)} H^1(\Gamma_s,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\Delta_0,\mathbb{Q}) \tag{1}$$

où $C(\Gamma)$ est un système de représentants de $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et Γ_s le stabilisateur de s dans Γ. L'application $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Delta_0,\mathbb{Q}) \to H^1(\Gamma,\mathbb{Q})$ est donnée par $\Phi \mapsto \Big(\gamma \mapsto \Phi\big((0,\gamma^{-1}0)\big)\Big)$. La formule des coefficients universels en cohomologie implique la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_0(X_0(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^1(X_0(N),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_1(X_0(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0$$

On en déduit que

$$H^1(X_0(N),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X_0(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

Rappelons les résultats de Manin ([6]). Si a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sont équivalents modulo $\Gamma_0(N)$, l'image de l'arc géodésique (a,b) joignant a à b dans $\mathcal{H}$ définit un élément de $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$. De plus, si $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, les éléments de la forme (a,b) avec b équivalent à a modulo $\Gamma_0(N)$ engendrent $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ ([6], proposition 1.4). On peut prolonger cette application aux arcs géodésiques de la forme (a,b) avec a et b dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ à condition d'étendre les valeurs à $H_1(X_0(N),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\otimes H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ (théorème de Manin-Drinfeld, Note en bas de page du théorème 3.5 de [6]). On en déduit une application linéaire surjective

$$\Delta_0 \to H_1(X_0(N),\mathbb{Q})$$

et par dualité un homomorphisme injectif

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Delta_0,\mathbb{Q})$$

à valeurs dans les invariants par $\Gamma_0(N)$, donc un homomorphisme injectif

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})\ .$$

Lemme 2.1. *L'image de* $\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q})$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})$ *est d'intersection nulle avec l'image de* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$.

Démonstration. Soit $h \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q})$ et $h_1 \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$ ayant la même image H. Si c est un lacet basé en $x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et évitant les pointes sauf aux extrémités, son relèvement dans $\mathcal{H}$ joint x_0 à $\gamma^{-1}x_0$ pour un γ dans $\Gamma_0(N)$. Donc, $H(c) = h\big((x_0,\gamma^{-1}x_0)\big) = h_1([\gamma^{-1}x_0]) - h_1([x_0]) = 0$ puisque h_1 est invariant par $\Gamma_0(N)$. □

L'espace vectoriel $H^1(X_0(N),\mathbb{Q})$ est de dimension 2 fois le genre de $X_0(N)$. Il en est de même pour

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})\ .$$

En effet, la suite exacte (1) induit un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$ et la cohomologie parabolique $H^1_{par}(\Gamma_0(N),\mathbb{Q})$ qui est de dimension 2 fois le genre de $X_0(N)$ (d'après Eichler, voir par exemple [11], Theorem 1).

On en déduit les isomorphismes

$$H^1(X_0(N),\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})\ .$$

2.2 Structure entière de l'espace des symboles modulaires

Remarquons que le $\mathbb{Z}$-module $H^1(\Gamma_0(N),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma_0(N),\mathbb{Z})$ s'injecte dans $H^1(\Gamma_0(N),\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\Gamma_0(N),\mathbb{Q})$. On note

— W_{par} le supplémentaire de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})$ stable par l'algèbre de Hecke ;

— $\mathcal{W} \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$ et $\mathcal{W}_{par} \subset W_{par}$ les sous-$\mathbb{Z}$-modules formés des éléments dont l'image dans $H^1(\Gamma_0(N),\mathbb{Q})$ appartient à l'image de $H^1(\Gamma_0(N),\mathbb{Z})$ dans $H^1(\Gamma_0(N),\mathbb{Q})$.

Lemme 2.2. *Le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathcal{W}$ de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})$ (resp. $\mathcal{W}_{par}$ de W_{par}) est de type fini et de rang maximal.*

Pour une démonstration analogue, voir par exemple [11], Proposition 1.

3 Espaces associés à une forme modulaire et à une courbe elliptique

3.1 Structure rationnelle

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ de niveau N, f la forme modulaire parabolique normalisée de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ qui lui est associée et $\pi : X_0(N) \to E$ une paramétrisation modulaire de E.

Soit V_f le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})$ associé obtenu par décomposition par les opérateurs de Hecke . Autrement dit, V_f est l'ensemble des éléments v de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})$ tel que $(T(n) - a_n(f))v = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Il est en fait contenu dans W_{par}.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(E,\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^1(X_0(N),\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(E,\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0(N),\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"'] \\
V_f \arrow[r] & W_{par} \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})/\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de voir V_f comme un sous-espace de $H^1(X_0(N),\mathbb{Q})$.

3.2 Structure entière $\mathcal{L}_f$ associée à une forme modulaire propre

Soit $\mathcal{L}_f$ le $\mathbb{Z}$-sous-module de V_f défini par $\mathcal{L}_f = \mathcal{W} \cap V_f$. C'est donc l'ensemble des éléments Φ de V_f tels que $\Phi\big((0,\gamma^{-1}0)\big) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$. C'est aussi $H^1(X_0(N),\mathbb{Z}) \cap V_f$ (ici, on voit simplement $H^1(X_0(N),\mathbb{Z})$ comme le dual sur $\mathbb{Z}$ de $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$).

3.3 Quelques bases particulières de l'homologie de E

Plusieurs bases de $H_1(E,\mathbb{Z})$ sont construites. La première est définie à l'aide des sous-espaces propres pour la conjugaison complexe sur $E(\mathbb{C})$ dans un modèle minimal de Weierstrass, la seconde est liée à la paramétrisation modulaire de E.

3.3.1 Réseau associé à un modèle minimal

Faisons quelques rappels sur les périodes complexes de E. On note c_∞ le nombre de composantes connexes de $E(\mathbb{R})$. Soit Λ_E le réseau des périodes de E dans un modèle minimal, autrement dit le sous-$\mathbb{Z}$-module de rang 2 de $\mathbb{C}$

formé des nombres $\int_c \omega_E$ pour $c \in H_1(E,\mathbb{Z})$. Soient $\Omega_E^+ \in \mathbb{R}^+$ et $\Omega_E^- \in i\mathbb{R}^+$ tels que $\mathbb{Z}\Omega_E^+ = \Lambda_E \cap \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\Omega_E^- = \Lambda_E \cap i\mathbb{R}$; on note $\Omega_1 = \Omega_E^+$ et [1]

$$\Omega_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Omega_E^+ + \Omega_E^-) & \text{si } c_\infty = 1, \\ \Omega_E^- & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

On a $\Lambda_E = \mathbb{Z}\Omega_1 \oplus \mathbb{Z}\Omega_2$ et $-i\Omega_E^+\Omega_E^- = \frac{2}{c_\infty}\mathrm{Aire}(\Lambda_E)$. Notons δ_+, δ_-, δ_1 et δ_2 les éléments de $H_1(E,\mathbb{Z})$ tels que

$$\int_{\delta_+} \omega_E = \Omega_E^+, \quad \int_{\delta_-} \omega_E = \Omega_E^-, \quad \int_{\delta_1} \omega_E = \Omega_1, \quad \text{et} \quad \int_{\delta_2} \omega_E = \Omega_2.$$

Bien sûr, $\delta_1 = \delta_+$ et

$$\frac{2}{c_\infty}\delta_2 = \begin{cases} \delta_- + \delta_+ & \text{si } c_\infty = 1, \\ \delta_- & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

La famille (δ_1, δ_2) est une base de $H_1(E,\mathbb{Z})$. On note (δ_1^*, δ_2^*) sa base duale dans $H^1(E,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(E,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. De même, on note (δ_+^*, δ_-^*) la base duale de (δ_+, δ_-) dans $H^1(E,\mathbb{Q})$. Explicitement, on a

$$\delta_2^* = \frac{2}{c_\infty}\delta_-^* \quad \text{et} \quad \delta_1^* = \begin{cases} \delta_+^* - \delta_-^* & \text{si } c_\infty = 1, \\ \delta_+^* & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

On en déduit l'action de la conjugaison complexe σ sur la base (δ_1^*, δ_2^*)

$$\sigma\delta_2^* = -\delta_2^* \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma\delta_1^* = \delta_1^* + \delta_2^* & \text{si } c_\infty = 1 \\ \sigma\delta_1^* = \delta_1^* & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

3.3.2 Réseau associé à la paramétrisation modulaire

Fixons une paramétrisation modulaire minimale $\pi : X_0(N) \to E$. On note $(n_{1,E}, n_{2,E})$ les diviseurs élémentaires de l'image $\pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ de $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ dans $H_1(E,\mathbb{Z})$: il existe une base (δ_1, δ_2) de $H_1(E,\mathbb{Z})$ et une base $(\pi_*(\beta_1), \pi_*(\beta_2))$ de $\pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ telles que

$$\begin{cases} \pi_*(\beta_1) & = n_{1,E} \cdot \delta_1, \\ \pi_*(\beta_2) & = n_{2,E} \cdot \delta_2, \end{cases}$$

et les deux entiers positifs $n_{1,E}$ et $n_{2,E}$, $n_{2,E} \mid n_{1,E}$, sont uniques.

3.4 Structure entière $\mathcal{L}_E$ associée à une courbe elliptique

Soit une base $\mathcal{B} = (\delta_1, \delta_2)$ de $H_1(E,\mathbb{Z})$. On note (δ_1^*, δ_2^*) la base de $H^1(E,\mathbb{Z})$ duale : on a donc pour $\delta \in H_1(E,\mathbb{Q})$

$$\delta = \delta_1^*(\delta) \cdot \delta_1 + \delta_2^*(\delta) \cdot \delta_2$$

et si $\omega \in H^0(E, \Omega_E^1)$

$$\int_\delta \omega = \delta_1^*(\delta) \int_{\delta_1} \omega + \delta_2^*(\delta) \int_{\delta_2} \omega.$$

En particulier, si ω_E est une forme différentielle de Néron de E, on a

$$\int_\delta \omega_E = \delta_1^*(\delta) \cdot \Omega_{E,1} + \delta_2^*(\delta) \cdot \Omega_{E,2}$$

1. La normalisation de $(\omega_1, \omega_2) =$ `E.omega` dans Pari/GP change le signe de Ω_E^- : on a $\omega_1 = \Omega_1$ et

$$\omega_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Omega_E^+ - \Omega_E^-) = \Omega_1 - \Omega_2 & \text{si } c_\infty = 1, \\ -\Omega_E^- = -\Omega_2 & \text{si } c_\infty = 2. \end{cases}$$

avec $\Omega_{E,i} = \int_{\delta_i} \omega_E$. Soient $\Phi^{\mathcal{B}}_{E,1}$, $\Phi^{\mathcal{B}}_{E,2}$ les éléments de V_f définis pour $\beta \in H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ par

$$\int_\beta \omega_f = \Phi^{\mathcal{B}}_{E,1}(\beta)\int_{\delta_1}\omega_E + \Phi^{\mathcal{B}}_{E,2}(\beta)\int_{\delta_2}\omega_E \tag{2}$$

(seule la f-composante intervient).

Définition 3.1. Le sous-$\mathbb{Z}$-module de V_f engendré par $\Phi^{\mathcal{B}}_{E,1}$ et $\Phi^{\mathcal{B}}_{E,2}$ ne dépend pas de la base choisie $\mathcal{B}$. On le note $\mathcal{L}_E$.

Lemme 3.2. *Les diviseurs élémentaires (au sens généralisé) de $\mathcal{L}_E$ dans $\mathcal{L}_f$ sont $(\frac{n_{1,E}}{c_E}, \frac{n_{2,E}}{c_E})$.*

Démonstration. Si $n \in \mathbb{Z}$, $\beta \in H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ et $\delta \in H_1(E,\mathbb{Z})$ sont tels que $n\cdot\delta = \pi_*(\beta)$, on a

$$n\int_\delta \omega_E = \int_{\pi_*\beta}\omega_E = \int_\beta \pi^*\omega_E = c_E\int_\beta \omega_f$$

puisque $\pi^*\omega_E = c_E\omega_f$. Lorsque $\mathcal{B} = (\delta_1,\delta_2)$ est une base de $H_1(E,\mathbb{Z})$ adaptée aux diviseurs élémentaires de l'image de $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ dans $H_1(E,\mathbb{Z})$ comme en 3.3.2, en appliquant cela à β_1 et β_2, l'équation (2) devient pour tout $\beta \in H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$

$$\int_\beta \omega_f = \frac{c_E}{n_{1,E}}\Phi^{\mathcal{B}}_{E,1}(\beta)\int_{\beta_1}\omega_f + \frac{c_E}{n_{2,E}}\Phi^{\mathcal{B}}_{E,2}(\beta)\int_{\beta_2}\omega_f.$$

Donc $\frac{c_E}{n_{1,E}}\Phi^{\mathcal{B}}_{E,1}, \frac{c_E}{n_{2,E}}\Phi^{\mathcal{B}}_{E,2}$ est par définition une base de $\mathcal{L}_f$. On en déduit le lemme. □

Remarquons que $c_E\mathcal{L}_E$ est contenu dans $\mathcal{L}_f$, mais que $\mathcal{L}_E$ ne l'est pas forcément, voir la courbe $11a3$, appendice B.

3.5 Calcul de $\mathcal{L}_E$

Le calcul de $\mathcal{L}_E$ est fait à partir de bases $\delta_\pm$ des espaces propres $H^1(E,\mathbb{Z})^\pm$ pour la conjugaison complexe sur $E(\mathbb{C})$. Rappelons que si ψ est un caractère de Dirichlet de conducteur D premier à N,

$$\tau(\psi)L(E,\overline{\psi},1) = \sum_{a \bmod D}\psi(a)\int_{\frac{a}{D}}^{\infty} 2i\pi f(z)dz$$

où $\tau(\psi) = \sum_{a \bmod D}\psi(a)e^{2i\pi a/D}$ est la somme de Gauss de ψ. Choisissons deux caractères de Dirichlet ψ_0 et ψ_1 de conducteurs respectifs D_0 et D_1, de signe $\psi_j(-1) = \varepsilon_j = (-1)^j$ et tels que $L(E,\overline{\psi_j},1)$ soit non nul pour $j = 0,1$ (on les choisira de conducteur minimal pour cette propriété [2]). Les conditions

$$\tau(\psi_j)L(E,\overline{\psi}_j,1) = \sum_{a \bmod D_j}\psi_j(a)\cdot\Phi^{(\delta_+,\delta_-)}_{E,\varepsilon_j}\big((a/D_j,\infty)\big)\int_{\delta_{\varepsilon_j}}\omega_E \tag{3}$$

pour $j = 0,1$ déterminent les symboles modulaires $\Phi^{(\delta_+,\delta_-)}_{E,\pm}$ dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V_f^\pm$ de dimension 1 de manière indépendante du choix des ψ_j : cela revient en effet à imposer les conditions

$$\int_{\beta_0}\omega_f = \Phi^{(\delta_+,\delta_-)}_{E,+}(\beta_0)\int_{\delta_+}\omega_E,$$

$$\int_{\beta_1}\omega_f = \Phi^{(\delta_+,\delta_-)}_{E,-}(\beta_1)\int_{\delta_-}\omega_E,$$

2. L'existence de tels caractères vient de ce que $V_f^\pm$ est non nul : le symbole modulaire $\Phi^{(\delta_+,\delta_-)}_{E,\pm}$ associé à E est non nul. D'après les formules (3), il n'est donc pas possible que tous les $L(E,\overline{\psi},1)$ soient tous nuls à signe fixé.

avec $\beta_j = \sum_{a \bmod D_j} \psi_j(a)\big((\frac{a}{D_j},\infty)\big)$. Par exemple, pour Ψ_0 trivial et $\beta_0 = (0,\infty)$, la formule devient

$$\frac{L(E,1)}{\Omega_E^+} = \Phi_{E,+}^{(\delta_+,\delta_-)}\big((0,\infty)\big).$$

Le réseau $\mathcal{L}_E$ de V_f associé à E est alors engendré par

$$\begin{cases} \Phi_{E,+}^{(\delta_+,\delta_-)} \quad \text{et} \quad \Phi_{E,-}^{(\delta_+,\delta_-)} & \text{si } c_\infty = 2 \\ \Phi_{E,+}^{(\delta_+,\delta_-)} - \Phi_{E,-}^{(\delta_+,\delta_-)} \quad \text{et} \quad 2\Phi_{E,-}^{(\delta_+,\delta_-)} & \text{si } c_\infty = 1 \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. Il est avantageux pour les calculs d'utiliser des caractères de Dirichlet de conducteur le plus petit possible. Il parait naturel d'utiliser un caractère quadratique mais ce n'est pas toujours possible ni optimal. Par exemple, soit la courbe $E = 1225e1$ de conducteur $N = 1225 = 35^2$. Le signe de l'équation fonctionnelle de E est 1. Montrons en utilisant Pari/GP [9] que le signe de l'équation fonctionnelle des twists de E par un caractère quadratique impair ψ est -1, ce qui impliquera que $L(E^{(\psi)},1) = 0$ pour tout D négatif. Pour D discriminant fondamental, on note $E^{(D)}$ le twist de E par le caractère quadratique $(D/.)$, $w(E)$ le signe de l'équation fonctionnelle de E. On a la formule bien connue $w(E^{(D)}) = \psi(-N)w(E)$ pour D premier à N, donc ici $w(E^{(D)}) = \psi(-1)w(E) = \text{signe}(D)w(E)$ pour $(D,35) = 1$.

```
? E = ellinit("1225e1");
? ellrootno(E)
%2 = 1

? E7 = ellinit(elltwist(E,-7)); ellidentify(E7)[1][1]
%3 = "1225g1"
? ellrootno(E7)
%4 = -1

? E5 = ellinit(elltwist(E,5)); ellidentify(E5)[1][1]
%5 = "1225f1"
? ellrootno(E5)
%6 = 1

? E35 = ellinit(elltwist(E,-35)); ellidentify(E35)[1][1]
%7 = "1225h1"
? ellrootno(E35)
%8 = -1
```

Ainsi, les twists de E par -7, 5, -35 sont encore de conducteur un carré.

— Si $D = -7m$ avec m premier à 35 et positif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(-7)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(-7)}) = w(E^{(-7)}) = -1.$$

— Si $D = 5m$ avec m premier à 35 et négatif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(5)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(5)}) = -w(E^{(5)}) = -1.$$

— Si $D = 35m$ avec m premier à 35 et positif,

$$w(E^{(D)}) = w(E^{(-35)^{(m)}}) = \text{signe}(m)w(E^{(-35)}) = w(E^{(-35)}) = -1.$$

Autrement dit, $L(E,\psi,1)$ est nul pour tous les caractères quadratiques impairs. On utilise alors pour le calcul de $\Phi_{E,-}^{(\delta_+,\delta_-)}$ un caractère de Dirichlet impair de conducteur 9 et d'ordre 6.

4 Conséquences

4.1 Critère de calcul de la courbe de Weil forte et de sa constante de Manin

Proposition 4.1. *1. La courbe E est une courbe de Weil forte si et seulement si les sous-$\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{L}_f$ et $\mathcal{L}_E$ de $V_f \subset W$ sont homothétiques.*

2. Si $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_f$, la courbe E est la courbe de Weil forte et la constante de Manin est égale à 1.

Démonstration. La courbe de Weil forte d'une classe d'isogénie sur $\mathbb{Q}$ de courbes elliptiques est la courbe elliptique telle que $\pi_* : H_1(X_0(N),\mathbb{Z}) \to H_1(E,\mathbb{Z})$ est surjective. Avec les notations précédentes, cela est le cas si et seulement $n_{1,E} = n_{2,E} = 1$. Les deux sous-$\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_f$ de V_f sont alors homothétiques. Réciproquement, notons E_1 la courbe de Weil forte (dont on sait qu'elle existe et vérifie que $\mathcal{L}_{E_1}$ est homothétique à $\mathcal{L}_f$) et α une isogénie de E sur E_1 de noyau cyclique. Les diviseurs élémentaires de $\mathcal{L}_{E_1}$ dans $\mathcal{L}_E$ sont alors $\deg(\alpha)$ et 1. Si l'on suppose ces deux réseaux homothétiques, α est un isomorphisme. Cela démontre la première partie.

Supposons maintenant que $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_f$. On a alors $n_{1,E} = n_{2,E} = c_E$. Mais il n'y a qu'une seule courbe de Weil forte à isomorphisme près. Donc, on a nécessairement $n_{1,E} = n_{2,E} = c_E = 1$. □

4.2 Graphe orienté des isogénies admissibles

Prenons une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. Le graphe des isogénies de degré premier peut être orienté de la manière suivante. Si $\pi : E \to E'$ est une isogénie de degré premier et π' l'isogénie duale, on a $\pi^*\omega_{E'} = \pm\omega_E$ ou $\pi'^*\omega_E = \pm\omega_{E'}$. L'arc entre E et E' est alors orienté comme $E \to E'$ si et seulement si $\pi^*\omega_{E'} = \pm\omega_E$ (appelé *admissible isogeny* dans [6], 6.11). Le calcul de ce graphe peut se faire par un calcul des modèles minimaux des courbes elliptiques de la classe d'isogénie et des réseaux des périodes complexes associés : $E \to E'$ est admissible si et seulement si $\mathcal{L}_{E'} \subset \mathcal{L}_E$.

4.3 Degré modulaire et constante de Manin

Soit E_1 une courbe de Weil forte et E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ dans sa classe d'isogénie. Une paramétrisation modulaire minimale $X_0(N) \to E$ est obtenue comme composé $X_0(N) \to E_1 \to E$ où $E_1 \to E$ est de degré minimal. Le degré modulaire de E est égal au produit du degré modulaire de E_1 par le degré de cette isogénie. D'autre part, le degré modulaire de la courbe de Weil forte E_1 se calcule par la formule [3]

$$4\pi^2||f||^2 = \deg(\pi_1)\mathrm{Aire}(E_1) = \frac{c_\infty}{2}\deg(\pi_1)|\Omega^+_{E_1}\Omega^-_{E_1}| \tag{4}$$

une fois qu'on a vérifié que la constante de Manin de E_1 est bien 1. On obtient l'algorithme suivant.

Algorithm 1 Degré modulaire et constante de Manin

Entrée: Une courbe elliptique E.
Sortie: Le degré modulaire $\deg(E)$ et la constante de Manin c_E.

1: On calcule la courbe de Weil forte E_1 dans la classe d'isogénie de E et on vérifie en même temps que $c_{E_1} = 1$. On calcule son degré modulaire d_1 (par exemple par `ellmoddegree` dans Pari/GP).
2: On calcule le graphe orienté des isogénies de degré premier de la classe d'isogénie. Si a est un arc, on note $\deg(a)$ le degré (premier) de l'isogénie.
3: On cherche le chemin le plus court de E_1 vers E dans le graphe non orienté associé.
4: $d \leftarrow d_1$; $c \leftarrow 1$;
5: **pour** a arc du chemin **faire**
6: $\quad d \leftarrow d \times \deg(a)$
7: $\quad$ **si** a est orienté négativement **alors**
8: $\quad\quad c \leftarrow c \times \deg(a)$
9: **retourner** d et c.

3. Si l'on désire rester dans le cadre algébrique, ce degré peut aussi être calculé à partir de la matrice de Gram sur une base de $\mathcal{L}_f$ du produit de Petersson algébrique (ou produit d'intersection) défini sur l'espace $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0,\mathbb{Q})$ (voir article à venir).

Le graphe orienté calculé a une source (courbe optimale de Stevens, conjecturalement courbe de Weil forte relativement à $X_1(N)$, [13]). Si la courbe de Weil forte est la source du graphe orienté que l'on a construit, la constante de Manin pour une courbe elliptique quelconque isogène est toujours 1.

Prenons le cas où $N = 11$. La courbe de Weil forte est "11a1". Le graphe orienté des isogénies de degré premier est

$$11a3 \xrightarrow{5} 11a1 \xrightarrow{5} 11a2$$

La courbe optimale au sens de Stevens est "11a3". On a

```
? ellmoddegree(ellinit("11a1"))
%1 = 1
```

A Programmes

Les espaces dont nous parlons dans ce texte ont été implantés dans le système PARI/GP [9]. Nous indiquons ci-après quelques unes des fonctions disponibles et renvoyons à la documentation pour des informations plus précises :

• `M = msinit(N,k)` : espace des symboles modulaires $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_k)$; cette fonction décrit en particulier la structure de $\Gamma_0(N)$-module de Δ_0 grâce aux algorithmes de Pollack et Stevens [10] et fixe une base de l'espace en termes de laquelle seront décrits tous les sous-espaces considérés plus loin. Elle calcule aussi les sous-espaces propres pour la conjugaison complexe.

• `S = mscuspidal(M)` : sous-espace parabolique W_{par} de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_k)$.

• `[M,xpm] = msfromell(E)` : $E/\mathbb{Q}$ étant une courbe elliptique de niveau N, retourne l'espace $M = \mathtt{msinit}(N,2)$ et le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_2)$ associé à E ; $\mathtt{xpm} = \left[\Phi_{E,+}^{(\delta_+,\delta_-)}, \Phi_{E,-}^{(\delta_+,\delta_-)}, \mathcal{L}_E\right]$ donne les deux symboles modulaires normalisés associés à E et le réseau $\mathcal{L}_E$.

• `msfromhecke` : définit le sous-espace $\cap_{p\in S}\mathrm{Ker}(T_p - a_p)$ de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_k)$ donné par certaines valeurs propres pour les opérateurs de Hecke, ainsi que les intersections avec les sous-espaces propres pour la conjugaison complexe. Cette fonction permet par exemple de calculer les sous-espaces $V_f^{\pm}$ de $W_{par} \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_k)$ associés à une forme parabolique propre f.

• `mslattice(M,S)` : $\mathbb{Z}$-structure sur le sous-espace S de $W_{par} \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(N)}(\Delta_0, V_k)$. Ainsi, pour `S = mscuspidal(M)`, on obtient $\mathcal{W}_{par}$.

• `[vE,M]= ellisotree(E)` : `vE` donne la liste des modèles minimaux pour E' dans la classe d'isogénie de $E/\mathbb{Q}$; M est la matrice du graphe orienté des isogénies de degré premier associé à la classe d'isogénie de E (dans l'ordre donné par `vE`).

• `ellmoddegree(E)` : quotient du degré modulaire de E par le carré de la constante de Manin $c(E)$.

• `[vE,vS] = ellweilcurve(E)` : liste `vE` des modèles minimaux pour E' comme ci-dessus et liste `vS` des invariants de Smith des $\mathcal{L}_{E'}$ dans $\mathcal{L}_f$ pour E' dans la classe d'isogénie de E (dans l'ordre donné par `vE`). Cette fonction appelle implicitement `msfromell`.

Les programmes suivants écrits en PARI/GP [9] permettent d'obtenir les tableaux de l'appendice B, qui indiquent pour quelques classes d'isogénies de petit niveau :

1. le label dans la base de Cremona [4] ;
2. le degré modulaire ;
3. les invariants généralisés de Smith de $\mathcal{L}_E$ dans $\mathcal{L}_f$;
4. les invariants de Smith de $\pi_* H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ dans $H_1(E, \mathbb{Z})$;
5. la matrice du graphe orienté de la classe d'isogénie.

La fonction `ellmanin` ci-dessous correspond à l'algorithme 1. Elle repose sur

— la fonction auxiliaire `dj` implantant l'algorithme de Dijkstra, qui détermine les plus courts chemins dans un graphe donné par une matrice d'adjacence ;

— les fonctions `ellisotree`, `ellweilcurve` et `ellmoddegree` vues plus haut ; nous utilisons `ellmoddegree` sur la courbe E_1 vérifiant $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{E_1}$ (les invariants de Smith sont $[1,1]$, ce qui prouve $c(E_1) = 1$ d'après le §4.1).

```
/* Plus court chemin entre x et y sur le graphe de matrice d'adjacence
 * A (symétrique); algorithme de Dijkstra. */
dj(A,x,y) =
{ my(C, m, v, w, n = #A);

  v = vector(n,i,n); v[x] = 0;
  w = vector(n);
  for (l=1, n-1, for (z=1, n,
    if (v[z] != l-1, next);
    for (t=1, n, if (A[z,t] && v[t]>l, v[t]=l; w[t]=z))));
  \\ v[t] = d(x,t), w[t] = dernier point sur le chemin
  m = v[y]+1; if (m > n, return([])); \\ non connectés
  C = vector(m);
  for (i=1, m, C[m+1-i] = y; y = w[y]);
  return(C);
}

/* label de Cremona de la courbe e */
cremona(e)= ellidentify(ellinit(e))[1][1];

ellmanin(e)=
{ my([Isog,A] = ellisotree(e));
  my([vE,vS] = ellweilcurve(e));
  my(i1, e1, d1, W = vector(#A));

  [i1] = [ i | i <- [1..#vS], vS[i]==[1,1] ]; \\ réseau d'invariant [1,1]
  e1 = ellinit(vE[i1]); \\ courbe de Weil forte
  A = A - mattranspose(A);
  d1 = ellmoddegree(e1);
  for(i = 1, #A,
    \\ calcule le degré modulaire d et la constante de Manin c de e
    my(d = d1, c = 1, C = dj(A, i1, i)); \\ plus court chemin entre i1 et i
    for (j=1, #C-1,
      my (t = A[C[j], C[j+1]], T = abs(t));
      d *= T; if (t < 0, c *= T));
    W[i] = [cremona(vE[i]), d, c, vS[i],c*vS[i]];
  );
  return([W,A])
};

? e = ellinit("17a1");
? [W,A] = ellmanin(e);
? A
%3 =
[0 -2  0 0]
[2  0 -2 2]
[0  2  0 0]
[0 -2  0 0]
? for(i = 1, #W, print(W[i]))
```

```
["17a1", 1, 1, [1, 1], [1, 1]]
["17a2", 2, 2, [1, 1/2], [2, 1]]
["17a4", 4, 4, [1, 1/4], [4, 1]]
["17a3", 4, 2, [2, 1/2], [4, 1]]
```

B Quelques exemples

Nous avons fait une sélection de quelques exemples. Ainsi, nous donnons des exemples de courbes elliptiques ayant beaucoup de courbes isogènes et pour chaque valeur possible de degré d'isogénie $(2,3,5,7,11,13,17,19,37,43,67,163$, voir [8]), La construction des graphes a été inspirée des programmes de F. Brunault ([1]). Nous renvoyons à [12], §4, pour une analyse de familles de courbes où la courbe optimale pour $X_0(N)$ n'est pas la source de l'arbre.

Le dernier exemple en niveau 130050 est un cas laissé ouvert par Cremona [4]. Il faut environ 26h de calcul pour confirmer que la courbe optimale est bien `130050em1`. Comme l'indique Cremona, une classe d'isogénie fixée dans l'intervalle couvert par ses tables (conducteur inférieur à 400000) peut être raisonablement certifiée en quelques jours par le calcul complet de l'espace des symboles modulaires comme nous l'avons fait ci-dessus. Quand le niveau N augmente, 100% du temps de calcul dans les programmes de l'appendice A est utilisé par la commande `msfromell` appelée par `ellweilcurve`, et qui doit calculer l'espace des symboles modulaires de poids 2 et niveau N puis le symbole normalisé attaché à la classe d'isogénie considérée. La complexité asymptotique de cette implantation est $\tilde{O}(N^{\log_2 7})$.

Les colonnes de la forme $[A:B]$ contiennent les diviseurs élémentaires au sens généralisé des quotients $[A/B]$. Remarquons que dans une classe d'isogénie, il n'y a en général pas de base de $\mathcal{L}_f$ qui soit adaptée à tous les $\mathcal{L}_E$.

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f:\mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}):\pi_*H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
11a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&0\\5&0&0\end{pmatrix}$
11a2	5	1	5,1	5,1	
11a3	5	5	1,1/5	5,1	

$$11a3 \xrightarrow{5} 11a1 \xrightarrow{5} 11a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f:\mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}):\pi_*H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
11a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&0\\5&0&0\end{pmatrix}$
11a2	5	1	5,1	5,1	
11a3	5	5	1,1/5	5,1	

$$11a3 \xrightarrow{5} 11a1 \xrightarrow{5} 11a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f:\mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}):\pi_*H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
14a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix}0&0&3&2&0&0\\3&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&3\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
14a4	3	3	1,1/3	3,1	
14a3	3	1	3,1	3,1	
14a2	2	1	2,1	2,1	
14a6	6	3	2,1/3	6,1	
14a5	6	1	6,1	6,1	

$$\begin{tikzcd}
14a4 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "2"] & 14a1 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "2"] & 14a3 \arrow[dr, "2"] & \\
& 14a6 \arrow[r, "3"] & 14a2 \arrow[r, "3"] & 14a5
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
14a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
14a4	3	3	1,1/3	3,1	
14a3	3	1	3,1	3,1	
14a2	2	1	2,1	2,1	
14a6	6	3	2,1/3	6,1	
14a5	6	1	6,1	6,1	

$$\begin{tikzcd}
14a4 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "2"] & 14a1 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "2"] & 14a3 \arrow[dr, "2"] & \\
& 14a6 \arrow[r, "3"] & 14a2 \arrow[r, "3"] & 14a5
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
15a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
15a3	2	2	1,1/2	2,1	
15a7	4	2	2,1/2	4,1	
15a8	4	4	1,1/4	4,1	
15a4	2	1	2,1	2,1	
15a2	2	1	2,1	2,1	
15a6	4	1	4,1	4,1	
15a5	4	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd}
15a8 \arrow[r, "2"] & 15a3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a6 \\
& & 15a7 & 15a4 & 15a5
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
15a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
15a3	2	2	1,1/2	2,1	
15a7	4	2	2,1/2	4,1	
15a8	4	4	1,1/4	4,1	
15a4	2	1	2,1	2,1	
15a2	2	1	2,1	2,1	
15a6	4	1	4,1	4,1	
15a5	4	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd}
15a8 \arrow[r, "2"] & 15a3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 15a6 \\
& & 15a7 & 15a4 & 15a5
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
17a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
17a2	2	2	1,1/2	2,1	
17a4	4	4	1,1/4	4,1	
17a3	4	2	2,1/2	4,1	

$$\begin{tikzcd}
17a4 \arrow[r, "2"] & 17a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 17a1 \\
& & 17a3
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
17a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
17a2	2	2	1,1/2	2,1	
17a4	4	4	1,1/4	4,1	
17a3	4	2	2,1/2	4,1	

$$\begin{tikzcd} 17a4 \arrow[r, "2"] & 17a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 17a1 \\ & & 17a3 \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
20a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
20a3	3	1	3,1	3,1	
20a2	2	2	1,1/2	2,1	
20a4	6	2	3,1/2	6,1	

$$\begin{tikzcd} & 20a1 \arrow[dr, "3"] & \\ 20a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"] & & 20a3 \\ & 20a4 \arrow[ur, "2"] & \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
20a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
20a3	3	1	3,1	3,1	
20a2	2	2	1,1/2	2,1	
20a4	6	2	3,1/2	6,1	

$$\begin{tikzcd} & 20a1 \arrow[dr, "3"] & \\ 20a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"] & & 20a3 \\ & 20a4 \arrow[ur, "2"] & \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
21a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
21a3	2	1	2,1	2,1	
21a4	2	2	1,1/2	2,1	
21a2	2	1	2,1	2,1	
21a6	4	1	4,1	4,1	
21a5	4	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd} 21a4 \arrow[r, "2"] & 21a1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 21a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 21a6 \\ & & 21a3 & 21a5 \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
21a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
21a3	2	1	2,1	2,1	
21a4	2	2	1,1/2	2,1	
21a2	2	1	2,1	2,1	
21a6	4	1	4,1	4,1	
21a5	4	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd} 21a4 \arrow[r, "2"] & 21a1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 21a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 21a6 \\ & & 21a3 & 21a5 \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
26b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26b2	14	1	7,1	7,1	

$$26b1 \xrightarrow{7} 26b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
26b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26b2	14	1	7,1	7,1	

$$26b1 \xrightarrow{7} 26b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
27a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
27a3	3	3	1,1/3	3,1	
27a4	9	3	3,1/3	9,1	
27a2	3	1	3,1	3,1	

$$\begin{tikzcd} 27a3 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "3"] & 27a1 \arrow[r, "3"] & 27a2 \\ & 27a4 & \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
27a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
27a3	3	3	1,1/3	3,1	
27a4	9	3	3,1/3	9,1	
27a2	3	1	3,1	3,1	

$$\begin{tikzcd} 27a3 \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "3"] & 27a1 \arrow[r, "3"] & 27a2 \\ & 27a4 & \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
30a1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
30a2	4	1	2,1	2,1	
30a5	8	1	4,1	4,1	
30a4	8	1	4,1	4,1	
30a3	6	1	3,1	3,1	
30a6	12	1	6,1	6,1	
30a8	24	1	12,1	12,1	
30a7	24	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 30a5 \arrow[r, "3"] & 30a8 \\
 & 30a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 30a6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
30a1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 30a3 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & 30a4 \arrow[r, "3"'] & 30a7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
30a1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
30a2	4	1	2,1	2,1	
30a5	8	1	4,1	4,1	
30a4	8	1	4,1	4,1	
30a3	6	1	3,1	3,1	
30a6	12	1	6,1	6,1	
30a8	24	1	12,1	12,1	
30a7	24	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 30a5 \arrow[r, "3"] & 30a8 \\
 & 30a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 30a6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
30a1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 30a3 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & 30a4 \arrow[r, "3"'] & 30a7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
32a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
32a2	2	2	1,1/2	2,1	
32a4	4	2	2,1/2	4,1	
32a3	4	2	2,1/2	4,1	

$$\begin{tikzcd}
 & 32a1 \\
32a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 32a4 \\
 & 32a3
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
32a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
32a2	2	2	1,1/2	2,1	
32a4	4	2	2,1/2	4,1	
32a3	4	2	2,1/2	4,1	

$$\begin{tikzcd}
 & 32a1 \\
32a2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"'] & 32a4 \\
 & 32a3
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
37b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
37b3	6	3	1,1/3	3,1	
37b2	6	1	3,1	3,1	

$$37b3 \xrightarrow{3} 37b1 \xrightarrow{3} 37b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
37b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
37b3	6	3	1,1/3	3,1	
37b2	6	1	3,1	3,1	

$$37b3 \xrightarrow{3} 37b1 \xrightarrow{3} 37b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
38b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
38b2	10	1	5,1	5,1	

$$38b1 \xrightarrow{5} 38b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
38b1	2	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
38b2	10	1	5,1	5,1	

$$38b1 \xrightarrow{5} 38b2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
49a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
49a2	2	1	2,1	2,1	
49a3	7	1	7,1	7,1	
49a4	14	1	14,1	14,1	

$$\begin{tikzcd}
 & 49a2 \arrow[dr, "7"] & \\
49a1 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "7"'] & & 49a4 \\
 & 49a3 \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
49a1	1	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
49a2	2	1	2,1	2,1	
49a3	7	1	7,1	7,1	
49a4	14	1	14,1	14,1	

$$\begin{tikzcd}
 & 49a2 \arrow[dr, "7"] & \\
49a1 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "7"'] & & 49a4 \\
 & 49a3 \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
75b1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
75b2	12	1	2,1	2,1	
75b4	24	1	4,1	4,1	
75b3	24	1	4,1	4,1	
75b6	48	1	8,1	8,1	
75b5	48	1	8,1	8,1	
75b8	96	1	16,1	16,1	
75b7	96	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
75b1 \arrow[r, "2"] & 75b2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b8 \\
 & & 75b4 & 75b6 & 75b7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
75b1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
75b2	12	1	2,1	2,1	
75b4	24	1	4,1	4,1	
75b3	24	1	4,1	4,1	
75b6	48	1	8,1	8,1	
75b5	48	1	8,1	8,1	
75b8	96	1	16,1	16,1	
75b7	96	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
75b1 \arrow[r, "2"] & 75b2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 75b8 \\
 & & 75b4 & 75b6 & 75b7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
121a1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
121a2	66	1	11,1	11,1	

$$121a1 \xrightarrow{11} 121a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
121a1	6	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
121a2	66	1	11,1	11,1	

$$121a1 \xrightarrow{11} 121a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
195a1	24	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
195a2	48	1	2,1	2,1	
195a4	96	1	4,1	4,1	
195a3	96	1	4,1	4,1	
195a6	192	1	8,1	8,1	
195a5	192	1	8,1	8,1	
195a8	384	1	16,1	16,1	
195a7	384	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
195a1 \arrow[r, "2"] & 195a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a8 \\
& & 195a4 & 195a6 & 195a7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
195a1	24	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
195a2	48	1	2,1	2,1	
195a4	96	1	4,1	4,1	
195a3	96	1	4,1	4,1	
195a6	192	1	8,1	8,1	
195a5	192	1	8,1	8,1	
195a8	384	1	16,1	16,1	
195a7	384	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
195a1 \arrow[r, "2"] & 195a2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 195a8 \\
& & 195a4 & 195a6 & 195a7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
208d1	48	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
208d2	336	1	7,1	7,1	

$$208d1 \xrightarrow{7} 208d2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
208d1	48	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
208d2	336	1	7,1	7,1	

$$208d1 \xrightarrow{7} 208d2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
294a1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
294a2	588	1	7,1	7,1	

$$294a1 \xrightarrow{7} 294a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
294a1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
294a2	588	1	7,1	7,1	

$$294a1 \xrightarrow{7} 294a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
361a1	20	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
361a2	380	1	19,1	19,1	

$$361a1 \xrightarrow{19} 361a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
361a1	20	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
361a2	380	1	19,1	19,1	

$$361a1 \xrightarrow{19} 361a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
464e1	60	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
464e2	120	2	1,1/2	2,1	

$$464e2 \xrightarrow{2} 464e1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
464e1	60	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
464e2	120	2	1,1/2	2,1	

$$464e2 \xrightarrow{2} 464e1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
507a1	312	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
507a2	2184	1	7,1	7,1	

$$507a1 \xrightarrow{7} 507a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
507a1	312	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
507a2	2184	1	7,1	7,1	

$$507a1 \xrightarrow{7} 507a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
585f1	192	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
585f2	384	1	2,1	2,1	
585f3	768	1	4,1	4,1	
585f5	1536	1	8,1	8,1	
585f7	3072	1	16,1	16,1	
585f8	3072	1	16,1	16,1	
585f6	1536	1	8,1	8,1	
585f4	768	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd}
585f1 \arrow[r, "2"] & 585f2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f7 \\
& & 585f4 & 585f6 & 585f8
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
585f1	192	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
585f2	384	1	2,1	2,1	
585f3	768	1	4,1	4,1	
585f5	1536	1	8,1	8,1	
585f7	3072	1	16,1	16,1	
585f8	3072	1	16,1	16,1	
585f6	1536	1	8,1	8,1	
585f4	768	1	4,1	4,1	

$$\begin{tikzcd}
585f1 \arrow[r, "2"] & 585f2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 585f7 \\
& & 585f4 & 585f6 & 585f8
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
681b1	375	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
681b3	750	1	2,1	2,1	
681b4	750	1	2,1	2,1	
681b2	750	2	1,1/2	2,1	

$$\begin{tikzcd}
681b2 \arrow[r, "2"] & 681b1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 681b3 \\
& & 681b4
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
681b1	375	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
681b3	750	1	2,1	2,1	
681b4	750	1	2,1	2,1	
681b2	750	2	1,1/2	2,1	

$$\begin{tikzcd}
681b2 \arrow[r, "2"] & 681b1 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 681b3 \\
& & 681b4
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
692a1	123	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
692a2	246	2	1,1/2	2,1	

$$692a2 \xrightarrow{2} 692a1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
692a1	123	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
692a2	246	2	1,1/2	2,1	

$$692a2 \xrightarrow{2} 692a1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
848d1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
848d2	168	2	1,1/2	2,1	

$$848d2 \xrightarrow{2} 848d1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
848d1	84	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
848d2	168	2	1,1/2	2,1	

$$848d2 \xrightarrow{2} 848d1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
960e1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
960e2	768	1	2,1	2,1	
960e5	1536	1	4,1	4,1	
960e4	1536	1	4,1	4,1	
960e3	1152	1	3,1	3,1	
960e6	2304	1	6,1	6,1	
960e8	4608	1	12,1	12,1	
960e7	4608	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 960e5 \arrow[r, "3"] & 960e8 \\
 & 960e2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 960e6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
960e1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 960e3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"] & 960e4 \arrow[r, "3"] & 960e7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
960e1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
960e2	768	1	2,1	2,1	
960e5	1536	1	4,1	4,1	
960e4	1536	1	4,1	4,1	
960e3	1152	1	3,1	3,1	
960e6	2304	1	6,1	6,1	
960e8	4608	1	12,1	12,1	
960e7	4608	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 960e5 \arrow[r, "3"] & 960e8 \\
 & 960e2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 960e6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
960e1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 960e3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"] & 960e4 \arrow[r, "3"] & 960e7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
990h3	1728	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
990h1	5184	1	3,1	3,1	
990h4	3456	1	2,1	2,1	
990h2	10368	1	6,1	6,1	

$$\begin{tikzcd}
 & 990h1 \arrow[dr, "2"] & \\
990h3 \arrow[ur, "3"] \arrow[dr, "2"] & & 990h2 \\
 & 990h4 \arrow[ur, "3"] &
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
990h3	1728	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
990h1	5184	1	3,1	3,1	
990h4	3456	1	2,1	2,1	
990h2	10368	1	6,1	6,1	

$$\begin{tikzcd} & 990h1 \arrow[dr, "2"] & \\ 990h3 \arrow[ur, "3"] \arrow[dr, "2"'] & & 990h2 \\ & 990h4 \arrow[ur, "3"'] & \end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1089e1	120	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1089e2	1320	1	11,1	11,1	

$$1089e1 \xrightarrow{11} 1089e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1089e1	120	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1089e2	1320	1	11,1	11,1	

$$1089e1 \xrightarrow{11} 1089e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1225e1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 37 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1225e2	62160	1	37,1	37,1	

$$1225e1 \xrightarrow{37} 1225e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1225e1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 37 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1225e2	62160	1	37,1	37,1	

$$1225e1 \xrightarrow{37} 1225e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1849a1	264	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1849a2	11352	1	43,1	43,1	

$$1849a1 \xrightarrow{43} 1849a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1849a1	264	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1849a2	11352	1	43,1	43,1	

$$1849a1 \xrightarrow{43} 1849a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1913b1	309	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
1913b2	618	2	1,1/2	2,1	

$$1913b2 \xrightarrow{2} 1913b1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1913b1	309	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
1913b2	618	2	1,1/2	2,1	

$$1913b2 \xrightarrow{2} 1913b1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1936k1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1936k2	4224	1	11,1	11,1	

$$1936k1 \xrightarrow{11} 1936k2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
1936k1	384	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1936k2	4224	1	11,1	11,1	

$$1936k1 \xrightarrow{11} 1936k2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2089b1	219	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2089b2	438	2	1,1/2	2,1	

$$2089b2 \xrightarrow{2} 2089b1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2089b1	219	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2089b2	438	2	1,1/2	2,1	

$$2089b2 \xrightarrow{2} 2089b1$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2145e1	19968	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2145e2	39936	1	2,1	2,1	
2145e4	79872	1	4,1	4,1	
2145e3	79872	1	4,1	4,1	
2145e6	159744	1	8,1	8,1	
2145e5	159744	1	8,1	8,1	
2145e8	319488	1	16,1	16,1	
2145e7	319488	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
2145e1 \arrow[r, "2"] & 2145e2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e8 \\
& & 2145e4 & 2145e6 & 2145e7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2145e1	19968	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2145e2	39936	1	2,1	2,1	
2145e4	79872	1	4,1	4,1	
2145e3	79872	1	4,1	4,1	
2145e6	159744	1	8,1	8,1	
2145e5	159744	1	8,1	8,1	
2145e8	319488	1	16,1	16,1	
2145e7	319488	1	16,1	16,1	

$$\begin{tikzcd}
2145e1 \arrow[r, "2"] & 2145e2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e3 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e5 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] & 2145e8 \\
 & & 2145e4 & 2145e6 & 2145e7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2273a1	392	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2273a2	784	2	1,1/2	2,1	

$$\begin{tikzcd}
2273a2 \arrow[r, "2"] & 2273a1
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2273a1	392	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2273a2	784	2	1,1/2	2,1	

$$\begin{tikzcd}
2273a2 \arrow[r, "2"] & 2273a1
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310g1	13824	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310g2	27648	1	2,1	2,1	
2310g5	55296	1	4,1	4,1	
2310g4	55296	1	4,1	4,1	
2310g3	41472	1	3,1	3,1	
2310g6	82944	1	6,1	6,1	
2310g8	165888	1	12,1	12,1	
2310g7	165888	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310g5 \arrow[r, "3"] & 2310g8 \\
 & 2310g2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g6 \arrow[ur, "2"] & \\
2310g1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"] & 2310g4 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310g1	13824	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310g2	27648	1	2,1	2,1	
2310g5	55296	1	4,1	4,1	
2310g4	55296	1	4,1	4,1	
2310g3	41472	1	3,1	3,1	
2310g6	82944	1	6,1	6,1	
2310g8	165888	1	12,1	12,1	
2310g7	165888	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310g5 \arrow[r, "3"] & 2310g8 \\
 & 2310g2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g6 \arrow[ur, "2"] & \\
2310g1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"] & 2310g4 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310g7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310l1	2304	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310l2	4608	1	2,1	2,1	
2310l4	9216	1	4,1	4,1	
2310l5	9216	1	4,1	4,1	
2310l3	6912	1	3,1	3,1	
2310l6	13824	1	6,1	6,1	
2310l7	27648	1	12,1	12,1	
2310l8	27648	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310l4 \arrow[r, "3"] & 2310l7 \\
 & 2310l2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310l6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
2310l1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"'] & 2310l3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"'] & 2310l5 \arrow[r, "3"'] & 2310l8
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310l1	2304	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310l2	4608	1	2,1	2,1	
2310l4	9216	1	4,1	4,1	
2310l5	9216	1	4,1	4,1	
2310l3	6912	1	3,1	3,1	
2310l6	13824	1	6,1	6,1	
2310l7	27648	1	12,1	12,1	
2310l8	27648	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310l4 \arrow[r, "3"] & 2310l7 \\
 & 2310l2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310l6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
2310l1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"'] & 2310l3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"'] & 2310l5 \arrow[r, "3"'] & 2310l8
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310t1	3456	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310t2	6912	1	2,1	2,1	
2310t5	13824	1	4,1	4,1	
2310t4	13824	1	4,1	4,1	
2310t3	10368	1	3,1	3,1	
2310t6	20736	1	6,1	6,1	
2310t8	41472	1	12,1	12,1	
2310t7	41472	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310t5 \arrow[r, "3"] & 2310t8 \\
 & 2310t2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310t6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
2310t1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"'] & 2310t3 \arrow[ur, "2"] \arrow[ur, "2"'] & 2310t4 \arrow[r, "3"'] & 2310t7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2310t1	3456	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2310t2	6912	1	2,1	2,1	
2310t5	13824	1	4,1	4,1	
2310t4	13824	1	4,1	4,1	
2310t3	10368	1	3,1	3,1	
2310t6	20736	1	6,1	6,1	
2310t8	41472	1	12,1	12,1	
2310t7	41472	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 2310t5 \arrow[r, "3"] & 2310t8 \\
 & 2310t2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310t6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
2310t1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 2310t3 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "2"] & 2310t4 \arrow[r, "3"'] & 2310t7
\end{tikzcd}$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2352j1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2352j2	21840	1	13,1	13,1	

$$2352j1 \xrightarrow{13} 2352j2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
2352j1	1680	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2352j2	21840	1	13,1	13,1	

$$2352j1 \xrightarrow{13} 2352j2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
3249a1	640	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3249a2	12160	1	19,1	19,1	

$$3249a1 \xrightarrow{19} 3249a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
3249a1	640	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3249a2	12160	1	19,1	19,1	

$$3249a1 \xrightarrow{19} 3249a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
4489a1	1292	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 67 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4489a2	86564	1	67,1	67,1	

$$4489a1 \xrightarrow{67} 4489a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
4489a1	1292	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 67 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4489a2	86564	1	67,1	67,1	

$$4489a1 \xrightarrow{67} 4489a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
14450p1	12240	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
14450p2	208080	1	17,1	17,1	

$$14450p1 \xrightarrow{17} 14450p2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
14450p1	12240	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
14450p2	208080	1	17,1	17,1	

$$14450p1 \xrightarrow{17} 14450p2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
16641e1	8448	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
16641e2	363264	1	43,1	43,1	

$$16641e1 \xrightarrow{43} 16641e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
16641e1	8448	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
16641e2	363264	1	43,1	43,1	

$$16641e1 \xrightarrow{43} 16641e2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
26569a1	59368	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 163 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26569a2	9676984	1	163,1	163,1	

$$26569a1 \xrightarrow{163} 26569a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
26569a1	59368	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 163 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
26569a2	9676984	1	163,1	163,1	

$$26569a1 \xrightarrow{163} 26569a2$$

	deg	c_E	$[\mathcal{L}_f : \mathcal{L}_E]$	$[H_1(E,\mathbb{Z}) : \pi_* H_1(X_0(N),\mathbb{Z})]$	Matrice
130050em1	1769472	1	1,1	1,1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
130050em2	3538944	1	2,1	2,1	
130050em4	7077888	1	4,1	4,1	
130050em5	7077888	1	4,1	4,1	
130050em3	5308416	1	3,1	3,1	
130050em6	10616832	1	6,1	6,1	
130050em7	21233664	1	12,1	12,1	
130050em8	21233664	1	12,1	12,1	

$$\begin{tikzcd}
 & & 130050em4 \arrow[r, "3"] & 130050em7 \\
 & 130050em2 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] \arrow[dr, "2"] & 130050em6 \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "2"] & \\
130050em1 \arrow[ur, "2"] \arrow[r, "3"] & 130050em3 \arrow[ur, "2"] & 130050em5 \arrow[r, "3"] & 130050em8
\end{tikzcd}$$

Références

[1] François Brunault, *Graphes d'isogénies entre courbes elliptiques*, http://perso.ens-lyon.fr/francois.brunault/parigp.

[2] John Cremona, *Computing the degree of the modular parametrization of a modular elliptic curve*, Mathematics of computation volume 64, number 211 (1995), pp. 1235-1250.

[3] John Cremona, *Appendice à l'article de Amod Agashe, Kenneth Ribet, William A. Stein, The Manin Constant*, Pure and Applied Mathematics Quarterly Volume 2, Number 2 (Special Issue : In honor of John H. Coates, Part 2 of 2) 617-636, 2006.

[4] John Cremona, *Elliptic curve data*, Optimality and the Manin constant, 2017, http://johncremona.github.io/ecdata.

[5] Bass Edixhoven, *On the Manin constants of modular elliptic curves*, Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 25-39.

[6] Yuri I. Manin, *Parabolic points and zeta-functions of modular curves*, Math. USSR Izvestija, vol 6 (1972), No 1, 19-64.

[7] Barry Mazur, *Courbes elliptiques et symboles modulaires.* Séminaire Bourbaki 14 (1971-1972), pp. 277-294, http://eudml.org/doc/109817.

[8] Barry Mazur, *Rational Isogenies of Prime Degree*, Inventiones mathematicae, June 1978, Volume 44, Issue 2, pp 129-162.

[9] The PARI Group, PARI/GP version 2.11.1, Univ. Bordeaux, 2018, http://pari.math.u-bordeaux.fr.

[10] Robert Pollack, Glenn Stevens, *Overconvergent modular symbols and p-adic L-functions*, Annales scientifiques de l'ENS 44, fascicule 1 (2011), 1-42.

[11] Goro Shimura, *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes*, Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 11, No. 4, October, 1959.

[12] William A. Stein and Mark Watkins, *A Data-base of Elliptic Curves- First Report*, In Algorithmic Number Theory (Sydney, 2002), pp. 267-275, Lecture Notes in Comput. Sci. 2369. Berlin : Springer-Verlag, 2002.

[13] Glenn Stevens, *Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves*, Invent. Math. 98 (1989), no. 1, 75-106.