



HAL
open science

Constructions cachées en algèbre abstraite. Dimension de Krull, Going Up, Going Down

Henri Lombardi, Thierry Coquand

► **To cite this version:**

Henri Lombardi, Thierry Coquand. Constructions cachées en algèbre abstraite. Dimension de Krull, Going Up, Going Down: version révisée d'un rapport technique de 2001. [Rapport de recherche] Université de Franche-Comté; Laboratoire de Mathématiques de Besançon. 2018. hal-01761862

HAL Id: hal-01761862

<https://hal.science/hal-01761862>

Submitted on 9 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Constructions cachées en algèbre abstraite

Dimension de Krull, Going Up, Going Down

Thierry Coquand (*) Henri Lombardi (†),

2018,

version révisée d'un rapport technique de 2001

Résumé

Nous rappelons des versions constructives de la théorie de la dimension de Krull dans les anneaux commutatifs et dans les treillis distributifs, dont les bases ont été posées par Joyal, Espanol et les deux auteurs. Nous montrons sur les exemples de la dimension des algèbres de présentation finie, du Going Up, du Going Down, . . . que cela nous permet de donner une version constructive de théorèmes classiques importants, et par conséquent de récupérer un contenu calculatoire explicite lorsque ces théorèmes abstraits sont utilisés pour démontrer l'existence d'objets concrets. Nous pensons ainsi mettre en oeuvre une réalisation partielle du programme de Hilbert pour l'algèbre abstraite classique.

MSC 2000 : 13C15, 03F65, 13A15, 13E05

Mots clés : Dimension de Krull, Going Up, Going Down, Mathématiques constructives.

Key words : Krull dimension, Going Up, Going Down, Constructive Mathematics.

Avertissement

Cet article, basé sur un rapport technique de 2001, peut être vu comme complétant le chapitre XIII du livre [CACM].

Le rapport technique de 2001, disponible en <https://arxiv.org/abs/1712.04728v1>, était une version préliminaire de l'article publié [3, Coquand & Lombardi, 2003] .

L'article publié [3] a de larges parties communes avec le rapport technique de 2001, mais chacun des deux contient des thèmes non traités dans l'autre.

Par rapport au texte de 2001, nous avons mieux organisé l'ensemble, corrigé quelques erreurs et fait le lien avec le livre [CACM] quand cela nous a semblé utile.

La théorie constructive de la dimension de Krull via la notion de bord, telle qu'elle est exposée dans [CACM] est apparue en 2005 dans l'article [4, Coquand, Lombardi, Roy]. Dans le rapport technique de 2001 comme dans la note présente on développe une approche antérieure basée sur [9, Joyal], [7, Espanol], [15, Lombardi] et [1, Cederquist, Coquand].

* Chalmers, University of Göteborg, Sweden, email : coquand@cse.gu.se

† Laboratoire de Mathématiques de Besançon, CNRS UMR 6623, UFR des Sciences et Techniques, Université Bourgogne Franche-Comté, 25030 BESANCON cedex, FRANCE, email : henri.lombardi@univ-fcomte.fr

Table des matières

1	Définition constructive de la dimension de Krull des anneaux commutatifs	6
1.1	Premiers idéaux	6
	Collapsus simultané et lemme de Krull	7
	Saturation	8
	Exemples de versions constructives de théorèmes classiques	9
1.2	Chaînes partiellement spécifiées d'idéaux premiers	10
1.3	Collapsus simultané et Nullstellensatz formel pour les chaînes idéales	11
	Collapsus simultané pour les chaînes idéales	11
1.4	Suites singulières et dimension de Krull	14
	Définition constructive de la dimension de Krull d'un anneau commutatif	14
	Dimension de Krull d'un anneau de polynômes sur un corps discret	15
1.5	Dimension de Krull et principe local-global	16
	Monoïdes comaximaux	16
	Caractère local de la dimension de Krull	17
	Exemple d'application	18
2	Treillis distributifs, relations implicatives et dimension de Krull	18
2.1	Treillis distributifs, idéaux et filtres	18
2.2	Treillis distributifs et relations implicatives	21
2.3	Idéaux premiers, premiers idéaux et spectre	22
2.4	Chaînes partiellement spécifiées d'idéaux premiers	25
2.5	Définition constructive de la dimension d'un treillis distributif	28
3	La Théorie de Joyal pour la dimension de Krull	29
3.1	Treillis de Krull associés à un treillis distributif	29
3.2	Comparaison des deux points de vue	31
3.3	Connections avec la définition de Joyal	33
3.4	Connections avec le travail d'Español	34
4	Treillis de Zariski et de Krull dans un anneau commutatif	36
4.1	Treillis de Zariski	36
	Idéaux et filtres de A et de $\text{Zar } A$	37
4.2	Treillis de Krull d'ordre ℓ	38
5	Dimension de Krull relative	39
5.1	Généralités sur la dimension de Krull relative	39
5.2	L'inégalité de base	41
5.3	Comparaison avec une autre approche constructive dans le cas des anneaux commutatifs	43
5.4	Cas des extensions entières d'anneaux commutatifs	43
5.5	Dimension de Krull relative des anneaux de polynômes	44
6	Going Up et Going Down	45
6.1	Généralités	45
	Relèvement des idéaux premiers (lying over)	45
	Montée (going up)	46
	Going down	48
	Incomparabilité	48
6.2	Cas des anneaux commutatifs	49
	Lying over	49
	Going Up	49

Going Down	50
Bibliographie	50
Annexe : Complétude, compacité, LLPO et théories géométriques	53
A.1 Théories propositionnelles et modèles	53
A.2 Le théorème de complétude	53
A.3 Le théorème de compacité	53
A.4 LPO et LLPO	54
A.5 Théories géométriques	55
A.6 Théories dynamiques	55

Introduction

Nous rappelons des versions constructives de la théorie de la dimension de Krull dans les anneaux commutatifs et dans les treillis distributifs, dont les bases ont été posées par Joyal, Espanõl, et les deux auteurs ([1, 7, 10, 15]). Nous montrons sur les exemples du Going Up, du Going Down, de la dimension des variétés algébriques, que cela nous permet de donner une version constructive des grands théorèmes classiques, et surtout de récupérer un contenu calculatoire explicite lorsque ces théorèmes abstraits sont utilisés pour démontrer l'existence d'objets concrets. Nous pensons ainsi mettre en oeuvre une réalisation partielle du programme de Hilbert pour l'algèbre abstraite classique.

Notre exposé est dans le style des mathématiques constructives à la Bishop (cf. en algèbre [MRR]). Nous avons réduit au minimum l'appel aux notions de logique de manière à obtenir un texte dont la forme ne rebute pas les algébristes. Lorsque nous disons que nous avons une version constructive d'un théorème d'algèbre abstraite, c'est que nous avons un théorème dont la démonstration est constructive, dont la signification calculatoire est claire, et à partir duquel nous pouvons récupérer le théorème classique correspondant par une utilisation immédiate d'un principe non constructif bien répertorié. Un théorème abstrait classique peut avoir plusieurs versions constructives intéressantes.

Dans le cas des théorèmes d'algèbre abstraite classique, un principe non constructif qui permet de faire le travail en question est en général le théorème de compacité, qui permet de construire un modèle pour une théorie formelle cohérente. Lorsqu'il s'applique à des structures algébriques de présentation énumérable (en un sens convenable) le théorème de compacité est très voisin du **LLPO** de Bishop (tout nombre réel est ≥ 0 ou ≤ 0).

Notre volonté de ne pas utiliser le théorème de compacité n'est pas au premier chef un choix philosophique mais un choix pratique. L'usage du théorème de compacité conduit en effet à remplacer des démonstrations directes (cachées) par des démonstrations indirectes qui ne sont au fond qu'un double renversement par l'absurde de la démonstration directe, d'où la perte de son contenu calculatoire. Par exemple dans la démonstration abstraite du 17^{ème} problème de Hilbert on dit : si le polynôme P n'était pas une somme de carrés de fractions rationnelles, on aurait un corps K dans lequel on décèlerait une absurdité en lisant la démonstration (constructive) que le polynôme est partout positif ou nul. La remise sur pied de cette démonstration abstraite est de dire : partons de la démonstration (constructive) que le polynôme est partout positif ou nul, et montrons (par les arguments explicites présents dans les démonstrations classiques) que la tentative de construire K échoue à coup sûr. Cela nous donne la somme de carrés que nous cherchions. Entretemps il a fallu remplacer le théorème abstrait non constructif : «tout corps réel peut être ordonné» par le théorème constructif : «dans un corps qui refuse toute tentative d'être ordonné, -1 est une somme de carrés». Et on passe du second au premier par le théorème de compacité, tandis que la démonstration constructive du second est cachée dans les manipulations algébriques contenues dans la démonstration classique du premier (cf. [14]).

Voici un plan rapide du papier.

Définition constructive de la dimension de Krull des anneaux commutatifs

Dans la section 1 nous donnons des démonstrations plus lisibles (pour le mathématicien classique) de résultats contenus dans [15], lesquels y étaient démontrés en utilisant la notion de structure algébrique dynamique introduite dans [6, Coste, Lombardi, Roy]. La notion centrale qui est mise en oeuvre est celle de *spécification partielle pour une chaîne d'idéaux premiers*. Les constructions abstraites de chaînes d'idéaux premiers ont leur contrepartie constructive sous forme d'un théorème de collapsus simultané (théorème 1.19). Nous développons la notion de suite singulière, qui est une variation constructive autour de la notion de suite régulière. Cette notion permet de caractériser constructivement la dimension de Krull.

Nous montrons ainsi que la notion de dimension de Krull a un contenu calculatoire explicite en terme d'existence (ou non) de certains types d'identités algébriques. Ceci confirme l'adage selon lequel l'algèbre commutative admet une interprétation calculatoire sous forme de machineries de productions d'identités algébriques (certaines, parmi les plus fameuses, sont appelées des Nullstellensätze.) Enfin nous donnons une version constructive du théorème qui affirme que la dimension de Krull est la borne supérieure de la dimension des localisés en les idéaux maximaux.

Treillis distributifs, relation implicative et dimension de Krull

Dans la section 2 nous développons la théorie constructive de la dimension de Krull des treillis distributifs, dans le style de la section 1. Une grande simplification des démonstrations et des calculs est obtenue en mettant systématiquement en avant la notion de relation implicative (en anglais entailment relation), développée dans [1], qui a son origine dans la règle de coupure du calcul des séquents de Gentzen.

La théorie de Joyal

Dans la section 3 nous expliquons la théorie de Joyal pour la dimension de Krull. Nous faisons le lien avec l'approche de la section 2. La méthode de Joyal donne une démonstration plus simple du résultat principal, à savoir que la définition constructive est équivalente en mathématiques classiques à la définition classique. Nous faisons également le lien avec les développements apportés par Español à la théorie de Joyal.

Treillis de Zariski et de Krull dans un anneau commutatif

Dans la section 4 nous introduisons le treillis de Zariski d'un anneau commutatif. Ses éléments peuvent être identifiés aux radicaux d'idéaux de type fini. Ce treillis distributif est la contrepartie constructive du spectre de Zariski : les points de ce dernier sont les idéaux premiers du treillis de Zariski, et les parties constructibles du spectre de Zariski sont les éléments du treillis booléen engendré par le treillis de Zariski. L'idée de Joyal est de définir la dimension de Krull d'un anneau commutatif comme étant celle de son treillis de Zariski, ce qui évite tout recours aux idéaux premiers. Nous établissons ensuite l'équivalence entre le point de vue (constructif) de Joyal et le point de vue (constructif) donné à la section 1 pour la dimension de Krull d'un anneau commutatif.

Dimension de Krull relative d'une extension

Nous donnons dans la section 5 la version constructive pour la *dimension de Krull relative* d'une extension d'anneaux ou de treillis distributifs. Cet analogue constructif qui semble au premier abord un peu étrange (définition 5.1) n'a pas été tiré du chapeau, mais a été fourni comme un outil qui s'impose de lui-même dans le déchiffrement des démonstrations classiques. Le théorème 5.6 démontre l'équivalence (en mathématiques classiques) avec la notion classique définie de manière usuelle et l'on obtient constructivement le théorème principal concernant la dimension de Krull d'une extension (théorème 5.7).

Going Up et Going Down

La section 6 donne la définition constructive des notions classiques de Lying over, Going up et Going down, aussi bien pour les treillis distributifs que pour les anneaux commutatifs. L'équivalence avec les définitions usuelles en mathématiques classiques est établie. Comme application on obtient la version constructive des théorèmes de montée et de descente dans les extensions entières d'anneaux commutatifs, ainsi que celle du Going down pour les extensions plates. Nous montrons que ces théorèmes apparemment très abstraits (qui affirment l'existence de certains idéaux premiers) ont une signification tout à fait concrète en terme de machinerie de construction d'identités algébriques. Cette version concrète implique la

version abstraite par une utilisation simple du théorème de compacité. Et le plus important, la démonstration de la machinerie concrète est déjà à l'oeuvre de manière cachée dans la démonstration abstraite du théorème abstrait.

Annexe

L'annexe explique le matériel logique de base pour le théorème de complétude, le théorème de compacité, les théories géométriques, les théories dynamiques et le jeu qui s'y déploie entre mathématiques classiques et mathématiques constructives.

Conclusion

On notera que les théorèmes constructifs établis dans cet article concernant la dimension des anneaux de polynômes, celle des algèbres de présentation finie sur un corps, le Going up et le Going down sont nouveaux (ils n'avaient pu être obtenus dans le cadre de la théorie de Joyal tant qu'elle se limitait à parler du treillis de Zariski des anneaux commutatifs sans aller voir de plus près les calculs en jeu en termes d'identités algébriques).

Cet article constitue une confirmation de la possibilité concrète de réaliser le programme de Hilbert pour de larges pans de l'algèbre abstraite (cf. [5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]). L'idée générale est de remplacer les structures abstraites idéales par des spécifications partielles de ces structures. La jolie et très courte démonstration abstraite qui utilise les objets idéaux a une contrepartie purement calculatoire au niveau des spécifications partielles de ces objets idéaux. La plupart des théorèmes d'algèbre abstraite, dans la démonstration desquels l'axiome du choix et le principe du tiers exclu semblent offrir un obstacle sérieux à une interprétation explicite en termes de calculs algébriques, auraient ainsi une version constructive, à partir de laquelle l'utilisation du théorème de compacité fournirait la version classique abstraite. Plus important encore, la démonstration abstraite idéale contiendrait toujours, de manière plus ou moins cachée, la démonstration constructive du théorème constructif correspondant.

Signalons enfin qu'un traitement constructif du Principal ideal theorem de Krull est donné dans l'article [2].

1 Définition constructive de la dimension de Krull des anneaux commutatifs

Cette section est basée sur l'article [15].

Soit un anneau commutatif A , on note $\langle J \rangle$ ou s'il y a ambiguïté $\langle J \rangle_A$ l'idéal de A engendré par la partie $J \subseteq A$. On note $\mathcal{M}(U)$ le monoïde¹ engendré par la partie $U \subseteq A$.

1.1 Premiers idéaux

Définition 1.1 Soit un anneau commutatif A .

- Une *spécification partielle pour un idéal premier* (ce que nous abrégons en *premier idéal*, en anglais *idealistic prime*) est un couple $\mathcal{P} = (J, U)$ de parties de A .
- Un premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ est dit *complet* si J est un idéal, U est un monoïde et $J + U = U$.
- Si P est un idéal premier et $S = A \setminus P$, on note \hat{P} le premier idéal (P, S) .
- Soient $\mathcal{P}_1 = (J_1, U_1)$ et $\mathcal{P}_2 = (J_2, U_2)$ deux premiers idéaux et P un idéal premier.
 - On dit que \mathcal{P}_1 est contenu dans \mathcal{P}_2 et on écrit $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ si $J_1 \subseteq J_2$ et $U_2 \subseteq U_1$.
 - On dit que \mathcal{P}_2 est un raffinement de \mathcal{P}_1 et on écrit $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ si $J_1 \subseteq J_2$ et $U_1 \subseteq U_2$.

1. Un monoïde sera toujours un monoïde multiplicatif.

- On dit que l'idéal premier P raffine le premier idéal \mathcal{P} si $\mathcal{P} \leq \widehat{P}$.
- On note $\kappa(A, \mathcal{P})$, ou $\kappa(\mathcal{P})$ si le contexte est clair, l'anneau obtenu à partir de A en forçant « $j = 0$ » pour $j \in J$ et « u inversible» pour $u \in U$. Si J est un idéal et U un monoïde c'est l'anneau $U^{-1}(A/J)$.

Nous regardons un premier idéal \mathcal{P} comme une spécification partielle pour un idéal premier (au sens usuel) P qui raffine \mathcal{P} .

Un premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ engendre un premier idéal complet minimum pour la relation de raffinement, à savoir $(\langle J \rangle, \langle J \rangle + \mathcal{M}(U))$. On note $\mathcal{S}(J, U)$ le monoïde $\langle J \rangle + \mathcal{M}(U)$ et $A_{\mathcal{P}}$ l'anneau $\mathcal{S}(J, U)^{-1}A$.

Définition 1.2 On dit que le premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ s'effondre, ou *collapse*, si l'idéal $\langle J \rangle$ coupe le monoïde $\mathcal{M}(U)$, autrement dit si $0 \in \langle J \rangle + \mathcal{M}(U)$. Il revient au même de dire que l'anneau $\kappa(\mathcal{P})$ est trivial, ou encore que l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est trivial.

Notez que le premier idéal $(0, 1)$ s'effondre si, et seulement si, $1 =_A 0$.

Lemme 1.3 Un premier idéal qui s'effondre raffine un premier idéal fini qui s'effondre.

Collapsus simultané et lemme de Krull

Dans la suite nous noterons $(J \cup \{x\}, U)$ sous la forme abrégée $(J, x; U)$ et $(J, \{x\} \cup U)$ sous la forme $(J; x, U)$.

Théorème 1.4 (Collapsus simultané pour les premiers idéaux)

Soit un premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ dans un anneau commutatif A et soit $x \in A$. Supposons que les premiers idéaux $(J, x; U)$ et $(J; x, U)$ s'effondrent tous les deux, alors \mathcal{P} s'effondre également.

Démonstration.

La démonstration est le truc de Rabinovitch. A partir de deux égalités $u_1 + j_1 + ax = 0$ et $u_2x^m + j_2 = 0$ (avec $u_i \in \mathcal{M}(U)$, $j_i \in \langle J \rangle$, $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$) on en fabrique une troisième, $u_3 + j_3 = 0$ en éliminant x : on obtient $u_2(u_1 + j_1)^m + (-a)^m j_2 = 0$, avec $u_3 = u_2 u_1^m$. \square

Corolaire 1.5 (Lemme de Krull ou Nullstellensatz de Hilbert formel)

Soit $\mathcal{P} = (J, U)$ un premier idéal dans un anneau commutatif A . Le théorème de compacité implique que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le premier idéal \mathcal{P} ne s'effondre pas.
2. Il existe un idéal premier détachable² Q qui raffine \mathcal{P} .
3. Il existe un morphisme ψ de A vers un anneau intègre B vérifiant $\psi(J) = 0$ et $0 \notin \psi(U)$.
4. Il existe un morphisme ϕ de A vers un corps algébriquement clos L vérifiant $\phi(J) = 0$ et $0 \notin \phi(U)$.

Démonstration.

Les points 2, 3 et 4 sont clairement équivalents (au moins en mathématiques classiques où tout corps possède une clôture algébrique³). Le point 2 implique clairement le point 1. Voyons la réciproque.

Commençons par la démonstration classique usuelle qui s'appuie, non sur le théorème de

2. Rappelons qu'une partie d'un ensemble est dite détachable lorsqu'on a un test pour l'appartenance à la partie. Par exemple les idéaux de type fini d'un anneau de polynômes à coefficients entiers sont détachables.

3. En fait cela résulte aussi du théorème de compacité.

compacité, mais sur le principe du tiers exclu et le lemme de Zorn. On considère un premier idéal $\mathcal{Q} = (P, S)$, qui est maximal, pour la relation de raffinement, parmi les premiers idéaux qui raffinent \mathcal{P} et qui ne s'effondrent pas (le lemme de Zorn s'applique grâce au lemme 1.3). Tout d'abord, il est clair que \mathcal{Q} est complet, puisqu'on ne change pas le collapsus en complétant un premier idéal. Si \mathcal{Q} n'était pas un idéal premier avec son complément, on aurait un $x \in A \setminus (P \cup S)$. Mais puisque le premier idéal (P, S) ne s'effondre pas l'un des deux premiers idéaux $(P, x; S)$ et $(P; x, S)$ doit ne pas s'effondrer (théorème 1.4). Et ceci contredit la maximalité.

Voyons la démonstration basée sur le théorème de compacité (qui est moins fort que le principe du tiers exclu avec le lemme de Zorn). Nous considérons pour cela une théorie propositionnelle qui décrit le premier idéal (P, S) associé à un idéal premier P dans A , avec les contraintes $J \subseteq P$ et $U \subseteq S$. Dans cette théorie nous avons un prédicat pour $x \in P$ (on devrait le noter $\mathsf{P}(x)$, mais nous garderons $x \in P$ pour plus de lisibilité), un autre pour $x \in S$ et les axiomes sont les suivants (P est un idéal, S est un monoïde, $P \cap S = \emptyset$, $P \cup S = A$)

1. $a \in P$ pour chaque $a \in J$
2. $u \in S$ pour chaque $u \in U$
3. $0 \in P$
4. $(a \in P \ \& \ b \in P) \Rightarrow a + b \in P$
5. $a \in P \Rightarrow ab \in P$
6. $1 \in S$
7. $(a \in S \ \& \ b \in S) \Rightarrow ab \in S$,
8. $(a \in P \ \& \ a \in S) \Rightarrow \perp$ (collapsus)
9. $a \in P$ ou $a \in S$.

Pour la théorie avec les seuls axiomes 1 à 8 l'inconsistance est facilement équivalente au collapsus du premier idéal (J, U) . Le point 1 de l'énoncé dit donc que cette théorie est consistante. D'après le théorème 1.4 la théorie où l'on ajoute l'axiome 9 est également consistante (voir l'annexe concernant les théories géométriques). Par le théorème de compacité, cette théorie a un modèle. Ce modèle nous donne l'idéal premier voulu. \square

Saturation

Définition 1.6 On dit que le premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ est *saturé* si :

- tout élément $x \in A$ tel que le premier idéal $(J, x; U)$ s'effondre est dans U ,
- tout élément $x \in A$ tel que le premier idéal $(J; x, U)$ s'effondre est dans J .

Par exemple pour un idéal premier détachable P , le premier idéal \widehat{P} est un premier idéal saturé.

Lorsque le premier idéal (J, U) est saturé on a les équivalences

$$1 \in J \iff 0 \in U \iff (J, U) = (A, A).$$

Lemme 1.7

1. Si $\mathcal{P} = (J, U)$ est saturé, il est complet : J est un idéal, U est un monoïde et $J + U = U$.
2. Un premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ engendre un premier idéal saturé minimum (pour la relation de raffinement) $\mathcal{P}_1 = (I, V)$ obtenu comme suit.
 - I est l'ensemble des $x \in A$ tels que le premier idéal $(J, x; U)$ s'effondre,
 - V est l'ensemble des $x \in A$ tels que le premier idéal $(J; x, U)$ s'effondre.

Démonstration sans calcul.

1. Montrons que J est un idéal. Soit $z \in \langle J \rangle$. Il suffit de montrer que $(J; z, U)$ s'effondre, i.e. que $\langle J \rangle$ coupe $\mathcal{M}(z, U)$, ce qui est évident. Montrons que $J + U \subseteq U$. Soit $a \in J$ et $u \in U$. Il suffit de montrer que $(J, a + u; U)$ s'effondre, i.e. que $\langle J, a + u \rangle$ coupe $\mathcal{M}(U)$, ce qui est évident.

2. Il suffit de montrer que \mathcal{P}_1 est saturé. Soit par exemple un x tel que $(I, x; V)$ s'effondre. On doit montrer que $x \in V$. On a par exemple $(J, y_1, y_2, x; U, z)$ qui s'effondre avec $y_1, y_2 \in I$ et $z \in V$. Autrement dit $(J, y_1, y_2, x; U, z)$, $(J; U, y_1)$, $(J; U, y_2)$ et $(J, z; U)$ s'effondrent tous les quatre. Alors en appliquant plusieurs fois le collapsus simultané, on obtient bien que $(J, x; U)$ s'effondre, c'est-à-dire que $x \in V$. \square

Corolaire 1.8 *Soit $\mathcal{P} = (J, U)$ un premier idéal dans un anneau commutatif A et (I, V) le saturé de \mathcal{P} . Le théorème de compacité implique que I est l'intersection des idéaux premiers contenant J et ne coupant pas U , tandis que V est l'intersection des complémentaires de ces mêmes idéaux premiers. En particulier le nilradical d'un idéal de A est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent.*

Démonstration sans calcul.

Par définition tout idéal premier P qui raffine \mathcal{P} contient I et son complémentaire contient V . Soit maintenant un x qui n'est pas dans V . Le premier idéal $(J, x; U)$ ne s'effondre pas. Il existe donc (corolaire 1.5) un idéal premier P qui raffine \mathcal{P} et qui contient x . Cet x n'est donc pas dans l'intersection des complémentaires des idéaux premiers qui raffinent \mathcal{P} . \square

Proposition et définition 1.9 *Un idéal I et un monoïde S sont dits conjugués lorsque l'on a :*

- $I + S \subseteq S$,
- $st \in S \Rightarrow s \in S$,
- $(sa \in I, s \in S) \Rightarrow a \in I$,
- $a^n \in I \Rightarrow a \in I$ ($n \in \mathbb{N}, n > 0$).

Le premier idéal (I, S) est saturé si, et seulement si, l'idéal I et le monoïde S sont conjugués.

Démonstration.

L'implication directe est facile. La réciproque se fait sans calcul comme pour le point 1 du lemme 1.7. \square

Ainsi le saturé du premier idéal $(0, 1)$ est (\mathcal{N}, A^\times) où \mathcal{N} est le nilradical de A et A^\times le groupe des unités.

Exemples de versions constructives de théorèmes classiques

Nous donnons maintenant des exemples de versions constructives de théorèmes usuels en mathématiques classiques concernant les idéaux premiers.

Notre premier exemple concerne les anneaux arithmétiques, c'est-à-dire les anneaux dont les idéaux de type fini sont localement principaux. Par exemple un domaine de Prüfer ou de Dedekind est un anneau arithmétique.

La *définition constructive d'un anneau arithmétique* A est la suivante : pour tous $x, y \in A$ on peut trouver un élément $s \in A$ tel que dans A_s on a $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle$ et dans A_{1-s} on a $\langle x, y \rangle = \langle y \rangle$. Cela revient encore à dire qu'on peut trouver s, t, v, w tels que $sx = vy$, $ty = wx$ et $s + t = 1$.

Lemme 1.10

Énoncé classique. *Dans un anneau arithmétique deux idéaux premiers incomparables sont comaximaux.*

Énoncé constructif. Dans un anneau arithmétique deux premiers idéaux incomparables⁴ sont comaximaux.

Démonstration.

Le substitut constructif pour deux idéaux premiers incomparables est donné par deux premiers idéaux $\mathcal{P} = (I, U)$ et $\mathcal{Q} = (J, V)$ qui sont *incomparables* au sens suivant : on connaît deux éléments x et y de A qui témoignent que \mathcal{P} et \mathcal{Q} ne peuvent pas être raffinés en des idéaux premiers comparables. Plus précisément, si $\mathcal{P}' = (I', U')$ et $\mathcal{Q}' = (J', V')$ sont les saturés de \mathcal{P} et \mathcal{Q} on a $x \in I' \cap V'$ et $y \in J' \cap U'$. La conclusion doit être que $I' + J' = \langle 1 \rangle$. La démonstration de l'énoncé constructif est immédiate : on considère s, t, v, w comme ci-dessus (définition constructive d'un anneau arithmétique), puisque $x \in I', y \in U', ty = wx$ et puisque \mathcal{P}' est saturé, on a $t \in I'$. Et de façon symétrique on a $s \in J'$. \square

Il est clair que le théorème classique découle de sa version constructive. Et que le théorème classique implique la version constructive en mathématiques classiques. Mais la version constructive n'a pas besoin d'idéaux premiers et elle a une signification calculatoire claire.

Notre deuxième exemple est le célèbre lemme d'évitement des idéaux premiers. Une version constructive naturelle (qui implique l'énoncé classique lorsque l'idéal I est de type fini) est le lemme 1.11 suivant. On peut trouver une autre version constructive dans [MRR] (section II.2, théorème 2.3, exercices 12 et 13). Il est possible de démontrer que dans un anneau noethérien cohérent fortement discret, si \mathcal{P} est l'un des premiers idéaux obtenus en saturant une chaîne idéale finie (voir la définition en section 1.2), alors \mathcal{P} vérifie l'hypothèse de décidabilité requise pour les premiers idéaux dans le lemme 1.11.

Lemme 1.11 (Lemme d'évitement des idéaux premiers). *Soit I un idéal de type fini et $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ des premiers idéaux d'un anneau A . Supposons qu'on sache tester le collapsus des raffinements finis des \mathcal{P}_k . Alors on sait construire des raffinements finis $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ de $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ tels que (en notant $\mathcal{Q}_k = (I_k, V_k)$) :*

- ou bien pour un k on a $I \subseteq J_k$,
- ou bien $\exists x \in I$ tel que pour chaque k , on a $x \in V_k$.

Démonstration.

Il suffit de recopier la démonstration classique donnée dans [Eisenbud]. \square

1.2 Chaînes partiellement spécifiées d'idéaux premiers

Définition 1.12 Soit un anneau commutatif A .

- Une *spécification partielle pour une chaîne d'idéaux premiers* (ce que nous abrégons en *chaîne idéale*, en anglais *idealistic chain*) est définie comme suit. Une *chaîne idéale de longueur ℓ* est une liste de $\ell + 1$ premiers idéaux : $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$. On note $\mathcal{C}(i)$ pour \mathcal{P}_i . La chaîne idéale est dite *finie* si toutes les parties J_i et U_i sont finies.
- Une chaîne idéale $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$ est dite *complète* si les premiers idéaux \mathcal{P}_i sont complets et si on a les inclusions $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i+1}$ ($i = 0, \dots, \ell - 1$).
- Soient deux chaînes idéales de longueur ℓ , $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$ et $\mathcal{C}' = (\mathcal{P}'_0, \dots, \mathcal{P}'_\ell)$. On dit que \mathcal{C}' est un *raffinement* de \mathcal{C} et on écrit $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ si $\mathcal{P}_i \leq \mathcal{P}'_i$ pour $i = 0, \dots, \ell$.

Nous regardons une chaîne idéale \mathcal{C} de longueur ℓ dans A comme une spécification partielle pour une chaîne croissante d'idéaux premiers (au sens usuel) P_0, \dots, P_ℓ . Autrement dit $\mathcal{C} \leq (\widehat{P}_0, \dots, \widehat{P}_\ell)$.

4. Définition ci-après.

Lemme 1.13 Toute chaîne idéale $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ engendre une chaîne idéale complète minimale $\mathcal{C}' = ((I_0, V_0), \dots, (I_\ell, V_\ell))$ définie par les égalités suivantes

- $I_0 = \langle J_0 \rangle$, $I_{h+1} = \langle J_{h+1} \cup I_h \rangle$ pour $0 \leq h < \ell$.
- $U'_i = \mathcal{M}(U_i)$ pour $0 \leq i < \ell$.
- $V_\ell = U'_\ell + I_\ell$, $V_{h-1} = U'_{h-1}V_h + I_{h-1}$ pour $1 \leq h \leq \ell$. En particulier tout élément de V_0 se réécrit sous la forme

$$u_0 \cdot (u_1 \cdot (\dots (u_\ell + j_\ell) + \dots) + j_1) + j_0 = u_0 \cdots u_\ell + u_0 \cdots u_{\ell-1} \cdot j_\ell + \dots + u_0 \cdot j_1 + j_0$$

avec les $j_i \in \langle J_i \rangle$ et $u_i \in \mathcal{M}(U_i)$.

Définition 1.14 (*Collapsus*) Soit $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale.

- On dit que la chaîne idéale \mathcal{C} *collapse* ou encore *s'effondre* si le dernier élément de la chaîne idéale complétée s'effondre, i.e. s'il existe $j_i \in \langle J_i \rangle$, $u_i \in \mathcal{M}(U_i)$, ($i = 0, \dots, \ell$), vérifiant l'égalité

$$u_0 \cdot (u_1 \cdot (\dots (u_\ell + j_\ell) + \dots) + j_1) + j_0 = 0 \quad (1)$$

- Une chaîne idéale est dite *saturée* si elle est complète et si les premiers idéaux (J_i, U_i) sont saturés.
- La chaîne idéale $((A, A), \dots, (A, A))$ est dite *triviale* : une chaîne saturée qui s'effondre est triviale.

Lemme 1.15 Une chaîne idéale qui s'effondre raffine un chaîne idéale finie qui s'effondre.

Lemme 1.16 Une chaîne idéale $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$ s'effondre si l'un des \mathcal{P}_h s'effondre. Plus généralement si une chaîne idéale \mathcal{C}' extraite d'une chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre, alors \mathcal{C} s'effondre. De même si \mathcal{C} s'effondre, tout raffinement de \mathcal{C} s'effondre.

Les démonstrations des propriétés suivantes sont instructives.

Lemme 1.17 Soit deux chaînes idéales $\mathcal{C}^1 = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$ et $\mathcal{C}^2 = (\mathcal{P}_{\ell+1}, \dots, \mathcal{P}_{\ell+r})$ d'un anneau A (avec $\mathcal{P}_i = (J_i, U_i)$ pour chaque i) et notons $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1 \bullet \mathcal{C}^2 = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{\ell+r})$.

1. Supposons \mathcal{C}^1 saturée. Alors \mathcal{C} s'effondre dans A si, et seulement si, $\mathcal{P}_\ell \bullet \mathcal{C}^2$ s'effondre dans A si, et seulement si, \mathcal{C}^2 s'effondre dans le quotient A/J_ℓ .
2. Supposons \mathcal{C}^2 complète. Alors \mathcal{C} s'effondre dans A si, et seulement si, $\mathcal{C}^1 \bullet \mathcal{P}_{\ell+1}$ s'effondre dans A si, et seulement si, \mathcal{C}^2 s'effondre dans le localisé $A_{U_{\ell+1}}$.
3. Supposons \mathcal{C}^1 saturée et \mathcal{C}^2 complète. Alors \mathcal{C} s'effondre dans A si, et seulement si, $(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_{\ell+1})$ s'effondre dans A si, et seulement si, $J_\ell \cap U_{\ell+1} \neq \emptyset$.

Démonstration.

Laissée à la lectrice. □

1.3 Collapsus simultané et Nullstellensatz formel pour les chaînes idéales

Notations 1.18 Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes pour certains raffinements élémentaires. Si $\mathcal{P} = (J, U)$, $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$, nous notons

- $\mathcal{P} \& \{x \in \mathcal{P}\}$ ou encore $(J, x; U)$ pour $(J \cup \{x\}, U)$
- $\mathcal{P} \& \{x \notin \mathcal{P}\}$ ou encore $(J; x, U)$ pour $(J, U \cup \{x\})$
- $(a_1, \dots, a_m; v_1, \dots, v_p)$ pour $(\{a_1, \dots, a_m\}, \{v_1, \dots, v_p\})$
- $\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{P}_i\}$ pour $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i \& \{x \in \mathcal{P}_i\}, \dots, \mathcal{P}_n)$
- $\mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{P}_i\}$ pour $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i \& \{x \notin \mathcal{P}_i\}, \dots, \mathcal{P}_n)$

Collapsus simultané pour les chaînes idéales

Théorème 1.19 (Collapsus simultané pour les chaînes idéales)

Soit une chaîne idéale $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ dans un anneau commutatif A .

- (1) Soit $x \in A$ et $i \in \{0, \dots, \ell\}$. Supposons que les chaînes idéales $\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{C}(i)\}$ et $\mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{C}(i)\}$ s'effondrent toutes les deux, alors \mathcal{C} s'effondre également.
- (2) La chaîne idéale \mathcal{C} engendre une chaîne idéale saturée minimum. Celle-ci s'obtient en ajoutant dans U_i (resp. J_i) tout élément $x \in A$ tel que la chaîne idéale $\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{C}(i)\}$ (resp. $\mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{C}(i)\}$) s'effondre.

Démonstration.

Notons $(1)_\ell$ et $(2)_\ell$ les énoncés avec ℓ fixé. Remarquons que $(1)_0$ et $(2)_0$ ont fait l'objet du théorème 1.4. Nous allons faire une démonstration par récurrence sur ℓ . Nous pouvons supposer la chaîne idéale \mathcal{C} complète (cela n'influe pas sur l'existence des collapsus).

Le fait que $(1)_\ell \Rightarrow (2)_\ell$ n'offre pas de difficulté, on raisonne comme dans le théorème 1.4.

Il reste donc à montrer $((1)_{\ell-1} \text{ et } (2)_{\ell-1}) \Rightarrow (1)_\ell$ (pour $\ell > 0$).

Si $i < \ell$ on utilise le fait 1.17 qui nous ramène à des chaînes idéales de longueur i dans l'anneau localisé $A_{U_{i+1}}$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

Si $i = \ell$ on considère la chaîne idéale de longueur $\ell-1$ $((K_0, S_0), \dots, (K_{\ell-1}, S_{\ell-1}))$ obtenue en saturant $((J_0, U_0), \dots, (J_{\ell-1}, U_{\ell-1}))$ (on applique $(2)_{\ell-1}$). Pour des $j_i \in \langle J_i \rangle$ et $u_i \in \mathcal{M}(U_i)$ arbitraires ($0 \leq i \leq \ell$), considérons les affirmations suivantes :

$$u_0 \cdot (u_1 \cdot (\dots (u_{\ell-1} \cdot (u_\ell + j_\ell) + j_{\ell-1}) + \dots) + j_1) + j_0 = 0 \quad (\alpha)$$

$$(u_\ell + j_\ell) \in K_{\ell-1} \quad (\beta)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \ u_0 \cdot (u_1 \cdot (\dots (u_{\ell-1} \cdot (u_\ell + j_\ell)^n + j_{\ell-1}) + \dots) + j_1) + j_0 = 0 \quad (\gamma)$$

On a $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma)$. On a donc les propriétés équivalentes suivantes :

- la chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre dans A (certifié par une égalité de type (α) ou de type (γ)),
- le premier idéal (J_ℓ, U_ℓ) s'effondre dans $A/K_{\ell-1}$ (certifié par une égalité de type (β)).

On est donc ramené (sur l'anneau $A/K_{\ell-1}$) au cas $(1)_0$ traité au théorème 1.4. \square

Remarquons que nous ne nous sommes pas appuyés, dans la fin du raisonnement, sur le lemme 1.17, qui n'est pas assez fort dans cette situation. Nous donnons dans le corolaire qui suit des conséquences simples du théorème 1.19. Le deuxième point renforce le lemme 1.17.

Corolaire 1.20

1. Une chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre si, et seulement si, toute chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} est triviale.
2. On ne change pas le collapsus d'une chaîne idéale \mathcal{C} si on la remplace par sa saturée \mathcal{C}' ou par n'importe quelle chaîne idéale \mathcal{C}'' telle que $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'' \leq \mathcal{C}'$.
3. Soit $x_1, \dots, x_k \in A$ et $i \in \{0, \dots, \ell\}$. Supposons que les chaînes idéales

$$((J_0, U_0), \dots, (J_i \cup \{(x_h)_{h \in H}\}, U_i \cup \{(x_h)_{h \in H'}\}), \dots, (J_\ell, U_\ell))$$

s'effondrent pour tout couple de parties complémentaires (H, H') de $\{1, \dots, k\}$, alors la chaîne \mathcal{C} s'effondre également.

4. Soient $X, Y \subseteq A$, $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$ une chaîne idéale et $\mathcal{C}' = (\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_\ell)$ sa saturée. Si $\mathcal{P}_k = (J_k, U_k)$ et $\mathcal{Q}_k = (I_k, V_k)$ la chaîne idéale

$$(\mathcal{P}_0, \dots, (J_k, X; Y, U_k), \dots, \mathcal{P}_\ell)$$

s'effondre si, et seulement si, le premier idéal $(I_k, X; Y, V_k)$ s'effondre.

5. Soient $x \in A$ et $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_\ell)$, si chacune des chaînes idéales

$$\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{P}_0\}, \quad \mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{P}_\ell\}, \quad \mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{P}_i\} \& \{x \notin \mathcal{P}_{i-1}\} \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

s'effondrent, alors \mathcal{C} s'effondre.

Définition 1.21 Deux chaînes idéales qui engendrent la même chaîne idéale saturée sont dites *équivalentes*. Une chaîne idéale équivalente à une chaîne idéale finie est appelée une *chaîne idéale de type fini*.

Notre idée est que le théorème 1.19 révèle un contenu calculatoire «caché» dans les démonstrations classiques concernant les chaînes croissantes d'idéaux premiers. Cette idée est illustrée par le théorème suivant qui, en mathématiques classiques, donne une caractérisation concrète des chaînes idéales qui spécifient incomplètement des chaînes croissantes d'idéaux premiers.

Théorème 1.22 (Nullstellensatz formel pour les chaînes idéales dans un anneau commutatif) Soit A un anneau et $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale dans A . Le théorème de compacité implique que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) Il existe une chaîne de $\ell + 1$ idéaux premiers détachables $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ qui raffine \mathcal{C} , i.e. telle que $J_i \subseteq P_i$, $U_i \cap P_i = \emptyset$, ($i = 0, \dots, \ell$).
- (b) La chaîne idéale \mathcal{C} ne s'effondre pas, i.e. pour tous $j_i \in \langle J_i \rangle$ et $u_i \in \mathcal{M}(U_i)$, ($i = 0, \dots, \ell$)

$$u_0 \cdot (u_1 \cdot (\dots (u_\ell + j_\ell) + \dots) + j_1) + j_0 \neq 0$$

Démonstration.

Seul (b) \Rightarrow (a) pose problème. Commençons par une démonstration qui s'appuie, non sur le théorème de compacité, mais sur le principe du tiers exclu et le lemme de Zorn. On considère une chaîne idéale $\mathcal{C}^1 = ((P_0, S_0), \dots, (P_\ell, S_\ell))$ maximale (pour la relation de raffinement) parmi les chaînes idéales qui raffinent \mathcal{C} et qui ne s'effondrent pas. Tout d'abord, il est clair que \mathcal{C}^1 est complète, puisqu'on ne change pas le collapsus en la complétant. Si ce n'était pas une chaîne d'idéaux premiers avec leurs compléments, on aurait $S_i \cup P_i \neq A$ pour un indice i . Dans ce cas, soit $x \in A \setminus (S_i \cup P_i)$. Alors $((P_0, S_0), \dots, (P_i, x; S_i), \dots, (P_\ell, S_\ell))$ doit s'effondrer (par maximalité). La même chose pour $((P_0, S_0), \dots, (P_i; x, S_i), \dots, (P_\ell, S_\ell))$. Le théorème 1.19 nous dit donc que la chaîne idéale \mathcal{C}^1 s'effondre, ce qui est absurde.

Voyons maintenant une démonstration dans laquelle intervient seulement le théorème de compacité, plus élémentaire que les outils utilisés dans la première démonstration.

Nous considérons la théorie propositionnelle qui décrit une chaîne croissante de premiers idéaux de longueur ℓ dans A . Dans cette théorie nous avons pour chaque $i \in \{0, \dots, \ell\}$ un prédicat pour $x \in P_i$ et un prédicat pour $x \in S_i$. Les axiomes sont comme les axiomes 1 à 7 décrits dans la démonstration du corolaire 1.5. Il faut ajouter les trois inclusions

$$(x \in P_i, u \in S_i) \Rightarrow x + u \in S_i, \quad x \in P_i \Rightarrow x \in P_{i+1} \quad \text{et} \quad u \in S_i \Rightarrow u \in S_{i-1}.$$

Le seul collapsus est $0 \in S_0 \Rightarrow \perp$. La théorie obtenue collapse donc exactement quand la chaîne \mathcal{C} s'effondre. L'hypothèse (b) est donc que la théorie ne collapse pas. D'après le théorème 1.19 de collapsus simultané, la théorie dans laquelle on ajoute les axiomes disjonctifs $x \in P_i \vee x \in S_i$ est consistante. Par le théorème de compacité, elle a un modèle. Ce modèle nous donne la chaîne stricte de $\ell + 1$ idéaux premiers voulue. \square

On notera également que le théorème 1.22 implique (en deux lignes) le théorème de collapsus simultané 1.19. Ce dernier peut donc être légitimement considéré comme la version constructive du premier. Un corolaire du théorème 1.22 serait une caractérisation (en mathématiques classiques) de la chaîne idéale saturée engendrée par une chaîne idéale \mathcal{C} (décrite au point 2 du théorème 1.19) au moyen de la famille des chaînes d'idéaux premiers qui sont des raffinements de \mathcal{C} , comme dans le corolaire 1.8 pour le saturé d'un premier idéal donné.

1.4 Suites singulières et dimension de Krull

Définition constructive de la dimension de Krull d'un anneau commutatif

Dans un cadre constructif, il est parfois préférable de considérer une relation d'inégalité $x \neq 0$ qui ne soit pas simplement l'impossibilité de $x = 0$. Par exemple un nombre réel est dit $\neq 0$ lorsqu'il est inversible, c'est-à-dire clairement non nul. Chaque fois que nous mentionnons une relation d'inégalité $x \neq 0$ dans un anneau, nous supposons donc toujours implicitement que cette relation a été définie au préalable dans l'anneau que nous considérons. Nous demandons que cette relation soit une inégalité standard, c'est-à-dire qu'elle puisse être démontrée équivalente à $\neg(x = 0)$ en utilisant le principe du tiers exclu. Nous demandons en outre que l'on ait constructivement $(x \neq 0, y = 0) \Rightarrow x + y \neq 0$, $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, et $\neg(0 \neq 0)$. Enfin $x \neq y$ est défini par $x - y \neq 0$. En l'absence de précisions concernant $x \neq 0$, on peut toujours considérer qu'il s'agit de la relation $\neg(x = 0)$. Lorsque l'anneau est un ensemble discret, c'est-à-dire lorsqu'il possède un test d'égalité à zéro, on choisit toujours l'inégalité $\neg(x = 0)$. Néanmoins ce serait une erreur de principe grave de considérer que l'algèbre commutative ne doit travailler qu'avec des ensembles discrets.

Définition 1.23 Soit (x_1, \dots, x_ℓ) une suite de longueur ℓ dans un anneau commutatif A .

- La chaîne idéale $((0; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{\ell-1}; x_\ell), (x_\ell; 1))$ est appelée une *chaîne idéale élémentaire*. On dit qu'elle est *associée à la suite* (x_1, \dots, x_ℓ) . On la note $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$.
- On dit que la suite $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$ est une *suite singulière*⁵ lorsque la chaîne idéale élémentaire associée $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$ s'effondre. Précisément, cela signifie qu'il existe $a_1, \dots, a_\ell \in A$ et $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_1^{m_1}(x_2^{m_2} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_2 x_2) + a_1 x_1) = 0 \quad (2)$$

ou encore qu'il existe $a_1, \dots, a_\ell \in A$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$(x_1 x_2 \cdots x_\ell)^m + a_\ell (x_1 \cdots x_{\ell-1})^m x_\ell^{m+1} + a_{\ell-1} (x_1 \cdots x_{\ell-2})^m x_{\ell-1}^{m+1} + \cdots + a_1 x_1^{m+1} = 0$$

- On dit que la suite (x_1, \dots, x_ℓ) est une *suite pseudo régulière* lorsque la chaîne idéale élémentaire associée ne s'effondre pas. Précisément, pour tous $a_1, \dots, a_\ell \in A$ et tous $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ on a

$$x_1^{m_1}(x_2^{m_2} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_2 x_2) + a_1 x_1) \neq 0$$

On notera que la longueur de la chaîne idéale élémentaire associée à une suite est égal au nombre d'éléments de la suite.

Le lien avec les suites régulières⁶ est donné par la proposition suivante, qui est immédiate.

Proposition 1.24 Dans un anneau commutatif, une suite régulière qui n'engendre pas l'idéal $\langle 1 \rangle$ est pseudo régulière.

Le lemme suivant est parfois utile.

Lemme 1.25 Soient (x_1, \dots, x_ℓ) et (y_1, \dots, y_ℓ) dans un anneau commutatif A . Supposons que pour chaque j , x_j divise une puissance de y_j et y_j divise une puissance de x_j . Alors la suite (x_1, \dots, x_ℓ) est singulière si, et seulement si, la suite (y_1, \dots, y_ℓ) est singulière

5. Dans la version originale de l'article, on disait suite pseudo singulière.

6. La définition la meilleure nous semble être celle de Bourbaki : (x_1, \dots, x_n) est dite régulière si chaque x_i est régulier modulo l'idéal $\langle x_j; j < i \rangle$. Cette définition évite l'usage de la négation. On ne demande pas que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq \langle 1 \rangle$.

Démonstration.

En effet, si x divise une puissance de y et y divise une puissance de x , on établit les relations de raffinement suivantes :

$$(a; x)(x; b) \leq (a; x, y)(x, y; b) \leq \text{la saturée de la suite } (a; x)(x; b)$$

on ajoute le premier y en disant que $yc = x^k$ (y est donc dans le saturé du monoïde engendré par x), on ajoute le second en disant que $y^m = dx$ (y est donc dans le radical de l'idéal engendré par x). On en déduit par symétrie que $(a; x)(x; b)$ et $(a; y)(y; b)$ ont la même saturation. \square

Un corolaire immédiat du théorème 1.22 est le théorème suivant 1.26.

Théorème 1.26 (suites pseudo régulières et chaînes croissantes d'idéaux premiers)

Le théorème de compacité implique le résultat suivant. Dans un anneau A une suite (x_1, \dots, x_ℓ) est pseudo régulière si, et seulement si, il existe $\ell + 1$ idéaux premiers $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ avec $x_1 \in P_1 \setminus P_0$, $x_2 \in P_2 \setminus P_1, \dots, x_\ell \in P_\ell \setminus P_{\ell-1}$.

Ceci conduit à la définition suivante, qui assure un contenu constructif explicite à la notion de *dimension de Krull d'un anneau*.

Définition 1.27 (*Dimension de Krull d'un anneau*)

- Un anneau A est dit de *dimension* -1 lorsque $1 =_A 0$.
- Pour $\ell \geq 1$ l'anneau est dit de *dimension* $\leq \ell - 1$ si toute chaîne idéale élémentaire de longueur ℓ s'effondre. On notera $\dim A \leq \ell - 1$

Les définitions suivantes utilisent des négations plus ou moins compliquées.

- Il est dit de *dimension* ≥ 0 si $1 \neq_A 0$,
- Il est dit de *dimension* > -1 si $\neg(1 =_A 0)$
- Il est dit de *dimension* < 0 si $\neg(1 \neq_A 0)$.
- L'anneau est dit de *dimension* $\geq \ell$ s'il existe une suite pseudo régulière de longueur ℓ .
- L'anneau est dit de *dimension* ℓ s'il est à la fois de *dimension* $\geq \ell$ et $\leq \ell$.
- Il est dit de *dimension* $< \ell$ lorsqu'il est impossible qu'il soit de *dimension* $\geq \ell$
- Il est dit de *dimension* $> \ell$ lorsqu'il est impossible qu'il soit de *dimension* $\leq \ell$ ⁷.

Un anneau est donc de *dimension* (de Krull) $\leq \ell - 1$ si pour toute suite (x_1, \dots, x_ℓ) dans A , on peut trouver $a_1, \dots, a_\ell \in A$ et $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_1^{m_1}(\dots(x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \dots) + a_1 x_1) = 0$$

En particulier un anneau est de *dimension* ≤ 0 si, et seulement si, pour tout $x \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in A$ tels que $x^n = ax^{n+1}$. Tandis qu'il est de *dimension* < 1 si, et seulement si, il est absurde qu'on puisse trouver $x \in A$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A$, $x^n \neq ax^{n+1}$.

Notez que \mathbb{R} est un anneau local de *dimension* < 1 , mais on ne peut pas prouver constructivement qu'il est de *dimension* ≤ 0 .

Notez aussi qu'un anneau est local zéro-dimensionnel si, et seulement si, on a

$$\forall x \in A \quad x \text{ est inversible ou nilpotent}$$

7. En fait, il existe une et une seule chaîne idéale élémentaire de longueur 0 : $(0, 1)$, donc il n'y avait pas besoin de commencer par une définition particulière pour les anneaux de *dimension* -1 . Dans ce cadre, on retrouve les distinctions entre *dimension* ≥ 0 et *dimension* > -1 , ainsi que entre *dimension* ≤ -1 et *dimension* < 0 .

Dimension de Krull d'un anneau de polynômes sur un corps discret

Nous avons tout d'abord.

Proposition 1.28 *Soit K un corps discret, A une K -algèbre commutative, et x_1, \dots, x_ℓ dans A algébriquement dépendants sur K . Alors la suite (x_1, \dots, x_ℓ) est singulière.*

Démonstration.

Soit $Q(x_1, \dots, x_\ell) = 0$ une relation de dépendance algébrique sur K . Ordonnons les monômes de Q dont le coefficient est non nul selon l'ordre lexicographique. On peut supposer sans perte de généralité que le coefficient du premier monôme non nul (pour cet ordre) est égal à 1. Si $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_\ell^{m_\ell}$ est ce monôme, il est clair que Q s'écrit sous forme

$$Q = x_1^{m_1} \cdots x_\ell^{m_\ell} + x_1^{m_1} \cdots x_\ell^{1+m_\ell} R_\ell + x_1^{m_1} \cdots x_{\ell-1}^{1+m_{\ell-1}} R_{\ell-1} + \cdots + x_1^{m_1} x_2^{1+m_2} R_2 + x_1^{1+m_1} R_1$$

ce qui est le collapsus recherché. \square

On en déduit.

Théorème 1.29 *Soit K un corps discret. La dimension de Krull de l'anneau $K[X_1, \dots, X_\ell]$ est égale à ℓ .*

Démonstration.

Vue la proposition 1.28 il suffit de vérifier que la suite (X_1, \dots, X_ℓ) est pseudo-régulière. Or elle est régulière. \square

On notera que nous avons obtenu ce résultat de base avec un minimum d'effort, et que notre démonstration vaut évidemment en mathématiques classiques (avec la définition classique de la dimension de Krull dès qu'on admet le théorème de compacité). Ceci infirme l'opinion couramment admise que les démonstrations constructives sont nécessairement plus compliquées que les démonstrations classiques.

1.5 Dimension de Krull et principe local-global

Monoïdes comaximaux

Définition 1.30

- (1) Des monoïdes S_1, \dots, S_n de l'anneau A sont dits *comaximaux* si un idéal de A qui coupe chacun des S_i contient toujours 1, autrement dit si on a :

$$\forall s_1 \in S_1 \cdots \forall s_n \in S_n \quad \exists a_1, \dots, a_n \in A \quad \sum_{i=1}^n a_i s_i = 1$$

- (2) On dit que *les monoïdes S_1, \dots, S_n de l'anneau A recouvrent le monoïde S* si S est contenu dans les S_i et si un idéal de A qui coupe chacun des S_i coupe toujours S , autrement dit si on a :

$$\forall s_1 \in S_1 \cdots \forall s_n \in S_n \quad \exists a_1, \dots, a_n \in A \quad \sum_{i=1}^n a_i s_i \in S$$

L'exemple fondamental de monoïdes comaximaux est le suivant : lorsque $s_1, \dots, s_n \in A$ vérifient $\langle s_1, \dots, s_n \rangle = \langle 1 \rangle$, les monoïdes $\mathcal{M}(s_i)$ sont comaximaux.

Les deux lemmes suivants sont aussi très utiles pour construire des monoïdes comaximaux.

Lemme 1.31 (*Recouvrements, calculs immédiats*)

- (1) (*associativité*) *Si les monoïdes S_1, \dots, S_n de l'anneau A recouvrent le monoïde S et si chaque S_ℓ est recouvert par des monoïdes $S_{\ell,1}, \dots, S_{\ell,m_\ell}$, alors les $S_{\ell,j}$ recouvrent S .*

- (2) (transitivité) Soit S un monoïde de l'anneau A et S_1, \dots, S_n des monoïdes comaximaux de l'anneau localisé A_S . Pour $\ell = 1, \dots, n$ soit V_ℓ le monoïde de A formé par les numérateurs des éléments de S_ℓ . Alors les monoïdes V_1, \dots, V_n recouvrent S .

Rappelons que pour $I, U \subseteq A$, nous notons $\mathcal{S}(I, U)$ le monoïde $\mathcal{M}(U) + \langle I \rangle$ (obtenu en complétant le premier idéal (I, U)).

Lemme 1.32 Les monoïdes $\mathcal{S}(I, a; U)$ et $\mathcal{S}(I; a, U)$ recouvrent le monoïde $\mathcal{S}(I, U)$.

Démonstration.

Pour $x \in \mathcal{S}(I; U, a)$ et $y \in \mathcal{S}(I, a; U)$ on doit trouver un $x_1x + y_1y \in \mathcal{S}(I; U)$ ($x_1, y_1 \in A$). On écrit $x = u_1a^k + j_1$, $y = u_2 + j_2 - az$ avec $u_1, u_2 \in \mathcal{M}(U)$, $j_1, j_2 \in \mathcal{I}(I)$, $z \in A$. L'identité fondamentale $c^k - d^k = (c - d) \times \dots$ avec $c = u_2 + j_2$ et $d = az$ donne un $y_2 \in A$ tel que

$$y_2y = (u_2 + j_2)^k - (az)^k = (u_3 + j_3) - (az)^k$$

et on écrit $z^kx + u_1y_2y = u_1u_3 + u_1j_3 + j_1z^k = u_4 + j_4$. \square

Corolaire 1.33 Soient $u_1, \dots, u_n \in A$. Notons

$$S_1 = \mathcal{S}(0; u_1), S_2 = \mathcal{S}(u_1; u_2), \dots, S_n = \mathcal{S}(u_1, \dots, u_{n-1}; u_n) \text{ et } S_{n+1} = \mathcal{S}(u_1, \dots, u_n; 1).$$

Alors les monoïdes S_1, \dots, S_{n+1} sont comaximaux.

Les monoïdes comaximaux constituent un outil constructif qui permet en général de remplacer des arguments abstraits de type local-global par des calculs explicites. Si S_1, \dots, S_n sont des monoïdes comaximaux de l'anneau A , l'anneau produit des localisés A_{S_i} est une A -algèbre fidèlement plate. Donc de très nombreuses propriétés sont vraies avec A si, et seulement si, elles le sont avec chacun des A_{S_i} .

Nous le vérifions pour la dimension de Krull dans le paragraphe suivant.

Caractère local de la dimension de Krull

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1.34 Soit A un anneau.

1. La dimension de Krull de A est toujours supérieure ou égale à celle d'un quotient ou d'un localisé de A .
2. Plus précisément toute chaîne idéale élémentaire qui s'effondre dans A s'effondre dans tout quotient et dans tout localisé de A , et toute chaîne idéale élémentaire dans un localisé de A est équivalente (dans le localisé) à une chaîne idéale élémentaire écrite dans A .
3. Enfin, si une chaîne idéale élémentaire $\overline{(a_1, \dots, a_\ell)}$ de A s'effondre dans un localisé A_S , il existe un m dans S tel que $\overline{(a_1, \dots, a_\ell)}$ s'effondre dans $A[1/m]$.

Proposition 1.35 Soient S_1, \dots, S_n des monoïdes comaximaux de l'anneau A et \mathcal{C} une chaîne idéale dans A . Alors \mathcal{C} s'effondre dans A si, et seulement si, elle s'effondre dans chacun des A_{S_i} . En particulier la dimension de Krull de A est $\leq \ell$ si, et seulement si, la dimension de Krull de chacun des A_{S_i} est $\leq \ell$.

Démonstration.

Il faut montrer qu'une chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre dans A si elle s'effondre dans chacun des A_{S_i} . Pour simplifier prenons une chaîne de longueur 2 : $((J_0, U_0), (J_1, U_1), (J_2, U_2))$ avec des idéaux J_k et des monoïdes U_k . Dans chaque A_{S_i} on a une égalité

$$u_{0,i} u_{1,i} u_{2,i} + u_{0,i} u_{1,i} j_{2,i} + u_{0,i} j_{1,i} + j_{0,i} = 0$$

avec $u_{k,i} \in U_k$ et $j_{k,i} \in J_k A_{S_i}$. Après avoir chassé les dénominateurs et multiplié par un élément convenable de S_i on obtient une égalité dans A du type suivant

$$s_i u_{0,i} u_{1,i} u_{2,i} + u_{0,i} u_{1,i} j'_{2,i} + u_{0,i} j'_{1,i} + j'_{0,i} = 0$$

avec $s_i \in S_i$, $u_{k,i} \in U_k$ et $j'_{k,i} \in J_k$. On pose $u_k = \prod_i u_{k,i}$. En multipliant l'égalité précédente par un produit convenable on obtient une égalité

$$s_i u_0 u_1 u_2 + u_0 u_1 j''_{2,i} + u_0 j''_{1,i} + j''_{0,i} = 0$$

avec $s_i \in S_i$, $u_k \in U_k$ et $j''_{k,i} \in J_k$. Il reste à écrire $\sum_i a_i s_i = 1$, à multiplier l'égalité correspondant à S_i par a_i et à faire la somme. \square

Exemple d'application

En mathématiques classiques la dimension de Krull d'un anneau est la borne supérieure des dimensions de Krull des localisés en tous les idéaux maximaux. Cela résulte facilement (en mathématiques classiques) des propositions 1.34 et 1.35.

La proposition 1.35 devrait permettre d'obtenir constructivement les mêmes conséquences concrètes (que celles qu'on obtient non constructivement en mathématiques classiques en appliquant la propriété ci-dessus) même lorsqu'on n'a pas accès aux idéaux premiers.

Nous nous contentons ici d'un exemple simple, dans lequel on a accès aux idéaux premiers. Supposons que nous ayons une démonstration constructive simple que la dimension de Krull de $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, \dots, x_\ell]$ est $\leq \ell + 1$ (p est un nombre premier arbitraire, et $\mathbb{Z}_{(p)}$ est le localisé de \mathbb{Z} en $p\mathbb{Z}$). Alors nous pouvons en déduire le même résultat pour $A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\ell]$ en appliquant le principe local-global précédent.

Soit en effet une liste $(a_1, \dots, a_{\ell+2})$ dans A . Le collapsus de la chaîne idéale élémentaire $(a_1, \dots, a_{\ell+2})$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \dots, x_\ell]$ se relit comme un collapsus dans $\mathbb{Z}[1/m_0][x_1, \dots, x_\ell]$ pour un certain m_0 impair. Pour chacun des diviseurs premiers p_i de m_0 ($i = 1, \dots, k$), le collapsus de la chaîne idéale élémentaire $(a_1, \dots, a_{\ell+2})$ dans $\mathbb{Z}_{(p_i)}$ se relit comme un collapsus dans $\mathbb{Z}[1/m_i][x_1, \dots, x_\ell]$ pour un certain m_i étranger à p_i . Les entiers m_i ($i = 0, \dots, k$) engendrent l'idéal $\langle 1 \rangle$, donc les monoïdes $\mathcal{M}(m_i)$ sont comaximaux et on peut appliquer la proposition 1.35.

2 Treillis distributifs, relations implicatives et dimension de Krull

2.1 Treillis distributifs, idéaux et filtres

Un treillis distributif est un ensemble ordonné avec sup et inf finis, un élément minimum (noté 0) et un élément maximum (noté 1). On demande que les lois sup et inf soient distributives l'une par rapport à l'autre (une distributivité implique l'autre). On note ces lois \vee et \wedge . La relation $a \leq b$ peut être définie par $a \vee b = b$. La théorie des treillis distributifs est alors purement équationnelle. Il y a donc des treillis distributifs définis par générateurs et relations.

Une règle particulièrement importante, dite *coupure*, est la suivante

$$((x \wedge a) \leq b) \ \& \ (a \leq (x \vee b)) \implies a \leq b$$

pour la démontrer on écrit $x \wedge a \wedge b = x \wedge a$ et $a = a \wedge (x \vee b)$ donc

$$a = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (a \wedge x \wedge b) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

Un ensemble totalement ordonné est un treillis distributif s'il possède un maximum et un minimum. On note \mathbf{n} un ensemble totalement ordonné à n éléments (c'est un treillis distributif si $n > 0$). Tout produit de treillis distributifs est un treillis distributif. Les entiers naturels, munis de la relation de divisibilité, forment un treillis distributif (le minimum absolu est 1 et le maximum absolu est 0). Si T et T' sont deux treillis distributifs, l'ensemble $\text{Hom}(T, T')$ des homomorphismes (applications conservant, sup, inf, 0 et 1) de T vers T' est muni d'une structure d'ordre naturelle donnée par

$$\varphi \leq \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in T \quad \varphi(x) \leq \psi(x)$$

Une application entre deux treillis totalement ordonnés T et S est un homomorphisme si, et seulement si, elle est croissante et si 0_T et 1_T ont pour images 0_S et 1_S .

Notations 2.1 On note $\text{P}_{\text{fe}}(X)$ l'ensemble des parties finiment énumérées de l'ensemble X . Si A est une partie finiment énumérée d'un treillis distributif T on notera

$$\bigvee A := \bigvee_{x \in A} x \quad \text{et} \quad \bigwedge A := \bigwedge_{x \in A} x$$

Pour un treillis distributif T , on note $A \vdash B$ ou $A \vdash_T B$ la relation définie comme suit sur $\text{P}_{\text{fe}}(T)$.

$$A \vdash B \stackrel{\text{def}}{\iff} \bigwedge A \leq \bigvee B$$

Dans la suite nous dirons «partie finie» au lieu de «partie finiment énumérée».

Notez que la relation $A \vdash B$ est bien définie sur l'ensemble des parties finies parce que les lois \wedge et \vee sont associatives, commutatives et idempotentes.

Notons que $\emptyset \vdash \{x\}$ signifie $x = 1$, et $\{y\} \vdash \emptyset$ signifie $y = 0$.

La relation ainsi définie sur les parties finies vérifie les axiomes suivants, dans lesquels on écrit x pour $\{x\}$ et A, B pour $A \cup B$.

$$a \vdash a \quad (R)$$

$$A \vdash B \implies A, A' \vdash B, B' \quad (M)$$

$$(A, x \vdash B) \& (A \vdash B, x) \implies A \vdash B \quad (T)$$

on dit que la relation est *réflexive*, *monotone* et *transitive*. La troisième règle (transitivité) s'appelle aussi la règle de *coupure* (elle généralise la règle de coupure décrite au début de la section).

Signalons aussi les deux règles suivantes de *distributivité* :

$$(A, x \vdash B) \& (A, y \vdash B) \iff A, x \vee y \vdash B$$

$$(A \vdash B, x) \& (A \vdash B, y) \iff A \vdash B, x \wedge y$$

La proposition suivante est facile.

Proposition et définition 2.2 (Quotients particuliers d'un treillis distributif) *Soit T un treillis distributif et (J, U) un couple de parties de T . Nous noterons $T/(J = 0, U = 1)$ ou $T/(J, U)$ le treillis quotient de T par les relations $x = 0$ pour les $x \in J$ et $y = 1$ pour les $y \in U$. Ce quotient est décrit précisément comme suit.*

1. La classe d'équivalence de 0 est l'ensemble des a qui vérifient

$$\exists J_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(J), U_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(U) \quad a, U_0 \vdash_T J_0.$$

2. La classe d'équivalence de 1 est l'ensemble des b qui vérifient :

$$\exists J_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(J), U_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(U) \quad U_0 \vdash_T b, J_0.$$

3. Plus généralement, on a $a \leq_{T/(J,U)} b$ si, et seulement si, il existe une partie finie J_0 de J et une partie finie U_0 de U telles que

$$a, U_0 \vdash_T b, J_0.$$

Dans le cas où J et U sont finies, en posant $j = \bigwedge J$ et $u = \bigvee U$ on obtient simplement la condition

$$a, u \vdash_T b, j.$$

Dans cette proposition, si $U = \emptyset$, la classe d'équivalence de 0 est appelée un *idéal* du treillis, c'est l'idéal engendré par J . On le note $\langle J \rangle_T$. Un idéal I est soumis aux seules contraintes suivantes⁸ :

$$\begin{aligned} 0 &\in I \\ x, y \in I &\implies x \vee y \in I \\ x \in I, z \in T &\implies x \wedge z \in I \end{aligned}$$

(la dernière se réécrit $(x \in I, y \leq x) \implies y \in I$).

En outre pour tout homomorphisme de treillis distributifs $\varphi : T \rightarrow T'$, $\varphi^{-1}(0)$ est un idéal de T .

Un *idéal principal* est un idéal engendré par un élément a . On a $\langle a \rangle_T = \{x \in T ; x \leq a\}$. S'il n'est pas nécessaire de préciser T , on le note $\downarrow a$. Tout idéal de type fini est principal.

La notion opposée⁹ de celle d'idéal est la notion de *filtre*. Un filtre F est l'image réciproque de 1 par un homomorphisme de treillis distributifs. Il est soumis aux seules contraintes

$$\begin{aligned} 1 &\in F \\ x, y \in F &\implies x \wedge y \in F \\ x \in F, z \in T &\implies x \vee z \in F \end{aligned}$$

Soit $\psi : T \rightarrow T/(J, U)$ la projection canonique. Si I est l'idéal $\psi^{-1}(0)$ et F le filtre $\psi^{-1}(1)$, on dit que *l'idéal I et le filtre F sont conjugués*. D'après la proposition précédente, un idéal I et un filtre F sont conjugués si, et seulement si, on a pour tous $x \in T$, $I_0 \in \text{Pfe}(I)$, $F_0 \in \text{Pfe}(F)$:

$$(x, F_0 \vdash I_0) \implies x \in I \quad \text{et} \quad (F_0 \vdash x, I_0) \implies x \in F$$

Cela peut se reformuler comme suit :

$$(f \in F, x \wedge f \in I) \implies x \in I \quad \text{et} \quad (j \in I, x \vee j \in F) \implies x \in F$$

Lorsqu'un idéal I et un filtre F sont conjugués, on a

$$1 \in I \iff 0 \in F \iff (I, F) = (T, T)$$

D'après les propriétés générales des structures quotients dans les théories purement équationnelles, tout homomorphisme de treillis distributifs $\varphi : T \rightarrow T_1$ qui vérifie les égalités $\varphi(J) = \{0\}$ et $\varphi(U) = \{1\}$ se factorise de manière unique par le treillis quotient $T/(J, U)$.

On voit cependant sur l'exemple des ensembles totalement ordonnés qu'une structure quotient d'un treillis distributif n'est pas en général caractérisée par les classes d'équivalence de 0 et 1.

8. Si on remplace T par un anneau commutatif A , \vee par l'addition et \wedge par la multiplication, on trouve la notion d'idéal de l'anneau A .

9. Par renversement de la relation d'ordre.

2.2 Treillis distributifs et relations implicatives

Une manière intéressante d'aborder la question des treillis distributifs définis par générateurs et relations est de considérer la relation $A \vdash B$ définie sur l'ensemble $P_{fe}(T)$ des parties finiment énumérées d'un treillis distributif T . En effet, si $S \subseteq T$ engendre T comme treillis, alors la connaissance de la relation \vdash restreinte à $P_{fe}(S)$ suffit à caractériser sans ambiguïté le treillis T , car toute formule sur S peut être réécrite, au choix, en forme normale conjonctive (inf de sups dans S) ou normale disjonctive (sup de infs dans S). Donc si on veut comparer deux éléments du treillis engendré par S on écrit le premier en forme normale disjonctive, le second en forme normale conjonctive, et on remarque que

$$\bigvee_{i \in I} \left(\bigwedge A_i \right) \leq \bigwedge_{j \in J} \left(\bigvee B_j \right) \quad \iff \quad \&_{(i,j) \in I \times J} (A_i \vdash B_j)$$

Définition 2.3 Pour un ensemble S arbitraire, une relation sur $P_{fe}(S)$ qui est réflexive, monotone et transitive (voir page 19) est appelée une *relation implicative* (en anglais *entailment relation*).

L'origine des relations implicatives est dans le calcul des séquents de Gentzen, qui mit le premier l'accent sur la règle (T) (la coupure). Le lien avec les treillis distributifs a été mis en valeur dans [1, 5, 19]. Le théorème suivant (cf. [1, 19]) est fondamental. Il dit que les trois propriétés des relations implicatives sont exactement ce qu'il faut pour que l'interprétation en forme de treillis distributif soit adéquate.

Théorème 2.4 (Théorème fondamental des relations implicatives) *On considère un ensemble S avec une relation implicative \vdash_S sur $P_{fe}(S)$. On considère le treillis distributif T défini par générateurs et relations comme suit : les générateurs sont les éléments de S et les relations sont les*

$$A \vdash_T B$$

chaque fois que $A \vdash_S B$. Alors pour toutes parties finies A et B de S on a

$$A \vdash_T B \implies A \vdash_S B$$

Démonstration.

On donne une description explicite possible du treillis distributif T . Les éléments de T sont représentés par des ensembles finis d'ensembles finis d'éléments de S

$$X = \{A_1, \dots, A_n\}$$

(intuitivement X représente $\bigwedge A_1 \vee \dots \vee \bigwedge A_n$). On définit alors de manière inductive la relation $A \prec Y$ pour $A \in P_{fe}(S)$ et $Y \in T$ (intuitivement, $\bigwedge A \leq \bigvee_{C \in Y} (\bigwedge C)$) comme suit

— si $B \in Y$ et $B \subseteq A$ alors $A \prec Y$

— si on a $A \vdash_S y_1, \dots, y_m$ et $A, y_j \prec Y$ pour $j = 1, \dots, m$ alors $A \prec Y$

On montre facilement que si $A \prec Y$ et $A \subseteq A'$ alors on a $A' \prec Y$. On en déduit que $A \prec Z$ si $A \prec Y$ et $B \prec Z$ pour tout $B \in Y$. On peut alors définir $X \leq Y$ par $A \prec Y$ pour tout $A \in X$ et on vérifie que T est alors un treillis distributif¹⁰ pour les opérations

$$0 = \emptyset \quad 1 = \{\emptyset\} \quad X \vee Y = X \cup Y \quad X \wedge Y = \{A \cup B \mid A \in X, B \in Y\}$$

Pour ceci on montre que si $C \prec X$ et $C \prec Y$ alors on a $C \prec X \wedge Y$ par induction sur les démonstrations de $C \prec X$ et $C \prec Y$.

On remarque alors que si $A \vdash_S y_1, \dots, y_m$ et $A, y_j \vdash_S B$ pour tout j alors $A \vdash_S B$ en utilisant m fois la règle de coupure. Il en résulte que si on a $A \vdash_T B$, c'est à dire $A \prec \{\{b\} \mid b \in B\}$, alors on a $A \vdash_S B$. \square

10. T est en fait le quotient de $P_{fe}(P_{fe}(S))$ par la relation d'équivalence : $X \leq Y$ et $Y \leq X$.

Comme première application, nous pouvons citer la description du treillis booléen engendré par un treillis distributif. Rappelons qu'un treillis booléen est un treillis distributif muni d'une loi $x \mapsto \bar{x}$ qui vérifie, pour tout x : $x \wedge \bar{x} = 0$ et $x \vee \bar{x} = 1$. L'application $x \mapsto \bar{x}$ est alors un isomorphisme du treillis sur son opposé.

Proposition 2.5 *Soit T un treillis distributif ($\neq \mathbf{1}$). Il existe un treillis booléen engendré par T . Il peut être décrit comme le treillis distributif engendré par l'ensemble $T_1 = T \cup \bar{T}$ (où \bar{T} est une copie de T disjointe de T) muni de la relation implicative \vdash_{T_1} définie comme suit : si A, B, A', B' sont quatre parties finies de T on a*

$$A, \bar{B} \vdash_{T_1} A', \bar{B}' \stackrel{\text{def}}{\iff} A, B' \vdash A', B \quad \text{dans } T$$

Si on note T_{Bool} ce treillis booléen, l'ensemble T_1 s'injecte naturellement dans T_{Bool} . En particulier le morphisme naturel de T dans T_{Bool} est injectif, il identifie T à son image dans T_{Bool} .

Démonstration.

Voir [1]. □

Une autre application concerne les constructions de treillis quotients. Le contexte général est le suivant : T est un treillis distributif, S un système générateur de T et $A, B, X, Y \in \text{P}_{\text{fe}}(S)$. On note \vdash la relation implicative de T (restreinte à $\text{P}_{\text{fe}}(S)$). On considère un treillis quotient T' . On note \vdash' la relation implicative de T' restreinte à $\text{P}_{\text{fe}}(S)$. Notons que comme cas particulier on a les mêmes résultats pour $S = T$.

Le fait que T' est un quotient de T sous certaines relations imposées, et le fait que la structure de T' est entièrement déterminée par la restriction de $\vdash_{T'}$ à S implique que la relation implicative \vdash' est la plus forte des relations implicatives sur S moins fortes que \vdash et pour lesquelles les conditions imposées sont réalisées.

Proposition 2.6 *On considère le treillis T' quotient de T obtenu en forçant la relation $A \vdash' B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $X \vdash' Y$
2. Pour chaque $a \in A$ et chaque $b \in B$, on a $a : X, b \vdash Y$ et $X \vdash Y, a$.

Démonstration.

On vérifie facilement que la relation $X \vdash' Y$ définie par le point 2 est une relation implicative moins forte que \vdash et qu'elle satisfait $A \vdash' B$. Il suffit donc de vérifier que $X \vdash' Y$ implique $X \vdash_1 Y$ si \vdash_1 est une relation implicative moins forte que \vdash qui satisfait $A \vdash_1 B$. Or si $X \vdash' Y$ alors $X, b \vdash_1 Y$ et $X \vdash_1 Y, a$ pour chaque $a \in A$ et $b \in B$, et puisque $A \vdash_1 B$, cela donne après de nombreuses coupures $X \vdash_1 Y$. □

2.3 Idéaux premiers, premiers idéaux et spectre

Classiquement un *idéal premier* I d'un treillis $T \neq \mathbf{1}$ est un idéal dont le complémentaire F est un filtre (qui est alors un *filtre premier*). En mathématiques classiques il revient au même de dire que

$$1 \notin I \quad \text{et} \quad (x \wedge y) \in I \implies (x \in I \text{ ou } y \in I) \quad (*)$$

ou encore de dire que I est le noyau d'un homomorphisme de T vers le treillis à deux éléments, noté $\mathbf{2}$. En mathématiques constructives il semble logique de choisir la définition (*) qui est moins contraignante, mais en donnant sa pleine signification constructive au «ou». On définit la notion de filtre premier en renversant l'ordre.

On appelle *spectre du treillis distributif* T et on note $\text{Spec}(T)$ l'ensemble ordonné $\text{Hom}(T, \mathbf{2})$. Il revient au même de considérer l'ensemble des idéaux premiers détachables de T . La relation d'ordre correspond alors à l'inclusion renversée des idéaux premiers¹¹. On a $\text{Spec}(\mathbf{1}) = \emptyset$, $\text{Spec}(\mathbf{2}) \simeq \mathbf{1}$, $\text{Spec}(\mathbf{3}) \simeq \mathbf{2}$, $\text{Spec}(\mathbf{4}) \simeq \mathbf{3}$, etc. . .

Le lemme suivant montre la pertinence du point de vue «relation implicative sur une partie génératrice» pour décrire un treillis distributif.

Lemme 2.7 (en mathématiques classiques) *Soit T un treillis distributif et S une partie génératrice de T . Un idéal premier P de T est caractérisé par sa trace sur S .*

Démonstration.

Notons F le filtre complémentaire de P , $P_S = P \cap S$ et $F_S = F \cap S$. Un élément z arbitraire de T s'écrit sous forme $z = \bigvee_i (\bigwedge A_i)$ pour un nombre fini de parties finies A_i de S . Puisque P est un idéal, on a $z \in P$ si, et seulement si, chacun des $\bigwedge A_i \in P$. Il nous faut donc tester si $\bigwedge A \in P$ pour une partie finie A de S . Soit $a = \bigwedge A = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$ avec les $a_j \in S$. Si chacun des $a_j \in F_S$ alors $a \in F$ donc $a \notin P$. Si l'un des a_j est dans P_S , alors $a \in P$. \square

Définition 2.8 Soit T un treillis distributif.

1. Une *spécification partielle pour un idéal premier* (ce que nous abrégeons en *premier idéal*, en anglais *idealistic prime*) est un couple $\mathcal{P} = (J, U)$ de parties de T .
2. Un premier idéal $\mathcal{P} = (J, U)$ est dit *complet* si J est un idéal et U est un filtre.
3. Si P est un idéal premier et $S = T \setminus P$, on note \hat{P} le premier idéal (P, S) .
4. Soient $\mathcal{P}_1 = (J_1, U_1)$ et $\mathcal{P}_2 = (J_2, U_2)$ deux premiers idéaux et P un idéal premier.
 - On dit que \mathcal{P}_1 est contenu dans \mathcal{P}_2 et on écrit $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ si $J_1 \subseteq J_2$ et $U_2 \subseteq U_1$.
 - On dit que \mathcal{P}_2 est un raffinement de \mathcal{P}_1 et on écrit $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ si $J_1 \subseteq J_2$ et $U_1 \subseteq U_2$.
 - On dit que l'idéal premier P raffine le premier idéal \mathcal{P} si $\mathcal{P} \leq \hat{P}$ (ceci explique le point 1).
5. Un premier idéal (J, U) est dit *saturé* si J est un idéal, U un filtre et si J et U sont conjugués. Tout premier idéal engendre un premier idéal saturé (I, F) décrit à la proposition 2.2.
6. On dit que le premier idéal (J, U) *collapse* ou *s'effondre* si le treillis quotient $T' = T/(J, U)$ est réduit à un point, c'est-à-dire $1 \leq_{T'} 0$. Cela signifie que l'idéal engendré par J coupe le filtre engendré par U .

On peut résumer le collapsus par les deux lemmes qui suivent.

Lemme 2.9 *Un premier idéal qui s'effondre raffine un premier idéal fini qui s'effondre.*

Lemme 2.10 *Un premier idéal fini (J, U) s'effondre si, et seulement si, $U \vdash J$ dans T .*

Le lemme suivant est une généralisation du lemme 2.7. En outre sa preuve est constructive, sans utilisation du tiers exclu.

Lemme 2.11 *Soit T un treillis distributif et S une partie génératrice de T .*

1. *Un premier idéal saturé (J, U) de T est caractérisé par sa trace sur S .*
2. *Plus précisément, soient J_S et U_S deux parties de S qui satisfont les conditions nécessaires suivantes :*
 - *si $J_0 \in P_{\text{fe}}(J_S)$, $U_0 \in P_{\text{fe}}(U_S)$, $x \in S$ et $U_0 \vdash x$, J_0 , alors $x \in U_S$,*
 - *si $J_0 \in P_{\text{fe}}(J_S)$, $U_0 \in P_{\text{fe}}(U_S)$, $x \in S$ et $U_0, x \vdash U_0$, alors $x \in J_S$.*

11. Pour la topologie spectrale usuelle de $\text{Spec}(T)$, la relation d'ordre usuellement choisie est celle de l'inclusion des idéaux premiers. Cela ne change pas notre propos sur la dimension de Krull.

Alors il existe un unique premier idéal saturé (J, U) de T tel que $J_S = J \cap S$ et $U_S = U \cap S$.

3. On peut dire la même chose sous la forme suivante, d'apparence plus générale.
Si J_S et U_S sont deux parties de S et si (J, U) est le premier idéal saturé de T engendré par le premier idéal (J_S, U_S) , alors
- $U \cap S = \{x \in S \mid \exists U_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(U_S) \exists J_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(J_S) \ U_0, \vdash x, J_0\}$,
 - $J \cap S = \{x \in S \mid \exists U_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(U_S) \exists J_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(J_S) \ U_0, x \vdash J_0\}$.

Démonstration.

On démontre le point 3. On considère sur S la relation implicative \vdash_1 définie comme suit

$$A \vdash_1 B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists U_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(U_S) \exists J_0 \in \text{P}_{\text{fe}}(J_S) \ U_0, A \vdash B, J_0 \quad (3)$$

Il est immédiat qu'il s'agit bien d'une relation implicative. Le treillis T_1 défini par \vdash_1 est le treillis quotient $T/(J_S = 0, U_S = 1)$. En effet, la relation implicative définie par le second membre de l'équivalence (3) est la plus petite possible parmi celles qui raffinent \vdash et qui forcent $J_S = 0$ et $U_S = 1$. En notant $J = \{z \in T \mid z =_{T_1} 0\}$ et $U = \{z \in T \mid z =_{T_1} 1\}$ on obtient donc que (J, U) est le premier idéal saturé de T engendré par (J_S, U_S) . Et les égalités indiquées pour $J \cap S$ et $U \cap S$ sont immédiates. \square

On établit maintenant le théorème suivant analogue au théorème 1.4.

Théorème 2.12 (Collapsus simultané pour les premiers idéaux d'un treillis distributif) *Soit un premier idéal (J, U) et un élément x dans un treillis distributif T .*

1. *Si les premiers idéaux $(J, x; U)$ et $(J; U, x)$ s'effondrent, alors (J, U) s'effondre également.*
2. *Le premier idéal (J, U) engendre un premier idéal saturé minimum. Celui-ci s'obtient en ajoutant dans U (resp. J) tout élément $x \in A$ tel que le premier idéal $(J, x; U)$ (resp. $(J; U, x)$) s'effondre.*

Démonstration.

Voyons le point 1. On a des parties finies J_0, J_1 de J et des parties finies U_0, U_1 de U telles que

$$x, U_0 \vdash J_0 \quad \text{et} \quad U_1 \vdash x, J_1$$

donc

$$x, U_0, U_1 \vdash J_0, J_1 \quad \text{et} \quad U_0, U_1 \vdash x, J_0, J_1$$

Donc, par coupure,

$$U_0, U_1 \vdash J_0, J_1$$

Le point 2 a déjà été démontré (avec une formulation légèrement différente) dans la proposition 2.2. \square

On notera que pour les premiers idéaux d'un treillis distributif le théorème de collapsus simultané est pratiquement la même chose que la règle de coupure.

Voici l'analogue du lemme de Krull 1.5.

Corolaire 2.13 (Nullstellensatz formel pour les premiers idéaux dans un treillis distributif) *Le théorème de compacité implique le résultat suivant.*

1. *Si (J, U) est un premier idéal qui ne s'effondre pas, il existe $\varphi \in \text{Spec}(T)$ tel que $J \subseteq \varphi^{-1}(0)$ et $U \subseteq \varphi^{-1}(1)$. En particulier :*
2. *Si $b \not\leq a$, il existe $\varphi \in \text{Spec}(T)$ tel que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 1$.*
3. *Si $a \in T$, l'idéal $\downarrow a$ est intersection des idéaux premiers qui contiennent a .*

4. Si $T \neq \mathbf{1}$ alors $\text{Spec}(T)$ est non vide.

Démonstration.

Il suffit de montrer le point 1. On peut recopier les démonstrations du corollaire 1.5 (l'une utilisant le tiers exclu et le lemme de Zorn, l'autre utilisant le théorème de compacité) en se basant sur le théorème de collapsus simultané. Mais dans le cas des treillis distributifs, la démonstration par le théorème de compacité est plus directe : il n'y a en effet pas besoin de faire référence au théorème de collapsus simultané, qui n'est qu'une reformulation de la coupure, inhérente à la structure de treillis distributif. \square

Voici l'analogie du corollaire 1.8.

Corollaire 2.14 Soit $\mathcal{P} = (J, U)$ un premier idéal dans un treillis distributif T et (I, V) le saturé de \mathcal{P} . Le théorème de compacité implique que I est l'intersection des idéaux premiers qui contiennent J et ne coupent pas U , tandis que V est l'intersection des complémentaires de ces mêmes idéaux premiers. En particulier tout idéal de T est intersection des idéaux premiers qui le contiennent.

Un corollaire de 2.13 est le théorème de représentation suivant (théorème de Birkhoff).

Théorème 2.15 (Théorème de représentation) *Le théorème de compacité implique le résultat suivant. L'application $\theta_T : T \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(T))$ définie par $a \mapsto \{\varphi \in \text{Spec}(T) ; \varphi(a) = 1\}$ est un homomorphisme injectif de treillis distributifs. Autrement dit, tout treillis distributif peut être représenté comme un sous-treillis du treillis des parties d'un ensemble.*

Un autre corollaire est le suivant.

Proposition 2.16 (Lying over, treillis distributifs) *Le théorème de compacité implique le résultat suivant. Soit $\varphi : T \rightarrow T'$ un homomorphisme de treillis distributifs. Alors φ est injectif si, et seulement si, le morphisme dual $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(T') \rightarrow \text{Spec}(T)$ est surjectif.*

Démonstration.

On a les équivalences : $a \neq b \iff a \wedge b \neq a \vee b \iff a \vee b \not\leq a \wedge b$.

Supposons que $\text{Spec}(\varphi)$ est surjectif. Si $a \neq b$ dans T , soit $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ et $\psi \in \text{Spec}(T)$ tel que $\psi(a \vee b) = 1$ et $\psi(a \wedge b) = 0$. Puisque $\text{Spec}(\varphi)$ est surjectif il existe $\psi' \in \text{Spec}(T')$ tel que $\psi = \psi' \varphi$ donc $\psi'(a' \vee b') = 1$ et $\psi'(a' \wedge b') = 0$, donc $a' \vee b' \not\leq a' \wedge b'$ et $a' \neq b'$.

Supposons que φ est injectif. Identifions T à un sous-treillis distributif de T' .

Si $\psi \in \text{Spec}(T)$, soient $I = \psi^{-1}(0)$ et $F = \psi^{-1}(1)$. Alors (I, F) ne peut pas s'effondrer dans T' car cela le ferait s'effondrer dans T . Donc il existe $\psi' \in \text{Spec}(T')$ tel que $\psi'(I) = 0$ et $\psi'(F) = 1$, ce qui signifie $\psi = \psi' \varphi$. \square

Naturellement, il est difficile d'attribuer un contenu calculatoire (autre que le théorème 2.12) aux quatre résultats précédents des mathématiques classiques. Une solution intuitive est de dire qu'on ne risque sûrement pas de se tromper *en faisant comme si* un treillis distributif donné T était un sous-treillis du treillis des parties d'un ensemble. Le but du programme de Hilbert est de donner un contenu précis à cette affirmation intuitive. Que faut-il entendre précisément par «ne risquer sûrement pas de se tromper» et par «en faisant comme si» ?

2.4 Chaînes partiellement spécifiées d'idéaux premiers

Définition 2.17 Dans un treillis distributif T

1. Une *spécification partielle pour une chaîne d'idéaux premiers* (ce que nous abrégons en *chaîne idéale*) est définie comme suit. Une chaîne idéale de longueur ℓ est une liste de $\ell + 1$ premiers idéaux de $T : \mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_\ell)$. La chaîne idéale est dite finie si tous les \mathcal{C}_i sont finis. Une chaîne idéale de longueur 0 n'est autre qu'un *premier idéal*.
2. Une chaîne idéale est dite *saturée* si les \mathcal{C}_i sont saturés et si $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_{i+1}$ pour chaque i .
3. On dit qu'une chaîne idéale $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}'_0, \dots, \mathcal{C}'_\ell)$ est un *raffinement de la chaîne idéale* \mathcal{C} si on a $\mathcal{C}_k \leq \mathcal{C}'_k$ pour chaque k .
4. On dit qu'une chaîne idéale \mathcal{C} *collapse* ou encore *s'effondre* si la seule chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} est la chaîne idéale triviale $((T, T), \dots, (T, T))$.

Lemme 2.18 Une chaîne idéale $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_\ell)$ s'effondre dès que l'un des \mathcal{C}_j s'effondre.

Démonstration.

Soit $((I_0, F_0), \dots, (I_\ell, F_\ell))$ une chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} . Si le premier idéal (I_h, F_h) s'effondre, puisque I_h et F_h sont conjugués, on a $1 \in I_h$ et $0 \in F_h$. Pour tout indice $j > h$ on a donc $1 \in I_j$ donc $0 \in F_j$. De même pour tout indice $j < h$ on a $0 \in F_j$ donc $1 \in I_j$. \square

Dans le théorème suivant les points 3 et 2 sont analogues aux points 1 et 2 dans les théorèmes 2.12 et 1.19. Notez qu'ici l'analogie des lemmes de finitude évidents 1.3, 1.15 et 2.9, n'est pas évident. Il résulte du théorème qui suit.

Théorème 2.19 (Effondrement d'une chaîne idéale, saturation et collapsus simultané dans les treillis distributifs)

Soit une chaîne idéale $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ dans un treillis distributif T .

1. — La chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre si elle raffine une chaîne idéale finie qui s'effondre.
— Lorsque \mathcal{C} est finie elle s'effondre si, et seulement si, il existe $x_1, \dots, x_\ell \in T$ tels que :

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, U_0 & \vdash & J_0 \\
 x_2, U_1 & \vdash & J_1, x_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 x_\ell, U_{\ell-1} & \vdash & J_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\
 U_\ell & \vdash & J_\ell, x_\ell
 \end{array} \tag{4}$$

2. La chaîne idéale \mathcal{C} engendre une chaîne idéale saturée minimum : on ajoute dans U_i tout élément x de T tel que la chaîne idéale $((J_0, U_0), \dots, (J_i, x; U_i), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ s'effondre et on ajoute dans J_i tout élément x tel que la chaîne idéale $((J_0, U_0), \dots, (J_i; U_i, x), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ s'effondre.
3. Soit $x \in T$. Supposons que les chaînes idéales $((J_0, U_0), \dots, (J_i, x; U_i), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ et $((J_0, U_0), \dots, (J_i; U_i, x), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ s'effondrent toutes les deux, alors \mathcal{C} s'effondre également.

Démonstration.

Voyons d'abord les deux premiers points, qui se démontrent simultanément. Il n'est pas vraiment restrictif de supposer que la chaîne idéale \mathcal{C} est finie, car une fois le résultat établi dans ce cas, on passe au cas général en regardant la chaîne idéale donnée comme limite inductive des chaînes idéales finies dont elle est un raffinement.

Nous notons $\mathcal{C}^1 = ((I_0, F_0), \dots, (I_\ell, F_\ell))$ la chaîne idéale construite en 2. On va démontrer

- (α) Si \mathcal{C} vérifie les inégalités (4), toute chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} est triviale (i.e., \mathcal{C} s'effondre).
- (β) La chaîne idéale \mathcal{C}^1 est bien saturée.
- (γ) Toute chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} raffine également \mathcal{C}^1 .
- (δ) Si \mathcal{C}^1 est triviale, \mathcal{C} vérifie les inégalités (4).

Cela suffira bien à montrer 1 et 2.

(α) Soit $\mathcal{C}' = ((I'_0, F'_0), \dots, (I'_\ell, F'_\ell))$ une chaîne idéale saturée qui raffine \mathcal{C} . Considérons les inégalités (4)

$$\begin{array}{rcl} x_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ x_2, U_1 & \vdash & J_1, x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_\ell, U_{\ell-1} & \vdash & J_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\ U_\ell & \vdash & J_\ell, x_\ell \end{array}$$

Puisque I'_0 et F'_0 sont conjugués, la première inégalité donne $x_1 \in I'_0$. Donc $x_1 \in I'_1$, et la deuxième inégalité donne $x_2 \in I'_1$. En poursuivant, on obtient à la dernière inégalité $U_\ell \vdash J_\ell, x_\ell$ avec $x_\ell \in I'_\ell$ et $U_\ell \subseteq F'_\ell$. Donc (I'_ℓ, F'_ℓ) s'effondre (lemme 2.10). Donc \mathcal{C}' s'effondre (lemme 2.18).

(β) Nous faisons la démonstration avec $\ell = 3$. Montrons d'abord que les I_j sont des idéaux. Nous faisons la démonstration avec $j = 1$. Pour montrer $0 \in I_1$ on prend $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$. De même pour montrer $J_1 \subseteq I_1$ on prend un $x \in J_1$ et $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$. Le fait que $x \in I_1$ et $y \leq x$ impliquent $y \in I_1$ est immédiat : on garde les mêmes x_i . Supposons maintenant $x, y \in I_1$ et montrons $x \vee y \in I_1$. Par hypothèse nous avons des x_i et y_i vérifiant les inégalités suivantes.

$$\begin{array}{rcl} x_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ x_2, U_1, x & \vdash & J_1, x_1 \\ x_3, U_2 & \vdash & J_2, x_2 \\ U_3 & \vdash & J_3, x_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ y_2, U_1, y & \vdash & J_1, y_1 \\ y_3, U_2 & \vdash & J_2, y_2 \\ U_3 & \vdash & J_3, y_3 \end{array}$$

On en déduit, en utilisant la distributivité

$$\begin{array}{rcl} (x_1 \vee y_1), U_0 & \vdash & J_0 \\ (x_2 \wedge y_2), U_1, (x \vee y) & \vdash & J_1, (x_1 \vee y_1) \\ (x_3 \wedge y_3), U_2 & \vdash & J_2, (x_2 \wedge y_2) \\ U_3 & \vdash & J_3, (x_3 \wedge y_3) \end{array}$$

Montrons maintenant que idéaux et filtres sont conjugués. Par exemple avec I_1 et F_1 . Nous supposons $x \wedge y \in I_1, y \in F_1$ et nous montrons $x \in I_1$. Par hypothèse nous avons des x_i et y_i vérifiant les inégalités suivantes.

$$\begin{array}{rcl} x_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ x_2, U_1, (x \wedge y) & \vdash & J_1, x_1 \\ x_3, U_2 & \vdash & J_2, x_2 \\ U_3 & \vdash & J_3, x_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ y_2, U_1 & \vdash & J_1, y_1, y \\ y_3, U_2 & \vdash & J_2, y_2 \\ U_3 & \vdash & J_3, y_3 \end{array}$$

On en déduit, en utilisant la distributivité

$$\begin{array}{rcl} (x_1 \vee y_1), U_0 & \vdash & J_0 \\ (x_2 \wedge y_2), U_1, x, y & \vdash & J_1, (x_1 \vee y_1) \\ (x_2 \wedge y_2), U_1, x & \vdash & J_1, (x_1 \vee y_1), y \\ (x_3 \wedge y_3), U_2 & \vdash & J_2, (x_2 \wedge y_2) \\ U_3 & \vdash & J_3, (x_3 \wedge y_3) \end{array}$$

Les inégalités n°2 et 3 donnent par coupure

$$(x_2 \wedge y_2), U_1, x \vdash J_1, (x_1 \vee y_1)$$

La démonstration est complète.

(γ) Nous faisons la démonstration avec $\ell = 3$. Soit $((I'_0, F'_0), \dots, (I'_3, F'_3))$ une chaîne idéale

saturée qui raffine \mathcal{C} . Montrons par exemple $I_1 \subseteq I'_1$. Soit $x \in I_1$, on a donc

$$\begin{array}{lcl} x_1, U_0 & \vdash & J_0 \\ x, x_2, U_1 & \vdash & J_1, x_1 \\ x_3, U_2 & \vdash & J_2, x_2 \\ U_3 & \vdash & J_3, x_3 \end{array}$$

On en déduit successivement $x_1 \in I'_0 \subseteq I'_1$, $x_3 \in F'_3 \subseteq F'_2$, $x_2 \in F'_2 \subseteq F'_1$, et enfin $x \in I'_1$. Remarquez que la démonstration du point (α) peut être vue comme un cas particulier de celle du point (γ) .

Le point (δ) est immédiat

Prouvons enfin β . Nous avons $x \in I_i$ et $x \in F_i$, donc \mathcal{C}^1 s'effondre (lemme 2.18). Donc \mathcal{C} s'effondre. \square

Corolaire 2.20 Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k)$ une chaîne idéale saturée et \mathcal{Q} un premier idéal saturé tel que $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{Q}$. La chaîne idéale $(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ s'effondre si, et seulement si, la chaîne idéale $(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ s'effondre.

Notez que $(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ est saturée par définition.

Définition 2.21 Deux chaînes idéales qui engendrent la même chaîne idéale saturée sont dites *équivalentes*. Une chaîne idéale équivalente à une chaîne idéale finie est appelée une *chaîne idéale de type fini*.

Nous regardons une chaîne idéale $\mathcal{C} = (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k)$ comme une spécification partielle pour une chaîne croissante d'idéaux premiers P_0, \dots, P_k où chaque P_i raffine \mathcal{P}_i . Du théorème de collapsus simultané on déduit le résultat suivant qui justifie cette idée de spécification partielle.

Théorème 2.22 (Nullstellensatz formel pour les chaînes d'idéaux premiers dans un treillis distributif) *Le théorème de compacité implique le résultat suivant. Soit T un treillis distributif et $((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale dans T . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Il existe $\ell + 1$ idéaux premiers $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ tels que $J_i \subseteq P_i$, $U_i \cap P_i = \emptyset$, ($i = 0, \dots, \ell$).*
- (b) *La chaîne idéale ne s'effondre pas.*

La démonstration est essentiellement la même que celle du théorème 1.22.

2.5 Définition constructive de la dimension d'un treillis distributif

On peut développer une théorie constructive de la dimension de Krull d'un treillis distributif selon les mêmes lignes que ce qui a été développé pour les anneaux commutatifs dans la section 1, c'est ce que nous faisons dans la section présente.

On peut aussi utiliser une idée de Joyal : construire un treillis $\text{Kr}_\ell(T)$ universel attaché à T tel que les points de $\text{Spec}(\text{Kr}_\ell(T))$ soient (de manière naturelle) les chaînes d'idéaux premiers de longueur ℓ .

La théorie de Joyal sera expliquée dans la section 3. On montrera que les deux points de vue sont isomorphes.

Définition 2.23

1. Une *chaîne idéale élémentaire* dans un treillis distributif T est une chaîne idéale de la forme suivante

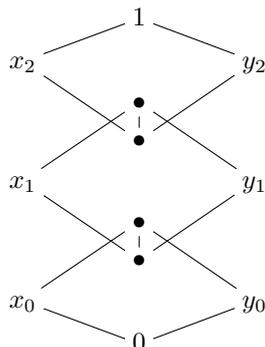
$$((0; x_0), (x_0; x_1), \dots, (x_\ell; 1))$$

(avec les x_i dans T). On la note $\overline{(x_0, \dots, x_\ell)}$.

2. Un treillis distributif T est dit *de dimension $\leq \ell$* si toute chaîne idéale élémentaire (x_0, \dots, x_ℓ) de longueur $1 + \ell$ s'effondre, i.e. s'il existe $y_0, \dots, y_\ell \in T$ tels que

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \vdash & y_\ell, x_\ell \\
 y_\ell, x_\ell & \vdash & y_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 y_1, x_1 & \vdash & y_0, x_0 \\
 y_0, x_0 & \vdash & 0
 \end{array} \tag{5}$$

On notera $\dim T \leq \ell$. Par exemple pour la dimension 2 cela correspond au dessin suivant dans T



3. Deux suites (x_0, \dots, x_ℓ) et (y_0, \dots, y_ℓ) qui vérifient les relations du point 2 sont dites *complémentaires*.

En particulier le treillis distributif T est de dimension ≤ -1 si, et seulement si, $1 = 0$ dans T , et de dimension ≤ 0 si, et seulement si, T est une algèbre de Boole (tout élément de T a un complément).

Nous ne donnerons pas dans le cadre des treillis distributifs de définition pour $\dim(T) < \ell$ ni pour $\dim(T) \geq \ell$ et nous nous contenterons de dire que $\dim(T) > \ell$ signifie l'impossibilité de $\dim(T) \leq \ell$. On pourra introduire les mêmes raffinements que dans la section 1.4 lorsqu'on a une relation d'inégalité dans T qui n'est pas la simple impossibilité de l'égalité.

Le corollaire suivant du Nullstellensatz formel 2.22 nous dit que la définition constructive est bien équivalente à la définition usuelle donnée en mathématiques classiques.

Théorème 2.24 *Le théorème de compacité implique que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Les chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers ont une longueur $< \ell$.*
- (b) *Toute chaîne idéale élémentaire de longueur ℓ s'effondre.*

3 La Théorie de Joyal pour la dimension de Krull

3.1 Treillis de Krull associés à un treillis distributif

L'idée de Joyal est de construire un treillis $\text{Kr}_\ell(T)$ universel attaché à T tel que les points de $\text{Spec}(\text{Kr}_\ell(T))$ soient (de manière naturelle) les chaînes croissantes d'idéaux premiers de longueur ℓ .

Donner une telle chaîne revient à donner des homomorphismes $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_\ell$ de T vers $\mathbf{2}$.

Si donc on a un treillis distributif K_ℓ et $\ell + 1$ homomorphismes $\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_\ell$ de T vers K_ℓ tels que, pour tout treillis T' et tous $\psi_0 \geq \psi_1 \geq \dots \geq \psi_\ell \in \text{Hom}(T, T')$ on ait une

homomorphisme unique $\eta : K_\ell \rightarrow T'$ vérifiant $\eta\varphi_0 = \psi_0, \eta\varphi_1 = \psi_1, \dots, \eta\varphi_\ell = \psi_\ell$, alors on aura les éléments de $\text{Spec}(K_\ell)$ qui s'identifient naturellement aux chaînes d'idéaux premiers de longueur ℓ dans T .

L'avantage est que K_ℓ est toujours un objet qu'on peut construire explicitement à partir de T , contrairement aux idéaux premiers et aux spectres. En effet le fait qu'un tel objet universel

$$(\text{Kr}_\ell(T), \varphi_0, \dots, \varphi_\ell)$$

existe toujours de manière constructive résulte de considérations générales d'algèbre universelle¹².

Résumons la discussion précédente.

Lemme 3.1 (Un autre Nullstellensatz formel pour les chaînes d'idéaux premiers dans un treillis distributif) *Soit $(J_k)_{0 \leq k \leq \ell}$ et $(U_k)_{0 \leq k \leq \ell}$ des parties d'un treillis distributif T non trivial.*

Il revient au même de se donner

- *une chaîne d'idéaux premiers détachables P_k de T qui vérifient $J_k \subseteq P_k$ et $U_k \cap P_k = \emptyset$,*
- *ou un homomorphisme $\psi : \text{Kr}_\ell(T) \rightarrow \mathbf{2}$ (i.e. un point de $\text{Spec}(\text{Kr}_\ell(T))$) tel que $\psi(\varphi_k(J_k)) = 0$ et $\psi(\varphi_k(U_k)) = 1$ pour $0 \leq k \leq \ell$.*

Ceci motive la définition constructive alternative suivante.

Définition alternative 3.2 (alternative à la définition 2.23)

Pour $0 \leq i \leq \ell + 1$, notons $\varphi_i : T \rightarrow \text{Kr}_{\ell+1}(T)$ les $\ell + 2$ morphismes universels.

On dit que le treillis distributif T est de dimension $\leq \ell$ si pour tous éléments $x_1, \dots, x_{\ell+1} \in T$, on a $\varphi_0(x_1), \dots, \varphi_\ell(x_{\ell+1}) \vdash \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_{\ell+1}(x_{\ell+1})$ dans $\text{Kr}_{\ell+1}(T)$.

Et l'on obtient comme corolaire du lemme 3.1 la proposition suivante.

Proposition 3.3 *Le théorème de compacité implique le résultat suivant. Un treillis distributif T est de dimension $\leq \ell$ au sens usuel des mathématiques classiques si, et seulement si, il satisfait la définition constructive 3.2.*

Démonstration.

La définition classique usuelle dit qu'il n'existe pas de chaîne d'idéaux premiers $P_0, \dots, P_{\ell+1}$ avec $x_1, \dots, x_{\ell+1}$ satisfaisant $x_1 \in P_1 \setminus P_0, x_2 \in P_2 \setminus P_1, \dots, x_{\ell+1} \in P_{\ell+1} \setminus P_\ell$. Autrement dit, d'après le théorème de compacité et le lemme 3.1, dans le treillis $\text{Kr}_{\ell+1}(T)$, le premier idéal

$$(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_{\ell+1}(x_{\ell+1}); \varphi_0(x_1), \dots, \varphi_\ell(x_{\ell+1}))$$

doit s'effondrer. Cela signifie d'après le lemme 2.10 que l'on a

$$\varphi_0(x_1), \dots, \varphi_\ell(x_{\ell+1}) \vdash_{\text{Kr}_{\ell+1}(T)} \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_{\ell+1}(x_{\ell+1}).$$

□

La définition alternative est assez sympathique parce qu'elle permet d'obtenir facilement la caractérisation plus simple suivante dans laquelle intervient seulement un système générateur S du treillis.

Lemme 3.4 *Un treillis distributif T engendré par une partie S est de dimension $\leq \ell$ (définition 3.2) si, et seulement si, pour tous $x_1, \dots, x_{\ell+1} \in S$, on a*

$$\varphi_0(x_1), \dots, \varphi_\ell(x_{\ell+1}) \vdash_{\text{Kr}_{\ell+1}(T)} \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_{\ell+1}(x_{\ell+1}).$$

¹². Ou encore de la description des problèmes universels qui admettent une solution dans la théorie des structures de Bourbaki.

En effet les règles de distributivité permettent par exemple de déduire

$$a \vee a', A \vdash b \vee b', B$$

de $a, A \vdash b, B$ et $a', A \vdash b', B$. Par ailleurs tout élément de T est un inf de sups d'éléments de S .

3.2 Comparaison des deux points de vue

La description explicite de $\text{Kr}_\ell(T)$ a été simplifiée par la considération des relations implicatives ([1, section 4.4]). Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème 3.5 *Soit T un treillis distributif. On considère le problème universel suivant, que nous appelons «problème de Krull» : trouver un treillis distributif K_ℓ et $\ell + 1$ homomorphismes $\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_\ell$ de T vers K_ℓ tels que, pour tout treillis T' et tous $\psi_0 \geq \psi_1 \geq \dots \geq \psi_\ell \in \text{Hom}(T, T')$ on ait un homomorphisme unique $\eta : K_\ell \rightarrow T'$ vérifiant $\eta\varphi_0 = \psi_0, \eta\varphi_1 = \psi_1, \dots, \eta\varphi_\ell = \psi_\ell$. Ce problème universel admet une solution (unique à isomorphisme unique près). On note $\text{Kr}_\ell(T)$ le treillis distributif correspondant. Il peut être décrit comme le treillis engendré par la réunion disjointe S_ℓ de $\ell + 1$ copies de T (on note φ_i la bijection de T sur la copie indexée par i) munie de la relation implicative \vdash_{S_ℓ} définie comme suit. Si A_i et B_i ($i = 0, \dots, \ell$) sont des parties finies de T on a*

$$\varphi_0(A_0), \dots, \varphi_\ell(A_\ell) \vdash_{S_\ell} \varphi_0(B_0), \dots, \varphi_\ell(B_\ell) \quad (*)$$

si, et seulement si, il existe $u_1, \dots, u_\ell \in T$ avec les relations suivantes dans T (où \vdash est la relation implicative de T) :

$$\begin{array}{ccc} u_1, A_0 & \vdash & B_0 \\ u_2, A_1 & \vdash & B_1, u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_\ell, A_{\ell-1} & \vdash & B_{\ell-1}, u_{\ell-1} \\ & & A_\ell \vdash B_\ell, u_\ell \end{array} \quad (**)$$

Démonstration.

On montre d'abord que la relation \vdash_{S_ℓ} définie sur $\text{P}_{\text{fe}}(S_\ell)$ dans le théorème est bien une relation implicative. Le seul point délicat est la règle de coupure. Pour simplifier les notations, on fait la démonstration avec $\ell = 3$. Il y a alors 3 cas possibles, et on analyse un des cas possibles, celui où $X, \varphi_1(z) \vdash_{S_3} Y$ et $X \vdash_{S_3} Y, \varphi_1(z)$, les autres cas étant semblables. Par hypothèse on a $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ tels que

$$\begin{array}{ccc} u_1, A_0 & \vdash & B_0 & v_1, A_0 & \vdash & B_0 \\ u_2, A_1, z & \vdash & B_1, u_1 & v_2, A_1 & \vdash & B_1, v_1, z \\ u_3, A_2 & \vdash & B_2, u_2 & v_3, A_2 & \vdash & B_2, v_2 \\ A_3 & \vdash & B_3, u_3 & A_3 & \vdash & B_3, v_3 \end{array}$$

Les deux relations implicatives sur la deuxième ligne donnent

$$u_2, v_2, A_1, z \vdash B_1, u_1, v_1 \quad u_2, v_2, A_1 \vdash B_1, u_1, v_1, z$$

donc par coupure

$$u_2, v_2, A_1 \vdash B_1, u_1, v_1$$

c'est-à-dire

$$u_2 \wedge v_2, A_1 \vdash B_1, u_1 \vee v_1$$

Finalement, en utilisant la distributivité

$$\begin{array}{l} (u_1 \vee v_1), A_0 \vdash B_0 \\ (u_2 \wedge v_2), A_1 \vdash B_1, (u_1 \vee v_1) \\ (u_3 \wedge v_3), A_2 \vdash B_2, (u_2 \wedge v_2) \\ A_3 \vdash B_3, (u_3 \wedge v_3) \end{array}$$

et donc $\varphi_0(A_0), \dots, \varphi_3(A_3) \vdash_{S_3} \varphi_0(B_0), \dots, \varphi_3(B_3)$.

Il reste à voir que le treillis $\text{Kr}_\ell(T)$ défini à partir de $(S_\ell, \vdash_{S_\ell})$ vérifie bien la propriété universelle voulue. La solution du problème universel posé existe pour des raisons générales d'algèbre universelle. Et on sait que $\text{Kr}_\ell(T)$ est nécessairement engendré par S_ℓ . Il suffit donc de définir sur S_ℓ la relation implicative la moins contraignante possible (avec la condition que les φ_i forment une suite décroissante d'homomorphismes).

Montrons donc que pour une relation implicative \vdash_ℓ adéquate sur S_ℓ , la relation $(*)$ est toujours satisfaite lorsque sont satisfaites les relations $(**)$ dans T . Notons $X = \varphi_0(A_0), \dots, \varphi_\ell(A_\ell)$ et $Y = \varphi_0(B_0), \dots, \varphi_\ell(B_\ell)$. Par monotonie et puisque les φ_i sont des homomorphismes, on déduit par exemple des relations $A_0, u_1 \vdash B_0$ et $A_1, u_2 \vdash B_1, u_1$ les relations

$$X, \varphi_0(u_1) \vdash_\ell Y \quad \text{et} \quad X, \varphi_1(u_2) \vdash_\ell Y, \varphi_1(u_1).$$

Comme $\varphi_0(u_1) \geq \varphi_1(u_1)$, on obtient par coupures $X, \varphi_1(u_2) \vdash_\ell Y, \varphi_0(u_1)$ puis $X, \varphi_1(u_2) \vdash_\ell Y$. Nous avons gagné un cran. Nous pouvons continuer jusqu'à obtenir $X \vdash_\ell Y$. \square

On note que les homomorphismes φ_i sont injectifs : on voit facilement que pour $a, b \in T$ la relation $\varphi_i(a) \vdash_{S_\ell} \varphi_i(b)$ implique $a \vdash b$, donc $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$ implique $a = b$.

On obtient le corollaire suivant des théorèmes 2.19 et 3.5.

Corolaire 3.6 *Une chaîne idéale $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ s'effondre dans T si, et seulement si, le premier idéal $\mathcal{P} = (\varphi_0(J_0), \dots, \varphi_\ell(J_\ell); \varphi_0(U_0), \dots, \varphi_\ell(U_\ell))$ s'effondre dans $\text{Kr}_\ell(T)$. En particulier les définitions constructives pour la dimension de Krull, 2.23 et 3.2, sont équivalentes*

En mathématiques classiques le corolaire 3.6 est assuré comme conséquence du théorème 2.22 et du lemme 3.1. Cela permet donc de déduire l'un de l'autre les deux théorèmes 2.19 1 et 3.5. On est d'ailleurs frappé par la ressemblance des démonstrations des théorèmes 2.19 et 3.5.

Pour établir directement le corollaire 3.6, i.e. l'équivalence des deux théorèmes 2.19 1 et 3.5 il suffit d'expliquer comment la donnée d'une chaîne idéale saturée $((I_0, F_0), \dots, (I_\ell, F_\ell))$ de T permet de produire une suite décroissante d'homomorphismes $(\psi_0, \dots, \psi_\ell)$ de T dans un treillis distributif avec $\psi_k^{-1}(0) = I_k$ et $\psi_k^{-1}(1) = F_k$ ($k = 0, \dots, \ell$). On doit donc donner une démonstration directe du lemme suivant.

Lemme 3.7 *Soit $\mathcal{C} = ((I_0, F_0), \dots, (I_\ell, F_\ell))$ une chaîne idéale saturée dans un treillis distributif T . Soit $T_{\mathcal{C}}$ le treillis distributif quotient de $\text{Kr}_\ell(T)$ obtenu en forçant*

$$\varphi_0(I_0) = \dots = \varphi_\ell(I_\ell) = 0, \quad \varphi_0(F_0) = \dots = \varphi_\ell(F_\ell) = 1.$$

Soit π la projection canonique de $\text{Kr}_\ell(T)$ sur $T_{\mathcal{C}}$ et $\psi_k = \pi \circ \varphi_k$. Alors $\psi_k^{-1}(0) = I_k$ et $\psi_k^{-1}(1) = F_k$ pour $k = 0, \dots, \ell$.

Démonstration.

Par exemple l'idéal $\psi_k^{-1}(0) = \{x \in T; \varphi_k(x) =_{T_{\mathcal{C}}} 0\}$ est, par application de la proposition 2.2 égal à

$$\{x \in T; \varphi_k(x), \varphi_0(F'_0), \dots, \varphi_\ell(F'_\ell) \vdash_{\text{Kr}_\ell(T)} \varphi_0(I'_0), \dots, \varphi_\ell(I'_\ell)\}$$

pour des $I'_k \in \text{P}_{\text{fe}}(I_k)$ et $F'_k \in \text{P}_{\text{fe}}(F_k)$. Ainsi $\psi_k^{-1}(0)$ est l'ensemble des x tels qu'il existe x_1, \dots, x_ℓ tels que

$$\begin{array}{ccc} x_1, F'_0 & \vdash_T & I'_0 \\ x_2, F'_1 & \vdash_T & I'_1, x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x, x_{k+1}, F'_k & \vdash_T & I'_k, x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_\ell, F'_{\ell-1} & \vdash_T & I'_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\ & F'_\ell & \vdash_T & I'_\ell, x_\ell \end{array}$$

Comme la chaîne idéale \mathcal{C} est saturée on a de proche en proche $x_1 \in I_1 \subseteq I_2$, $x_2 \in I_2, \dots$, $x_k \in I_k$, et $x_\ell \in F_\ell, \dots, x_{k+1} \in F_{k+1} \subseteq F_k$, d'où enfin $x \in I_k$. \square

3.3 Connexions avec la définition de Joyal

Si T est un treillis distributif, Joyal [7] donne la définition suivante de $\dim(T) \leq \ell$. On note $\varphi_i^\ell : T \rightarrow \text{Kr}_\ell(T)$ les $\ell + 1$ morphismes universels ($0 \leq i \leq \ell$). Par universalité de $\text{Kr}_{\ell+1}(T)$, on obtient $\ell + 1$ morphismes $\sigma_i^\ell : \text{Kr}_{\ell+1}(T) \rightarrow \text{Kr}_\ell(T)$ définis par les égalités

$$\sigma_i^\ell \circ \varphi_j^{\ell+1} = \varphi_j^\ell \quad \text{si } j \leq i \quad \text{et} \quad \sigma_i^\ell \circ \varphi_j^{\ell+1} = \varphi_{j-1}^\ell \quad \text{si } j > i.$$

Joyal définit alors $\dim(T) \leq \ell$ par le fait que $\sigma^\ell := (\sigma_0^\ell, \dots, \sigma_\ell^\ell) : \text{Kr}_{\ell+1}(T) \rightarrow \text{Kr}_\ell(T)^{\ell+1}$ est injectif. Cette définition peut se motiver à l'aide de la proposition 2.16 qui dit que σ^ℓ est injectif si, et seulement si, le morphisme dual $\text{Spec}(\sigma^\ell) : \bigcup_i \text{Spec}(K_\ell) \rightarrow K_{\ell+1}$ est surjectif. Les éléments dans l'image de $\text{Spec}(\sigma_i^\ell)$ sont les chaînes d'idéaux premiers¹³ $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell+1})$ avec $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, et $\text{Spec}(\sigma_0^\ell, \dots, \sigma_\ell^\ell)$ est surjectif si, et seulement si, pour toute chaîne $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell+1})$ il existe $i < \ell$ tel que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$. Ceci dit donc exactement qu'il n'y a pas de chaînes d'idéaux premiers de longueur $\ell + 1$. En utilisant le théorème de compacité, on voit donc l'équivalence de la définition classique avec la définition 3.2 (qui fait le lien avec la définition 2.23 via le théorème 3.5).

Nous donnons maintenant une démonstration directe de l'équivalence de la définition de Joyal avec la la définition 3.2.

Théorème 3.8 *On a $\dim(T) \leq \ell$, au sens de la définition 3.2 si, et seulement si, l'homomorphisme $(\sigma_0^\ell, \dots, \sigma_\ell^\ell) : \text{Kr}_{\ell+1}(T) \rightarrow \text{Kr}_\ell(T)^{\ell+1}$ est injectif.*

Démonstration.

Pour simplifier les notations, nous nous limitons au cas $\ell = 2$ et nous écrivons ϕ_i pour φ_i^2 et ψ_i pour φ_i^3 . Nous notons aussi K_ℓ pour $\text{Kr}_\ell(T)$ et σ_i pour σ_i^ℓ .

Si $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ est injectif on montre que l'on a

$$\psi_0(x_1), \psi_1(x_2), \psi_2(x_3) \vdash_{K_3} \psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \psi_3(x_3)$$

pour toute suite x_1, x_2, x_3 en observant que l'on a pour $i = 0, 1, 2$

$$\sigma_i \psi_0(x_1), \sigma_i \psi_1(x_2), \sigma_i \psi_2(x_3) \vdash_{K_2} \sigma_i \psi_1(x_1), \sigma_i \psi_2(x_2), \sigma_i \psi_3(x_3)$$

car $\sigma_i \psi_{i+1} = \phi_i = \sigma_i \psi_i$, d'où $\sigma_i \psi_{i+1}(x_{i+1}) = \sigma_i \psi_i(x_{i+1})$: il y a donc un terme à droite égal à un terme à gauche.

Réciproquement, supposons que l'on a

$$\psi_0(x_1), \psi_1(x_2), \psi_2(x_3) \vdash_{K_3} \psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \psi_3(x_3)$$

13. On rappelle qu'un idéal premier T est ici identifié à un morphisme $\alpha : T \rightarrow \mathbf{2}$.

pour toute suite x_1, x_2, x_3 et montrons que $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ est injectif. On doit montrer que l'on a $X \vdash_{K_3} Y$ si $\sigma_i(X) \vdash_{K_2} \sigma_i(Y)$ pour chaque i . Comme K_3 est engendré par $\bigcup_{0 \leq i \leq 2} \psi_i(T)$ il suffit en fait de montrer que si l'on a

$$\sigma_i \psi_0(a_0), \dots, \sigma_i \psi_3(a_3) \vdash_{K_2} \sigma_i \psi_0(b_0), \dots, \sigma_i \psi_3(b_3)$$

pour chaque i alors on a

$$\psi_0(a_0), \dots, \psi_3(a_3) \vdash_{K_3} \psi_0(b_0), \dots, \psi_3(b_3)$$

Pour ceci, on remarque que l'on a par hypothèse

$$\psi_0(a_1), \dots, \psi_2(a_3) \vdash_{K_3} \psi_1(a_1), \dots, \psi_3(a_3)$$

et donc, il suffit de montrer

$$(\psi_j(a_j))_{0 \leq j < i}, \psi_{i+1}(a_i \wedge a_{i+1}), (\psi_j(a_j))_{i+1 < j \leq 3} \vdash_{K_3} \psi_0(b_0), \dots, \psi_3(b_3)$$

pour chaque $i = 1, 2, 3$. Montrons par exemple le cas $i = 1$. Soit

$$\psi_0(a_0), \psi_2(a_1 \wedge a_2), \psi_3(a_3) \vdash_{K_3} \psi_0(b_0), \dots, \psi_3(b_3)$$

On a par hypothèse

$$\sigma_1 \psi_0(a_0), \dots, \sigma_1 \psi_3(a_3) \vdash_{K_2} \sigma_1 \psi_0(b_0), \dots, \sigma_1 \psi_3(b_3)$$

ce qui s'écrit

$$\phi_0(a_0), \phi_1(a_1), \phi_1(a_2), \phi_2(a_3) \vdash_{K_2} \phi_0(b_0), \phi_1(b_1), \phi_1(b_2), \phi_2(b_3)$$

soit

$$\phi_0(a_0), \phi_1(a_1 \wedge a_2), \phi_2(a_3) \vdash_{K_2} \phi_0(b_0), \phi_1(b_1 \vee b_2), \phi_2(b_3)$$

Par universalité de $\phi_0 \geq \phi_1 \geq \phi_2$ appliquée à $\psi_0 \geq \psi_2 \geq \psi_3$ ceci entraîne

$$\psi_0(a_0), \psi_2(a_1 \wedge a_2), \psi_3(a_3) \vdash_{K_3} \psi_0(b_0), \psi_2(b_1 \vee b_2), \psi_3(b_3)$$

et comme $\psi_2(b_1) \vdash_{K_3} \psi_1(b_1)$ ceci entraîne bien

$$\psi_0(a_0), \psi_2(a_1 \wedge a_2), \psi_3(a_3) \vdash_{K_3} \psi_0(b_0), \psi_1(b_1), \psi_2(b_2), \psi_3(b_3)$$

□

3.4 Connexions avec le travail d'Español

Soit T un treillis distributif, Español [7] donne une caractérisation élégante de $\dim(T) \leq \ell - 1$ en terme de l'algèbre de Boole engendrée par T . Le but de cette section est de présenter cette caractérisation et de montrer son équivalence avec la définition 2.23.

Lemme 3.9 *Si $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_\ell$ et a_1, \dots, a_ℓ sont deux suites complémentaires et si on pose $b_\ell = a_\ell$, $b_{\ell-1} = a_\ell \wedge a_{\ell-1}$, \dots , alors $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\ell$ et les deux suites (x_1, \dots, x_ℓ) et (b_1, \dots, b_ℓ) sont complémentaires.*

Démonstration.

Les conditions $b_1 \wedge x_1 = 0$ et $b_\ell \vee x_\ell = 1$ sont immédiates. Soit maintenant $1 \leq i < \ell$, on doit vérifier que $b_{i+1} \wedge x_{i+1} \leq b_i \vee x_i$. D'une part $b_{i+1} \wedge x_{i+1} \leq a_{i+1} \wedge x_{i+1} \leq a_i \vee x_i$ car $b_{i+1} \leq a_{i+1}$. D'autre part $b_{i+1} \wedge x_{i+1} \leq b_{i+1} \leq b_{i+1} \vee x_i$. Donc par distributivité $b_{i+1} \wedge x_{i+1} \leq (a_i \wedge b_{i+1}) \vee x_i = b_i \vee x_i$. □

La définition 2.23 dit que l'on a $\dim(T) \leq \ell - 1$ si, et seulement si, toute chaîne idéale élémentaire $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$ s'effondre. Le lemme suivant dit que l'on peut se limiter aux chaînes idéales élémentaires $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_\ell$.

Lemme 3.10 *Si pour toute suite $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_\ell$ la chaîne idéale élémentaire $\overline{(x_1, \dots, x_\ell)}$ s'effondre alors $\dim(T) \leq \ell - 1$.*

Démonstration.

Soit y_1, \dots, y_ℓ une suite arbitraire. On considère alors $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 \vee y_2$, \dots , $x_\ell = y_1 \vee \dots \vee y_\ell$. Soit (a_1, \dots, a_ℓ) une suite complémentaire de (x_1, \dots, x_ℓ) . On prend $b_1 = a_1$ et $b_{i+1} = a_{i+1} \vee x_i$ pour $1 \leq i < \ell$ (de sorte que $x_i \vee a_i = y_i \vee b_i$ pour $1 \leq i \leq \ell$).

On a tout d'abord $0 = x_1 \wedge a_1 = y_1 \wedge b_1$ et $1 = x_\ell \vee a_\ell = y_\ell \vee b_\ell$. Voyons maintenant une inégalité intermédiaire pour $1 \leq i < \ell$. On a $x_{i+1} \wedge a_{i+1} \leq x_i \vee a_i$, et donc

$$y_{i+1} \wedge a_{i+1} \leq x_{i+1} \wedge a_{i+1} \leq x_i \vee a_i = y_i \vee b_i$$

On a alors

$$y_{i+1} \wedge b_{i+1} = y_{i+1} \wedge (a_{i+1} \vee x_i) = (y_{i+1} \wedge a_{i+1}) \vee (y_{i+1} \wedge x_i) \leq (y_{i+1} \wedge a_{i+1}) \vee x_i$$

Comme les deux derniers termes après \leq sont majorés par $x_i \vee a_i = y_i \vee b_i$, on obtient bien l'inégalité $y_{i+1} \wedge b_{i+1} \leq y_i \vee b_i$. \square

Nous décrivons maintenant la caractérisation présentée dans [7].

Soit $B = \text{Bo}(T)$ l'algèbre de Boole engendrée par T . Rappelons [20] que tout élément de B peut être décrit comme une union finie $\bigvee (a_i - b_i)$ de différences formelles, avec $a_{i+1} \leq b_i \leq a_i \in T$. En général, on ne peut rien dire sur la longueur minimale d'une telle suite.

Español [7] donne la caractérisation suivante de $\dim(T) \leq \ell$ (au sens de Joyal) :

Soit $k \geq 0$:

- on a $\dim(T) \leq 2k + 1$ si, et seulement si, tout élément de B peut s'écrire $\bigvee_{1 \leq i \leq k} (a_i - b_i)$,
- on a $\dim(T) \leq 2k$ si, et seulement si, tout élément de B peut s'écrire $a \vee \bigvee_{1 \leq i \leq k-1} (a_i - b_i)$.

Pour simplifier les notations, si $a_1, \dots, a_\ell \in T$ on écrira

$$(a_1 - a_2) \vee (a_3 - a_4) \vee \dots$$

pour

$$(a_1 - a_2) \vee (a_3 - a_4) \vee \dots \vee (a_{2k-1} - a_{2k})$$

si $\ell = 2k$ et pour

$$(a_1 - a_2) \vee (a_3 - a_4) \vee \dots \vee (a_{2k-1} - a_{2k}) \vee a_{2k+1}$$

si $\ell = 2k + 1$.

Avec cette notation, la condition d'Español devient : on a $\dim(T) \leq \ell$ si, et seulement si, tout élément de B peut s'écrire

$$(a_1 - a_2) \vee \dots$$

pour une suite a_1, \dots, a_ℓ dans T . Pour montrer l'équivalence entre ces deux caractérisations, on utilisera le fait suivant.

Lemme 3.11 *Si $x_1 \geq \dots \geq x_\ell$ et $a_1 \geq \dots \geq a_\ell$ vérifient*

$$(1 - x_1) \vee (x_2 - x_3) \vee \dots = (a_1 - a_2) \vee (a_3 - a_4) \vee \dots$$

on a

$$1 = x_1 \vee a_1, \quad 0 = x_\ell \wedge a_\ell, \quad x_i \wedge a_i \leq x_{i+1} \vee a_{i+1} \quad (1 \leq i < \ell)$$

Démonstration.

Simple vérification. \square

Théorème 3.12 *On a $\dim(T) \leq \ell - 1$, au sens de la définition 2.23, si, et seulement si, tout élément de $B = \text{Bo}(T)$ peut s'écrire*

$$(a_1 - a_2) \vee \dots$$

pour une suite $a_1 \geq \dots \geq a_\ell$ dans T .

Démonstration.

On suppose $\dim(T) \leq \ell - 1$ au sens de la définition 2.23. En général si $x_1 \geq x_2 \geq \dots$ on a

$$(x_1 - x_2) \vee (x_3 - x_4) \vee \dots = x_1 - ((x_2 - x_3) \vee \dots)$$

et il suffit de montrer que pour toute suite $x_0 \geq x_1, \dots \geq x_\ell$ on peut trouver $a_1 \geq \dots \geq a_\ell$ telle que

$$(x_0 - x_1) \vee (x_2 - x_3) \vee \dots = (a_1 - a_2) \vee \dots$$

Comme $(x_0 - x_1) \vee (x_2 - x_3) \vee \dots = x_0 \wedge ((1 - x_1) \vee (x_2 - x_3) \vee \dots)$ on se ramène au cas $x_0 = 1$, qui résulte du lemme 3.9.

La réciproque résulte directement du lemme 3.11 qui donne l'hypothèse du lemme 3.10.

\square

Signalons enfin l'article plus récent [8, Español] qui présente une autre variante pour la définition constructive de la dimension de Krull. Cette variante est étudiée en exercice ¹⁴ XIII-17 de [CACM].

4 Treillis de Zariski et de Krull dans un anneau commutatif

4.1 Treillis de Zariski

Dans un anneau commutatif A , le *treillis de Zariski* $\text{Zar}(A)$ a pour éléments les radicaux d'idéaux de type fini (la relation d'ordre est l'inclusion). Il est bien défini en tant que treillis. Autrement dit $\sqrt{I_1} = \sqrt{J_1}$ et $\sqrt{I_2} = \sqrt{J_2}$ impliquent $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{J_1 J_2}$ (ceci définit $\sqrt{I_1} \wedge \sqrt{I_2}$) et $\sqrt{I_1 + I_2} = \sqrt{J_1 + J_2}$ (ceci définit $\sqrt{I_1} \vee \sqrt{I_2}$). Le treillis de Zariski de A est toujours un treillis distributif, mais en général l'égalité n'est pas testable. Néanmoins une inclusion $\sqrt{I_1} \subseteq \sqrt{I_2}$ peut être certifiée de manière finie si l'anneau A est discret. Ce treillis contient toutes les informations nécessaires au développement du point de vue constructif concernant la théorie abstraite et non constructive du spectre de Zariski.

Tout morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux commutatifs induit un morphisme naturel $\text{Zar}(\varphi) = \text{Zar}(A) \rightarrow \text{Zar}(B)$.

Nous notons \tilde{a} pour $\sqrt{\langle a \rangle}$. Pour une partie S de A nous notons \tilde{S} la partie de $\text{Zar}(A)$ formée des \tilde{s} pour $s \in S$. On a $\tilde{a}_1 \vee \dots \vee \tilde{a}_m = \sqrt{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}$ et $\tilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{a}_m = \widetilde{a_1 \cdots a_m}$. Soient U et J deux familles finies dans A , on a

$$\bigwedge \tilde{U} \vdash_{\text{Zar}(A)} \bigvee \tilde{J} \iff \prod_{u \in U} u \in \sqrt{\langle J \rangle} \iff \mathcal{M}(U) \cap \langle J \rangle \neq \emptyset$$

où $\mathcal{M}(U)$ est le monoïde multiplicatif engendré par U , c'est-à-dire encore

$$\text{le premier idéal}(J, U) \text{ s'effondre dans } A \iff (\tilde{J}, \tilde{U}) \text{ s'effondre dans } \text{Zar}(A)$$

Cela suffit à décrire ce treillis. Plus précisément on a :

¹⁴. Une erreur est rectifiée dans la version sur arXiv.

Proposition 4.1 *Le treillis $\text{Zar}(A)$ d'un anneau commutatif A est (à isomorphisme près) le treillis engendré par (A, \vdash) où \vdash est la plus petite relation implicative vérifiant*

$$\begin{array}{lcl} 0_A & \vdash & x, y \vdash xy \\ & \vdash 1_A & xy \vdash x \quad x + y \vdash x, y \end{array}$$

Démonstration.

Il est clair que la relation $U \vdash J$ définie par « $\mathcal{M}(U)$ intersecte $\langle J \rangle$ » vérifie ces axiomes. Il est clair aussi que la relation implicative engendrée par ces axiomes contient cette relation. Montrons donc que cette relation est une relation implicative. Seule la règle de coupure n'est pas directe. Supposons que $\mathcal{M}(U, a)$ intersecte $\langle J \rangle$ et que $\mathcal{M}(U)$ intersecte $\langle J, a \rangle$. On peut alors trouver $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(U)$ et k, x tels que $a^k m_1 \in \langle J \rangle$, $m_2 + ax \in \langle J \rangle$. En éliminant a on obtient que $\mathcal{M}(U)$ intersecte $\langle J \rangle$. \square

Notez que l'application canonique de A dans $\text{Zar}(A)$ est $a \mapsto \tilde{a}$ et que l'on a $\tilde{a} = \tilde{b}$ si, et seulement si, a divise une puissance de b et b divise une puissance de a .

Idéaux et filtres de A et de $\text{Zar } A$

Fait 4.2 (quotients par les idéaux) *Soit I un idéal de A . Le morphisme naturel $A \rightarrow A/I$ induit un morphisme surjectif $\text{Zar}(A) \rightarrow \text{Zar}(A/I)$. Ce dernier donne par factorisation un isomorphisme $\text{Zar}(A/I) \simeq \text{Zar}(A)/(\mathcal{I} = 0)$, où $\mathcal{I} = \{J \in \text{Zar}(A) \mid J \subseteq \sqrt{I}\}$.*

Proposition 4.3 *On a une bijection naturelle entre les idéaux du treillis $\text{Zar}(A)$ et les idéaux radicaux de l'anneau A . La bijection fonctionne comme suit.*

- Si I est un idéal radical de A on lui associe l'idéal $\mathcal{I} = \{J \in \text{Zar}(A) \mid J \subseteq I\}$.
- Si \mathcal{I} est un idéal de $\text{Zar}(A)$ on lui associe l'idéal $I = \bigcup_{J \in \mathcal{I}} J = \{x \in A \mid \tilde{x} \in \mathcal{I}\}$.
- Dans cette bijection les idéaux premiers correspondent aux idéaux premiers.

Démonstration.

Nous expliquons seulement la dernière affirmation.

Si I est un idéal premier de A , si $J, J' \in \text{Zar}(A)$ et $J \wedge J' \in \mathcal{I}$, soient $a_1, \dots, a_n \in A$ des «générateurs» de J (c'est-à-dire $J = \sqrt{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$) et $b_1, \dots, b_m \in A$ des générateurs de J' . On a alors $a_i b_j \in I$ d'où $a_i \in I$ ou $b_j \in I$ pour tout i, j . Il en résulte que l'on a $a_i \in I$ pour tout i ou $b_j \in I$ pour tout j . Donc $J \in \mathcal{I}$ ou $J' \in \mathcal{I}$ et \mathcal{I} est un idéal premier de $\text{Zar}(A)$. Réciproquement si \mathcal{I} est un idéal premier de $\text{Zar}(A)$ et si on a $\tilde{x} \tilde{y} \in \mathcal{I}$ alors on a $\tilde{x} \wedge \tilde{y} \in \mathcal{I}$ et donc $\tilde{x} \in \mathcal{I}$ ou $\tilde{y} \in \mathcal{I}$ ce qui montre que $\{x \in A \mid \tilde{x} \in \mathcal{I}\}$ est un idéal premier de A . \square

Un *filtre* dans un anneau commutatif est un monoïde S qui vérifie $xy \in S \Rightarrow x \in S$ (on dit aussi que le monoïde S est saturé).

Un *filtre premier* est un filtre qui vérifie $x + y \in S \Rightarrow x \in S$ ou $y \in S$ (c'est le complémentaire d'un idéal premier).

Un $x \in A$ engendre un *filtre principal* $\hat{x} = \{y \mid \exists n \in \mathbb{N} x^n \in \langle y \rangle\} = \{y \in A \mid x \in \tilde{y}\}$.

Pour $x \in A$ le filtre $\uparrow \tilde{x}$ de $\text{Zar}(A)$ satisfait l'équivalence : $\boxed{\tilde{y} \in \uparrow \tilde{x} \Leftrightarrow y \in \hat{x}}$.

Fait 4.4 (localisés) *Soit S un filtre de A . Alors le morphisme naturel $A \rightarrow A_S$ induit un morphisme surjectif $\text{Zar}(A) \rightarrow \text{Zar}(A_S)$. Ce dernier donne par factorisation un isomorphisme $\text{Zar}(A_S) \simeq \text{Zar}(A)/(\uparrow S = 1)$.*

Proposition 4.5 *Pour un filtre S de A , notons $\uparrow S = \bigcup_{s \in S} \uparrow \tilde{s}$. C'est un filtre de $\text{Zar}(A)$.*

- L'application $S \mapsto \uparrow S$ établit une correspondance injective croissante des filtres de A vers les filtres de $\text{Zar}(A)$.
- Cette application préserve les sups finis (le sup de S_1 et S_2 est engendré par les $s_1 s_2$ où $s_i \in S_i$).

— Elle se restreint en une bijection des filtres premiers de A sur ceux de $\text{Zar}(A)$.

Notez cependant que le filtre principal de $\text{Zar}(A)$ engendré par $\widetilde{a}_1 \vee \cdots \vee \widetilde{a}_n$ (c'est-à-dire l'intersection des filtres $\uparrow \widetilde{a}_i$), ne correspond en général à aucun filtre de A .

4.2 Treillis de Krull d'ordre ℓ

Définition 4.6 On définit $\text{Kru}_\ell(A) := \text{Kr}_\ell(\text{Zar}(A))$. On l'appelle le *treillis de Krull d'ordre ℓ de l'anneau A*

Théorème 4.7 Soit $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale dans un anneau commutatif A . Elle s'effondre si, et seulement si, la chaîne idéale $((\widetilde{J}_0, \widetilde{U}_0), \dots, (\widetilde{J}_\ell, \widetilde{U}_\ell))$ s'effondre dans $\text{Zar}(A)$. Par exemple si \mathcal{C} est finie, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. il existe $j_i \in \langle J_i \rangle$, $u_i \in \mathcal{M}(U_i)$, ($i = 0, \dots, \ell$), vérifiant l'égalité

$$u_0 \cdot (u_1 \cdot (\cdots (u_\ell + j_\ell) + \cdots) + j_1) + j_0 = 0,$$

2. il existe $x_1, \dots, x_\ell \in \text{Zar}(A)$ avec les relations suivantes dans $\text{Zar}(A)$:

$$\begin{array}{ccc} x_1, \widetilde{U}_0 & \vdash & \widetilde{J}_0 \\ x_2, \widetilde{U}_1 & \vdash & \widetilde{J}_1, x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_\ell, \widetilde{U}_{\ell-1} & \vdash & \widetilde{J}_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\ \widetilde{U}_\ell & \vdash & \widetilde{J}_\ell, x_\ell \end{array}$$

3. même chose mais avec $x_1, \dots, x_\ell \in \widetilde{A}$.

Démonstration.

Il est clair que 1 entraîne 3 : on prend simplement

$$v_\ell = u_\ell + j_\ell, v_{\ell-1} = v_\ell u_{\ell-1} + j_{\ell-1}, \dots, v_0 = v_1 u_0 + j_0 \quad \text{et} \quad x_i = \widetilde{v}_i$$

et que 3 entraîne 2. Le fait que 2 entraîne 1 peut se voir en reformulant 2 de la manière suivante. On considère la chaîne idéale $\mathcal{C}^1 = ((K_0, V_0), \dots, (K_\ell, V_\ell))$ obtenue en saturant la chaîne idéale \mathcal{C} . On définit $\ell + 1$ idéaux radicaux I_0, \dots, I_ℓ de A

- $I_0 = \{x \in A \mid \mathcal{M}(x, U_0) \cap \langle J_0 \rangle \neq \emptyset\}$
- $I_1 = \{x \in A \mid \mathcal{M}(x, U_1) \cap (\langle J_1 \rangle + I_0) \neq \emptyset\}$
- \vdots
- $I_{\ell-1} = \{x \in A \mid \mathcal{M}(x, U_{\ell-1}) \cap (\langle J_{\ell-1} \rangle + I_{\ell-2}) \neq \emptyset\}$
- $I_\ell = \langle J_\ell \rangle + I_{\ell-1}$

Il est clair que $I_i \subseteq K_i$ ($i = 0, \dots, \ell$). Dans la correspondance donnée en 4.3 ces idéaux correspondent aux idéaux suivants de $\text{Zar}(A)$

- $\mathcal{I}_0 = \{u \in \text{Zar}(A) \mid u, \widetilde{U}_0 \vdash \widetilde{J}_0\}$
- $\mathcal{I}_1 = \{u \in \text{Zar}(A) \mid (\exists v \in \mathcal{I}_0) u, \widetilde{U}_1 \vdash \widetilde{J}_1, v\}$
- \vdots
- $\mathcal{I}_{\ell-1} = \{u \in \text{Zar}(A) \mid (\exists v \in \mathcal{I}_0) u, \widetilde{U}_{\ell-1} \vdash \widetilde{J}_{\ell-1}, v\}$

La condition 2 signifie alors que l'on a $\widetilde{U}_\ell \vdash \widetilde{J}_\ell, v$ pour un $v \in \mathcal{I}_{\ell-1}$. Autrement dit, $\mathcal{M}(U_\ell)$ intersecte I_ℓ , ou $I_\ell \subseteq K_\ell$. Donc \mathcal{C}^1 s'effondre, donc \mathcal{C} s'effondre.

Donnons une autre démonstration, directe, que 2 entraîne 3. On réécrit les relations implicatives de 2 comme suit. Chaque \widetilde{U}_i peut être remplacé par un \widetilde{u}_i avec $u_i \in A$, chaque \widetilde{J}_i

peut être remplacé par un radical d'idéal de type fini I_i de A , et on note L_i à la place de x_i pour se rappeler qu'il s'agit du radical d'un idéal de type fini. On obtient :

$$\begin{aligned} L_1, \widetilde{u}_0 &\vdash I_0 \\ L_2, \widetilde{u}_1 &\vdash I_1, L_1 \\ L_3, \widetilde{u}_2 &\vdash I_2, L_2 \\ \widetilde{u}_3 &\vdash I_3, L_3 \end{aligned}$$

La dernière ligne signifie que $\mathcal{M}(u_3)$ coupe $I_3 + L_3$ ou encore $I_3 + \langle y_3 \rangle$ pour un élément y_3 de L_3 , et donc aussi que l'on a $\widetilde{u}_3 \vdash I_3, \widetilde{y}_3$. Comme $\widetilde{y}_3 \leq L_3$ dans $\text{Zar}(A)$ l'avant-dernière ligne implique $\widetilde{y}_3, \widetilde{u}_2 \vdash I_2, L_2$. On a donc remplacé dans ses deux occurrences L_3 par \widetilde{y}_3 . On raisonne comme précédemment et on voit qu'on peut remplacer les deux occurrences de L_2 par un \widetilde{y}_2 convenable, puis les deux occurrences de L_1 par un \widetilde{y}_1 convenable. On a bien obtenu 3. \square

Corolaire 4.8 *La dimension de Krull d'un anneau commutatif A est $\leq \ell$ (définition 1.27) si, et seulement si, la dimension de Krull du treillis de Zariski $\text{Zar}(A)$ est $\leq \ell$ (définition 3.2).*

Démonstration.

Appliquer le théorème précédent et le lemme 3.4. \square

Notons que nous avons obtenu ce résultat de manière purement constructive, sans avoir à utiliser la définition classique usuelle en termes de chaînes d'idéaux premiers.

5 Dimension de Krull relative

5.1 Généralités sur la dimension de Krull relative

Nous développons ici un analogue constructif pour les chaînes croissantes formées par des idéaux premiers qui coupent tous un sous-anneau donné selon un même idéal premier. Ce paragraphe est en fait suffisamment général pour fonctionner dans le cadre de la section 1 (anneau commutatif) ou dans celui d'un treillis distributif arbitraire. Il n'y a pas de vrais calculs, seulement un peu de combinatoire.

Dans la suite «Soit $A \subseteq B$ » est une abréviation pour «Soit $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs ou des treillis distributifs».

Définition 5.1 Soit $A \subseteq B$ et $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale dans B .

1. On dit que la chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre au dessus de A s'il existe un entier $k \geq 0$ et des éléments a_1, \dots, a_k de A tels que pour tout couple de parties complémentaires (H, H') de $\{1, \dots, k\}$, on ait le collapsus dans B de la chaîne idéale

$$(\{(a_h)_{h \in H}\} \cup J_0, U_0), (J_1, U_1) \dots, (J_\ell, U_\ell \cup \{(a_h)_{h \in H'}\}) \quad (6)$$

2. On dit que la dimension de Krull (relative) de l'extension B/A est $\leq \ell - 1$ si toute chaîne idéale élémentaire $((0; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_\ell; 1))$ s'effondre au dessus de A .

Il est clair qu'une chaîne idéale de B qui raffine une chaîne idéale qui s'effondre au dessus de A s'effondre elle-même au dessus de A . Le lemme qui suit justifie l'emploi du lemme de Zorn en mathématiques classiques.

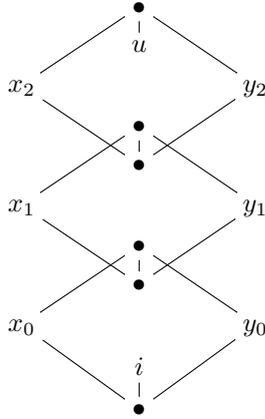
Lemme 5.2 *Toute chaîne idéale de B qui s'effondre au dessus de A raffine une chaîne idéale finie qui s'effondre au dessus de A .*

Pour ce qui concerne la dimension de Krull relative, on obtient le critère suivant, qui reprend le point 2 de la définition 5.1.

Lemme 5.3 *La dimension de Krull (relative) de l'extension B/A est $\leq \ell$ si, et seulement si, pour toute liste (x_0, \dots, x_ℓ) dans B il existe un entier $k \geq 0$ et des éléments $a_1, \dots, a_k \in A$ tels que pour tout couple de parties complémentaires (H, H') de $\{1, \dots, k\}$, il existe $y_0, \dots, y_\ell \in B$ tels que*

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge_{j \in H'} a_j & \vdash & y_\ell, x_\ell \\ y_\ell, x_\ell & \vdash & y_{\ell-1}, x_{\ell-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1, x_1 & \vdash & y_0, x_0 \\ y_0, x_0 & \vdash & \bigvee_{j \in H} a_j \end{array} \quad (7)$$

Par exemple pour la dimension relative ≤ 2 cela correspond au dessin suivant dans B avec $u = \bigwedge_{j \in H'} a_j$ et $i = \bigvee_{j \in H} a_j$.



Remarque 5.4 On peut considérer le cas d'une extension d'anneaux ou de treillis distributifs plus générale : on a un homomorphisme $A \rightarrow B$ non nécessairement injectif. On peut alors adapter la définition précédente en remplaçant A par son image dans B .

Voici un théorème de collapsus simultané relatif.

Théorème 5.5 (Collapsus simultané relatif pour les chaînes idéales) *Soit $A \subseteq B$ et \mathcal{C} une chaîne idéale de longueur ℓ dans B .*

- (1) *Soit $x \in B$ et $i \in \{0, \dots, \ell\}$. Supposons que les chaînes idéales $\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{C}(i)\}$ et $\mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{C}(i)\}$ s'effondrent toutes les deux au dessus de A , alors \mathcal{C} s'effondre également au dessus de A .*
- (2) *Soit $x \in A$. Supposons que les chaînes idéales $\mathcal{C} \& \{x \in \mathcal{C}(0)\}$ et $\mathcal{C} \& \{x \notin \mathcal{C}(\ell)\}$ s'effondrent toutes les deux au dessus de A , alors \mathcal{C} s'effondre également au dessus de A .*

C'est une conséquence facile des théorèmes (non relatifs) 1.19 pour les anneaux commutatifs et 2.19 pour les treillis distributifs, que nous laissons au lecteur. De là, on déduit (en mathématiques classiques) une caractérisation des chaînes idéales qui s'effondrent relativement.

Théorème 5.6 (Nullstellensatz formel pour les chaînes d'idéaux premiers dans une extension) *Le théorème de compacité implique le résultat suivant.*

Soit $A \subseteq B$ et soit $\mathcal{C} = ((J_0, U_0), \dots, (J_\ell, U_\ell))$ une chaîne idéale dans B . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) Il existe un idéal premier détachable P de A et $\ell + 1$ idéaux premiers détachables $P_0 \subseteq \cdots \subseteq P_\ell$ de B tels que $J_i \subseteq P_i$, $U_i \cap P_i = \emptyset$ et $P_i \cap A = P$ ($i = 0, \dots, \ell$).
- (b) La chaîne idéale \mathcal{C} ne s'effondre pas au dessus de A .

Démonstration.

L'implication (a) \Rightarrow (b) est presque immédiate. On dispose d'une suite croissantes P_0, \dots, P_ℓ d'idéaux premiers de B qui raffine \mathcal{C} (chaque \widehat{P}_i raffine (J_i, U_i)), avec un idéal premier P de A tel que l'on a $P_i \cap A = P$ pour $i = 0, \dots, \ell$. Le fait que \mathcal{C} ne collapse pas au dessus de A signifie que pour tous $a_1, \dots, a_k \in A$ il existe une partie H de $\{1, \dots, k\}$ telle que la suite (6) ne collapse pas dans B . Il suffit en effet de prendre pour H les indices i tels que $a_i \in P$, car alors $(\widehat{P}_0, \dots, \widehat{P}_\ell)$ raffine la suite (6).

Pour (b) \Rightarrow (a) nous faisons la démonstration qui s'appuie sur le principe du tiers exclu et le lemme de Zorn (plus immédiate que celle qui utilise le théorème de compacité). On considère une chaîne idéale $\mathcal{C}^1 = ((P_0, S_0), \dots, (P_\ell, S_\ell))$ maximale (pour la relation de raffinement) parmi les chaînes idéales qui raffinent \mathcal{C} et qui ne s'effondrent pas au dessus de A . Vu le collapsus simultané relatif, la même démonstration que pour les théorèmes 1.22 et 2.22 montre que c'est une chaîne croissante d'idéaux premiers (avec leurs compléments). Il reste à voir que les $P_i \cap A$ sont tous égaux, ce qui revient à dire $S_0 \cap P_\ell \cap A = \emptyset$. Si ce n'était pas le cas soit $x \in S_0 \cap P_\ell \cap A$. Alors $((P_0, x; S_0), \dots, (P_\ell, S_\ell))$ et $((P_0, S_0), \dots, (P_\ell, S_\ell, x))$ s'effondrent dans B , donc \mathcal{C}^1 s'effondre au dessus de A (avec la suite à un seul élément x). C'est absurde. \square

5.2 L'inégalité de base

On a le résultat constructif suivant.

Théorème 5.7 Soit $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs ou des treillis distributifs.

- (1) Supposons que la dimension de Krull de A est $\leq m$ et que la dimension de Krull de l'extension B/A est $\leq n$, alors la dimension de Krull de B est $\leq (m+1)(n+1) - 1$.
- (2) Supposons que A et B sont munis du prédicat $\neq 0$ défini comme la négation de $= 0$. Supposons que la dimension de Krull de l'extension B/A est $\leq n$ et qu'on a un test pour le collapsus des chaînes idéales élémentaires dans A . Si on donne une suite pseudo régulière de longueur $(m+1)(n+1)$ dans B , on peut construire une suite pseudo régulière de longueur $m+1$ dans A .

Démonstration.

En mathématiques classiques la démonstration est immédiate. On considère une chaîne strictement croissante dans B avec $(m+1)(n+1)+1$ termes. Comme $n+2$ termes consécutifs ne peuvent avoir la même intersection avec A cela fournit une chaîne strictement croissante de $m+2$ idéaux de A , ce qui est absurde. En mathématiques constructives on peut mimer cette démonstration et on obtient le résultat sous forme constructive, ce qui nous donne une véritable information de nature algorithmique. Voici ce que cela donne.

Nous prouvons d'abord le point (1).

Tout d'abord nous traitons le cas où A est de dimension zéro avec la dimension relative égale à n . Nous voulons montrer que toute chaîne idéale élémentaire de longueur n dans B s'effondre. Soit $\mathcal{C} = ((0, x_1), \dots, (x_n, 1))$ une telle chaîne idéale élémentaire. Nous savons qu'elle s'effondre au dessus de A . Soit $F = \{a_1, \dots, a_k\}$ la partie finie de A correspondante. Si F est vide c'est bon. Si F n'est pas vide, on va montrer qu'on peut enlever un élément à F et on aura gagné par induction. Soit donc $F = H \cup \{a_k\}$. Soit maintenant G et G' deux parties complémentaires de H . On a les collapsus (tout court) des chaînes idéales suivantes, la première par collapsus au dessus de A , la deuxième parce qu'elle contient $((0, a_k), (a_k, 1))$

et que A est de dimension 0 :

$$\begin{array}{ll} ((G; x_1), \dots, (x_n; G', a_k)) & \text{donc aussi } ((G; x_1, a_k), \dots, (x_n; G', a_k)) \\ ((0; x_1, a_k), \dots, (a_k, x_n; 1)) & \text{donc aussi } ((G; x_1, a_k), \dots, (a_k, x_n; G')) \end{array}$$

Par collapsus simultané, les deux colonnes de droite donnent le collapsus de

$$((G; x_1, a_k), \dots, (x_n; G')).$$

Comme on a aussi, puisque $\{a_k\} \cup G \cup G' = F$, le collapsus (tout court) de la chaîne idéale

$$((a_k, G; x_1), \dots, (x_n; G')),$$

un collapsus simultané donne celui de la chaîne idéale $((G; x_1), \dots, (x_n; G'))$. Et nous avons gagné.

Nous passons au cas général. Nous traitons l'exemple où $m = 2$, $n = 3$, qui, nous l'espérons, est suffisamment éclairant. Nous devons donc considérer une suite de $3 \times 4 = 12$ éléments x_i de B et montrer que la chaîne idéale élémentaire suivante s'effondre :

$$((0; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{11}; x_{12}), (x_{12}; 1))$$

Par hypothèse les chaînes idéales

$$((0; x_1), \dots, (x_4; x_5)), ((x_4; x_5), \dots, (x_8; x_9)) \text{ et } ((x_8; x_9), \dots, (x_{12}; 1))$$

s'effondrent au dessus de A , ce qui nous fournit trois listes finies F_1, F_2, F_3 d'éléments de A et les collapsus correspondants dans B . Nous pouvons montrer que la chaîne idéale \mathcal{C} s'effondre en utilisant un processus de recollement analogue à celui utilisé lorsque $m = 0$. Nous commençons par remarquer que toute chaîne idéale du type

$$((0; x_1, b_1), \dots, (b_1, x_4; x_5, b_2), \dots, (b_2, x_8; x_9, b_3), \dots, (b_3, x_{12}; 1))$$

avec les $b_i \in A$ s'effondre parce qu'elle « contient » la chaîne idéale

$$((0; b_1), (b_1; b_2), (b_2; b_3), (b_3; 1))$$

On va établir que toute chaîne idéale du type

$$((0; x_1), \dots, (x_4; x_5, b_2), \dots, (b_2, x_8; x_9, b_3), \dots, (b_3, x_{12}; 1))$$

avec $b_2, b_3 \in A$ s'effondre elle aussi. Après on pourra recommencer (on supprimera b_2 puis b_3). On voit qu'on peut reproduire à l'identique le cas déjà traité (A zéro dimensionnel) : en ajoutant partout la queue ; x_5, b_2 , $(x_5, x_6) \dots, (b_2, x_8; x_9, b_3), \dots, (b_3, x_{12}; 1)$.

Nous prouvons ensuite le point (2).

Il faut reprendre la démonstration du point (1) (en faisant comme un semblant raisonnement par l'absurde) et regarder à quel endroit elle ne fonctionne plus. Elle est basée sur des collapsus de chaînes idéales élémentaires dans A et des collapsus de chaînes idéales élémentaires de B au dessus de A . Les seuls endroits où cela ne fonctionne plus à tout coup, c'est avec les collapsus de chaînes idéales élémentaires dans A . Or justement, on suppose qu'on a un test pour ces collapsus-là. Donc l'un d'entre eux au moins ne fonctionne pas, explicitement, et cela fournit la suite pseudo régulière que l'on cherche. \square

5.3 Comparaison avec une autre approche constructive dans le cas des anneaux commutatifs

Dans [CACM], pour les anneaux commutatifs, la dimension de Krull relative de l'extension B/A (ou du morphisme $A \rightarrow B$) est définie comme la dimension de Krull de $A^\bullet \otimes_A B$, où A^\bullet est l'anneau zéro-dimensionnel réduit engendré par A . La justification intuitive est que les idéaux premiers P de A se retrouvent sous la forme des idéaux maximaux de A^\bullet (deux à deux incomparables) et que lorsqu'on a un idéal premier P_0 de B au dessus de P , si $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_\ell$ dans $A^\bullet \otimes_A B$, alors les P_i sont tous au dessus de P dans B . La définition dans [CACM] peut être considérée comme plus élégante dans la mesure où elle réclame comme seul nouvel outil l'anneau A^\bullet qui résout un problème universel naturel.

Néanmoins, l'inégalité de base (théorème 5.7) est plus laborieuse à établir dans [CACM].

Nous démontrons maintenant que les deux définitions constructives proposées pour la dimension de Krull relative coïncident. Il suffit de démontrer qu'une chaîne idéale \mathcal{C} de B s'effondre au dessus de A selon la définition 5.1 si, et seulement si, \mathcal{C} s'effondre dans l'anneau $A^\bullet \otimes_A B$.

Pour cela on considère un étage fini de la construction de l'anneau A^\bullet . Il est obtenu à partir d'une suite a_1, \dots, a_k dans A : on associe à cette suite l'anneau

$$A[a_1^\bullet, \dots, a_k^\bullet] = \prod_{H \subseteq \{1, \dots, k\}} A[1/a_{H'}]/a^H$$

avec $a_{H'} = \prod_{i \in H} a_i$ et $a^H = \langle (a_i)_{i \in H} \rangle$; où H' est le complément de H dans $\{1, \dots, k\}$.

L'anneau A^\bullet est la limite inductive de ces anneaux $A[a_1^\bullet, \dots, a_k^\bullet]$ et l'on voit que le collapsus d'une chaîne idéale \mathcal{C} de B au dessus de A défini en 5.1 revient à dire que \mathcal{C} s'effondre dans un des anneaux $A[a_1^\bullet, \dots, a_k^\bullet] \otimes_A B$. Autrement dit \mathcal{C} s'effondre dans $A^\bullet \otimes_A B$.

Dans les sous-sections 5.4 et 5.5 nous traitons des résultats qui sont démontrés dans [CACM] en utilisant la définition de [CACM] pour la dimension de Krull relative.

5.4 Cas des extensions entières d'anneaux commutatifs

Dans la proposition suivante le point (1) est la version constructive du «théorème d'incomparabilité» (voir le théorème 13.33 du livre de Sharp [Sharp].)

Proposition 5.8 *Soit $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs.*

- (1) *Si B est entier sur A la dimension de Krull relative de l'extension B/A est nulle.*
- (2) *Plus généralement on a le même résultat si tout élément de B est un zéro d'un polynôme de $A[X]$ ayant un coefficient égal à 1. Par exemple si A est un anneau de Prüfer intègre, cela s'applique à n'importe quel sur-anneau de A dans son corps de fractions.*
- (3) *En particulier, en appliquant le théorème 5.7 si $\dim(A) \leq n$ alors $\dim(B) \leq n$, ce que l'on abrège en $\dim B \leq \dim A$.*

Démonstration.

On montre (2). On veut montrer que pour tout $x \in B$ la chaîne idéale $((0; x), (x; 1))$ s'effondre au dessus de A . La liste finie dans A est celle donnée par les coefficients du polynôme qui annule x . Supposons que $x^k = \sum_{i \neq k, i \leq r} a_i x^i$. Soit G, G' deux parties complémentaires de $\{a_i; i \neq k\}$. Le collapsus de $((G, x), (x, G'))$ est donné par une égalité $x^m(g' + bx) = g$ avec $g \in \langle G \rangle_B$, $g' \in \mathcal{M}(G')$ et $b \in B$. En fait nous prenons $g \in G[x]$ et $b \in A[x]$. Si G' est vide on prend $m = k$, $g' = 1$. Sinon soit h le plus petit indice ℓ tel que $a_\ell \in G'$. Tous les a_j avec $j < h$ sont dans G . Si $h < k$ on prend $m = h$, $g' = a_h$. Si $h > k$ on prend $m = k$, $g' = 1$. NB : on remarque que la disjonction porte sur r cas et non pas sur 2^r cas :

— $a_0 \in G'$, ou

- $a_0 \in G, a_1 \in G',$ ou
- $a_0, a_1 \in G, a_2 \in G',$ ou
- ...

□

5.5 Dimension de Krull relative des anneaux de polynômes

Nous donnons la version constructive du théorème classique concernant la dimension de Krull relative de l'extension $A[x_1, \dots, x_n]/A$.

Nous aurons besoin d'un lemme d'algèbre linéaire élémentaire.

Lemme 5.9 *Soit V_1, \dots, V_{n+1} des vecteurs de A^n .*

- *Si A est un corps discret, il existe un indice $k \in \{1, \dots, n+1\}$ tel que V_k est une combinaison linéaire des vecteurs qui suivent (si $k = n+1$ cela signifie que $V_{n+1} = 0$).*
- *Si A est un anneau commutatif, notons V la matrice dont les vecteurs colonnes sont les V_i . Soit μ_1, \dots, μ_ℓ (avec $\ell = 2^n - 1$) la liste des mineurs de V extraits sur les n ou $n-1$ ou ... ou 1 dernières colonnes, rangée par ordre de taille décroissante. On pose $\mu_{\ell+1} = 1$ (le mineur correspondant à la matrice extraite vide). Pour chaque $k \in \{1, \dots, \ell+1\}$ on pose $I_k = \langle (\mu_i)_{i < k} \rangle$ et $S_k = \mathcal{S}(I_k; \mu_k)$. Si le mineur μ_k est d'ordre j , le vecteur V_{n+1-j} est, dans l'anneau $(A/I_k)_{S_k}$, égal à une combinaison linéaire des vecteurs qui suivent.*

Démonstration.

Pour le deuxième point, on applique les formules de Cramer. □

Proposition 5.10 *Soit $B = A[X_1, \dots, X_n]$ un anneau de polynômes ($n \geq 1$). La dimension de Krull relative de l'extension B/A est égale à n . Donc si $\dim A \leq r$, alors $\dim B \leq r + n + rn$. Par ailleurs si $\dim B \leq r + n$, alors de $\dim A \leq r$. On abrège cela en disant que $\dim B = n + \dim A$.*

Démonstration.

La troisième affirmation résulte du fait que si la suite $(a_1, \dots, a_r, X_1, \dots, X_n)$ est singulière dans B , alors la suite (a_1, \dots, a_r) est singulière dans A : on a en effet, en prenant pour simplifier $m = n = 2$ une égalité dans B de la forme

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} X_1^{p_1} X_2^{p_2} + a_1^{m_1} a_2^{m_2} X_1^{p_1} X_2^{p_2+1} Q_4 + a_1^{m_1} a_2^{m_2} X_1^{p_1+1} Q_3 + a_1^{m_1} a_2^{m_2+1} Q_2 + a_1^{m_1+1} Q_1 = 0$$

En regardant dans le polynôme du premier membre le coefficient de $X_1^{p_1} X_2^{p_2}$ on trouve

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} + a_1^{m_1} a_2^{m_2+1} q_2 + a_1^{m_1+1} q_1 = 0$$

qui donne le collapsus de $\overline{(a_1, a_2)}$ dans A .

La deuxième affirmation résulte de la première (cf. théorème 1.29(1)).

La démonstration de la première affirmation en mathématiques classiques s'appuie de manière directe sur le cas de corps. Nous donnons une démonstration constructive qui s'appuie également sur le cas de corps (discrets). Nous reprenons la démonstration de la proposition 1.28 et nous lui faisons subir une relecture (le corps K est remplacé par un anneau A) qui nous permet de faire fonctionner le définition du collapsus au dessus de A . Soit (y_1, \dots, y_{n+1}) dans $A[X_1, \dots, X_n]$. Considérons une démonstration simple (c'est-à-dire directement écrite comme une démonstration d'algèbre linéaire) du fait que les y_i sont algébriquement dépendants sur A lorsque A est un corps discret. Par exemple si les y_i sont des polynômes de degré $\leq d$, les polynômes $y_1^{m_1} \cdots y_{n+1}^{m_{n+1}}$ avec $\sum_i m_i \leq m$ sont dans l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq dm$, qui est de dimension $\leq \binom{dm+n}{n}$, et ils sont au nombre de $\binom{m+n+1}{n+1}$. Pour

une valeur explicite de m on a $\binom{m+n+1}{n+1} > \binom{d_{m+n}}{n}$ (car un polynôme de degré $n+1$ l'emporte sur un polynôme de degré n). On considère désormais que m est fixé à cette valeur. Rangeons les « vecteurs » $y_1^{m_1} \cdots y_{n+1}^{m_{n+1}}$ correspondants (c'est-à-dire tels que $\sum_i m_i \leq m$) dans l'ordre lexicographique pour (m_1, \dots, m_{n+1}) . Nous pouvons nous limiter à $\binom{d_{m+n}}{n} + 1$ vecteurs. En appliquant le lemme 5.9, on obtient que dans chacun des anneaux $(A/I_k)_{S_k}$ un vecteur $y_1^{m_1} \cdots y_{n+1}^{m_{n+1}}$ est égal à une combinaison linéaire des vecteurs qui suivent. Ceci donne, comme dans la démonstration de la proposition 1.28 un collapsus, mais cette fois-ci nous devons ajouter au début et à la fin de la chaîne idéale élémentaire (y_1, \dots, y_{n+1}) les « hypothèses supplémentaires » : c'est donc la chaîne idéale

$$((\mu_i)_{i < k}, y_1; y_2), (y_2; y_3) \cdots, (y_{n-1}; y_n), (y_n; y_{n+1}, \mu_k))$$

qui s'effondre (pour chaque k). En effet, pour le collapsus d'une chaîne idéale on peut toujours passer au quotient par le premier des idéaux (ou par un idéal plus petit) et localiser en le dernier des monoïdes (ou en un monoïde plus petit).

Finalement, tous ces collapsus fournissent le collapsus de (y_1, \dots, y_{n+1}) au dessus de A en utilisant la famille finie (μ_i) . \square

6 Going Up et Going Down

Cette section est simplifiée par rapport au rapport technique de 2001. Ceci grâce à la définition simple du going up pour les treillis distributifs donnée dans [CACM]. Ici nous démontrons l'équivalence en mathématiques classiques avec les définitions usuelles à base d'idéaux premiers.

6.1 Généralités

Relèvement des idéaux premiers (lying over)

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs « possède la propriété de relèvement des idéaux premiers » lorsque l'homomorphisme dual $\text{Spec } \alpha : \text{Spec } V \rightarrow \text{Spec } T$ est surjectif, autrement dit lorsque tout idéal premier de $\text{Spec } T$ est l'image réciproque d'un idéal premier de $\text{Spec } V$. Pour abrégé on dit aussi que le morphisme est « lying over ».

Nous donnons maintenant une définition constructivement pertinente sans utiliser l'homomorphisme dual. L'équivalence en mathématiques classiques avec la définition via les spectres est établie dans la proposition 2.16.

Définition 6.1

1. Un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs est dit lying over lorsqu'il est injectif. Autrement dit α réfléchit les inégalités :

$$\text{pour } a, b \in T \text{ on } a : \alpha(a) \leq \alpha(b) \implies a \leq b.$$

2. Un homomorphisme $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux commutatifs est dit lying over lorsque l'homomorphisme $\text{Zar } \varphi : \text{Zar } A \rightarrow \text{Zar } B$ est injectif.

Remarque 6.2 On a aussi les formulations équivalentes suivantes pour les morphismes lying over.

- Pour les treillis distributifs :
 - Pour tout $b \in T$, $\alpha^{-1}(\downarrow \alpha(b)) = \downarrow b$.
 - Pour tout idéal J de T , $\alpha^{-1}(\langle \langle \alpha(J) \rangle \rangle_V) = J$.
- Pour les anneaux commutatifs :

- Pour tout $x \in A$ et tout idéal de type fini I de A on a l'implication

$$\varphi(x) \in \langle \varphi(I) \rangle \implies x \in \sqrt{I}.$$
- Pour tout idéal de type fini I de A on a $\varphi^{-1}(\langle \varphi(I) \rangle) \subseteq \sqrt{I}$.
- Pour tout idéal I de A on a $\varphi^{-1}(\sqrt{\langle \varphi(I) \rangle}) = \sqrt{I}$.

Lemme 6.3 *Soit $\varphi : T \rightarrow V$ un morphisme de treillis distributifs et S un système générateur de T . Pour que φ soit lying over, il faut et suffit que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in S$ soit satisfaite l'implication*

$$\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \vdash_V \varphi(b_1), \dots, \varphi(b_m) \implies a_1, \dots, a_n \vdash_T b_1, \dots, b_m$$

Démonstration.

Soient $a, b \in T$, on écrit $a = \bigvee_i \bigwedge A_i$, $b = \bigwedge_j \bigvee B_j$ pour des parties finies A_i et B_j de S . Puisque φ est un morphisme de treillis, on a $\varphi(a) = \bigvee_i \bigwedge \varphi(A_i)$ et $\varphi(b) = \bigwedge_j \bigvee \varphi(B_j)$. Supposons $\varphi(a) \leq_V \varphi(b)$. On a, pour chaque i, j , $\bigwedge \varphi(A_i) \leq_V \bigvee \varphi(B_j)$, c'est-à-dire $\varphi(A_i) \vdash_V \varphi(B_j)$. Par hypothèse on obtient $A_i \vdash_T B_j$, c'est-à-dire $\bigwedge A_i \leq_T \bigvee B_j$ pour chaque i, j . Donc $a \leq_T b$. \square

Montée (going up)

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs possède la propriété de montée pour les chaînes d'idéaux premiers, ou plus simplement qu'il est *going up* lorsque la propriété suivante est satisfaite.

Si $Q_1 \in \text{Spec } V$ et $\alpha^{-1}(Q_1) = P_1$, toute chaîne $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n$ d'idéaux premiers de T est l'image réciproque d'une chaîne $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_n$ d'idéaux premiers de V .

Naturellement on peut se limiter au cas $n = 2$. On voit alors que la définition peut se relire comme suit : *Si $Q \in \text{Spec } V$ et $(\text{Spec } \alpha)(Q) = P$, le morphisme $\text{Spec } \alpha' : \text{Spec}(V/Q) \rightarrow \text{Spec}(T/P)$ est surjectif.* Ceci nous ramène au cas d'un morphisme lying over.

Les mêmes définitions sont utilisées pour les morphismes d'anneaux commutatifs.

Nous montrons maintenant en mathématiques classiques une proposition qui permet de donner une définition constructive satisfaisante du going up.

Proposition 6.4 (Going up versus lying over)

Pour un morphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout idéal premier Q de V , en notant $P = \alpha^{-1}(Q)$ le morphisme*

$$\alpha' : T/(P = 0) \rightarrow V/(Q = 0)$$

est injectif (i.e., lying over).

2. *Pour tout idéal I de V , avec $J := \alpha^{-1}(I)$, le morphisme $\alpha' : T/(J = 0) \rightarrow V/(I = 0)$ est injectif.*
3. *Pour tout $i \in V$, avec $J = \alpha^{-1}(\downarrow i)$ le morphisme $\alpha' : T/(J = 0) \rightarrow V/(i = 0)$ est injectif.*
4. *Pour tous $a, b \in T$ et $i \in V$ on a*

$$\alpha(a) \vdash_V \alpha(b), i \implies \exists j \in T \ a \vdash_T b, j \text{ et } \alpha(j) \leq_V i.$$

Démonstration.

Notons que dans le point 3, $j \in \alpha^{-1}(\downarrow i)$ signifie $\alpha(j) \leq_V i$. Le point 4 est donc simplement la traduction du point 3 en tenant compte de la description de l'inégalité $a \leq b$ dans un quotient par un idéal : $a \vdash_{S/(j=0)} b$ équivaut à $a \vdash_S b, j$ (point 3 de la proposition 2.2).

Le point 3 est un cas particulier du point 2. Pour l'implication réciproque si $\alpha(a) \vdash_{V/(I=0)} \alpha(b)$, il y a un $i \in I$ tel que $\alpha(a) \vdash_{V/(i=0)} \alpha(b)$.

Le point 1 est un cas particulier du point 2. Il reste à prouver $1 \Rightarrow 4$, ce qui ne peut se faire qu'avec des arguments non constructifs.

Premier argument, avec Zorn et tiers exclu. Les éléments a, b, i satisfaisant $\alpha(a) \vdash_V \alpha(b)$, i sont fixés et on cherche un j convenable. Par hypothèse (point 1) pour tout idéal premier Q de V contenant i , on a un $j_Q \in T$ vérifiant : $a \vdash_T b, j_Q$ et $\alpha(j_Q) \in Q$. Soit F le filtre de V engendré par les $\alpha(j_Q)$. Si F contient i , on obtient un nombre fini de j_{Q_k} dont la borne inférieure j satisfait $\alpha(j) \leq i$ et $a \vdash_T b, j$ (par distributivité) : on a gagné. Si ce n'est pas le cas, une zornette nous donne un filtre G maximal parmi les filtres contenant F et ne contenant pas i , et ce filtre est premier par construction. D'où une contradiction en considérant l'idéal premier $V \setminus G$ qui contient i mais aucun des $\alpha(j_Q)$.

Deuxième argument, avec le théorème de complétude. On considère une théorie dynamique avec deux sortes. Une pour T et une pour V . On a un symbole de fonction α pour un morphisme de T dans V et un prédicat unaire $Q(x)$ sur V pour $x \in Q$. Les constantes sont les éléments de T et V . Pour a, b, i fixés satisfaisant $\alpha(a) \vdash_V \alpha(b)$, i , on considère la formule $F : \exists j (\alpha(j) \leq i, a \vdash_T b, j)$. Puisqu'on suppose que 1 est satisfait la formule F est valide dans tous les modèles de la théorie, car il suffit qu'elle soit valide pour les modèles donnés par T, V, α et un idéal premier arbitraire de V). Par le théorème de complétude, la formule F est démontrable. Mais comme la théorie est sans axiomes existentiels, une formule existentielle $F = \exists j G(j)$ n'est démontrable que si est démontrable une disjonction $G(j_1)$ ou ... ou $G(j_\ell)$ pour des termes clos j_k (nécessairement prouvablement égaux à des éléments de T). La borne inférieure j de ces j_k nous donne la conclusion voulue. \square

Définition 6.5

1. Un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs est dit going up lorsque pour tous $a, b \in T$ et $y \in V$ on a

$$\alpha(a) \vdash_V \alpha(b), y \implies \exists x \in T (a \vdash_T b, x \text{ et } \alpha(x) \leq y).$$

2. Un homomorphisme $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux commutatifs est dit going up lorsque l'homomorphisme $\text{Zar } \varphi : \text{Zar } A \rightarrow \text{Zar } B$ est going up.

Notons que dans le point 1 l'implication réciproque est toujours satisfaite.

Nous donnons maintenant la version « chaîne idéale » de la notion usuelle de going up formulée en termes de relèvement d'une chaîne d'idéaux premiers en mathématiques classiques. La longueur 1 est suffisante.

Proposition 6.6 (Going Up, version chaînes idéales) *Soit $\alpha : T \rightarrow V$ un morphisme de treillis distributifs. Soit \mathcal{P}_0 un premier idéal saturé de V , $\mathcal{Q}_0 = \alpha^{-1}(\mathcal{P}_0)$, \mathcal{Q}_1 un premier idéal de T tel que $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}_1$, et $\mathcal{P}_1 = \alpha(\mathcal{Q}_1)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. Dans toute situation décrite précédemment, la chaîne idéale $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ s'effondre dans V si, et seulement si, la chaîne idéale $(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ s'effondre dans T .
2. Le morphisme α est going up.

Dans ce cas le saturé de \mathcal{P}_1 est réfléchi dans le saturé de \mathcal{Q}_1 .

Si $\mathcal{P}_0 = \widehat{P}_0$ et $\mathcal{Q}_1 = \widehat{Q}_1$ avec P_0 et Q_1 des idéaux premiers, le Nullstellensatz formel 2.22 avec le point 1 ci-dessus montrent qu'on retrouve bien la définition classique du going up.

Démonstration.

Nous noterons $\mathcal{P}_0 = (J_0, W_0)$, $\mathcal{Q}_0 = (I_0, U_0)$, $\mathcal{Q}_1 = (I_1, U_1)$ et $\mathcal{P}_1 = (J_1, W_1)$.

$1 \Rightarrow 2$. On considère $a, b \in T$ et $y \in V$. On prend pour $\mathcal{P}_0 = (\downarrow y, \emptyset)$ et $\mathcal{Q}_1 = (I_0, b; a)$. On a $I_0 = \{x \in T; \alpha(x) \leq y\}$. Si $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ s'effondre, on a un $z \in V$ tel que $z \vdash_V y$ et $\alpha(a) \vdash_V \alpha(b), z$. Cela revient à dire que $\alpha(a) \vdash_V \alpha(b), y$. Sous cette hypothèse on sait que $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ s'effondre dans T , ce qui signifie qu'il existe $x \in T$ tel que $\alpha(x) \leq y$ et $a \vdash_T b, x$.
 $2 \Rightarrow 1$. On peut supposer sans perte de généralité que I_1 est un idéal et U_1 un filtre. On suppose que $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ s'effondre, on doit montrer que $(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ s'effondre. On a $z \in V, w \in W_0, j \in J_0, a \in U_1$ et $b \in I_1$ tels que $z, w \vdash_V j$ et $\alpha(a) \vdash_V \alpha(b), z$. La première relation donne $z \in J_0$ parce que \mathcal{P}_0 est saturé. Puisque α est going up, on a un $x \in T$ tel que $\alpha(x) \leq z$ (donc $x \in I_0$) et $a \vdash_T b, x$. Or b et $x \in I_1$, donc \mathcal{Q}_1 s'effondre. \square

On vient de traiter une chaîne idéale de longueur 1 dans T . Le corollaire 2.20 permet d'obtenir le résultat analogue au précédent pour une chaîne idéale de longueur ℓ arbitraire dans T .

Going down

Il s'agit de la notion opposée au going up, obtenue en renversant l'ordre. On prend donc la définition 6.8, justifiée par la proposition 6.7 obtenue en renversant l'ordre dans la proposition 6.4.

Proposition 6.7 (Going down versus lying over)

Pour un morphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Pour tout filtre premier Q de V , en notant $P = \alpha^{-1}(Q)$ le morphisme

$$\alpha' : T/(P = 1) \rightarrow V/(Q = 1)$$

est injectif (i.e., lying over).

2. Pour tout filtre I de V , avec $J := \alpha^{-1}(I)$, le morphisme $\alpha' : T/(J = 1) \rightarrow V/(I = 1)$ est injectif.
3. Pour tout $i \in V$, avec $J = \alpha^{-1}(\downarrow i)$ le morphisme $\alpha' : T/(J = 1) \rightarrow V/(i = 1)$ est injectif.
4. Pour tous $a, b \in T$ et $i \in V$ on a

$$\alpha(a), y \vdash_V \alpha(b) \implies \exists x \in T \quad (a, x \vdash_T b \text{ et } \alpha(x) \geq y).$$

Définition 6.8

1. Un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs est dit going down lorsque pour tous $a, b \in T$ et $y \in V$ on a

$$\alpha(a), y \vdash_V \alpha(b) \implies \exists x \in T \quad (a, x \vdash_T b \text{ et } \alpha(x) \geq y).$$

2. Un homomorphisme $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux commutatifs est dit going down lorsque l'homomorphisme $\text{Zar } \varphi : \text{Zar } A \rightarrow \text{Zar } B$ est going down.

Naturellement on obtient la version chaîne idéale du going down en renversant l'ordre dans la proposition 6.6.

Conséquences pour la dimension de Krull

Théorème 6.9 Si un morphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs est lying over et going up (ou bien lying over et going down) on a $\dim(T) \leq \dim(V)$.

Démonstration.

La démonstration est simple et naturelle avec les définitions constructives adoptées ici. Voir [CACM, section XIII-9]. \square

Incomparabilité

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ de treillis distributifs (ou d'anneaux commutatifs) possède la *propriété d'incomparabilité* lorsque les fibres de l'homomorphisme dual $\text{Spec } \alpha : \text{Spec } V \rightarrow \text{Spec } T$ sont constituées d'éléments deux à deux incomparables. Autrement dit, pour Q_1 et Q_2 dans $\text{Spec } V$, si $\alpha^{-1}(Q_1) = \alpha^{-1}(Q_2)$ et $Q_1 \subseteq Q_2$, alors $Q_1 = Q_2$.

La définition constructive correspondante est que le morphisme $T \rightarrow V$ est zéro-dimensionnel.

La principale conséquence de la situation d'incomparabilité pour un homomorphisme $\alpha : T \rightarrow V$ est le fait que $\dim(V) \leq \dim(T)$. Ceci est un cas particulier du théorème 5.7.

6.2 Cas des anneaux commutatifs

Nous donnons deux ou trois énoncés caractéristiques. Les démonstrations et un traitement beaucoup plus complet se trouve dans [CACM, section XIII-9].

Lying over

En application de la remarque 6.2 on a la caractérisation suivante.

Lemme 6.10 *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme φ est lying over.*
2. *Pour tout idéal I de A et tout $x \in A$, on a : $\varphi(x) \in \varphi(I)B \Rightarrow x \in \sqrt{I}$.*

Lemme 6.11 (Le lying over usuel) *Soit $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs avec B entier sur A . Le morphisme $A \rightarrow B$ est lying over.*

Démonstration.

Supposons $x \in IB$, i.e., $x = \sum j_i b_i$, avec $j_i \in I$, $b_i \in B$. Les b_i et 1 engendrent une sous- A -algèbre C de B qui est un A -module fidèle et de type fini. Le polynôme caractéristique de la matrice de la multiplication par x (exprimée sur un système générateur fini du A -module C) a donc tous ses coefficients (sauf le coefficient dominant) dans I . \square

Lemme 6.12 *Soit $A \subseteq B$ une A -algèbre fidèlement plate sur A . Le morphisme $A \rightarrow B$ est lying over.*

Going Up

Lemme 6.13 *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme φ est going up (definition 6.5).*
2. *Pour tout idéal I de B , en notant $J = \varphi^{-1}(I)$, le morphisme $\varphi_I : A/J \rightarrow B/I$ obtenu par factorisation est lying over.*
3. *Même chose avec les I de type fini.*

En mathématiques classiques, on peut se limiter aux idéaux premiers dans le point 2.

Démonstration.

Cela résulte du résultat analogue pour les treillis distributifs (proposition 6.4) et de la comparaison des idéaux de A et de $\text{Zar } A$ (fait 4.2 et proposition 4.3). \square

En application du point 2 et du lying over pour les extensions entières on obtient immédiatement le going up pour les extensions entières.

Corolaire 6.14 (Un going up classique) *Soit $A \subseteq B$ des anneaux commutatifs avec B entier sur A . Alors le morphisme $A \rightarrow B$ est going up. Donc $\dim A \leq \dim B$, et vu la proposition 5.8, $\dim A = \dim B$.*

Un corolaire du résultat précédent et du théorème 1.29 est le théorème suivant, qui nous dit que la dimension de Krull d'une algèbre de présentation finie sur un corps discret est bien celle que nous donne la mise en position de Noether.

Théorème 6.15 *Soit K un corps discret, I un idéal de type fini de l'anneau $K[X_1, \dots, X_\ell]$ et A l'algèbre quotient $K[\underline{X}]/I$. Si $1 \notin I$ une mise en position de Noether de l'idéal I fournit un entier r et des éléments y_1, \dots, y_r de A qui sont algébriquement indépendants sur K et tels que A est un module de type fini sur $K[y_1, \dots, y_r]$. Alors $\dim A = r$.*

Notons que le test $1 \in I?$ et la mise en position de Noether sont réalisées par des algorithmes explicites.

Going Down

Lemme 6.16 *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme φ est going down (définition 6.8).*
2. *Pour tous $b, a_1, \dots, a_q \in A$ et $y \in B$ tels que $\varphi(b)y \in \sqrt[\mathbb{B}]{\langle \varphi(a_1, \dots, a_q) \rangle}$, il existe $x_1, \dots, x_p \in A$ tels que :*

$$\langle bx_1, \dots, bx_p \rangle \subseteq \sqrt[\mathbb{A}]{\langle a_1, \dots, a_q \rangle} \text{ et } y \in \sqrt[\mathbb{B}]{\langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p) \rangle}.$$

3. *(en mathématiques classiques) Pour tout idéal premier P de B , avec $Q = \varphi^{-1}(P)$, le morphisme $A_Q \rightarrow B_P$ obtenu par passage au quotient est lying over.*

Démonstration.

L'équivalence des points 1 et 3 en mathématiques classiques résulte du résultat analogue pour les treillis distributifs (proposition 6.7), de la comparaison des filtres de B et de $\text{Zar } B$ (fait 4.4 et proposition 4.5) en notant que tout filtre premier de $\text{Zar } B$ provient d'un filtre premier de B .

Pour l'équivalence des points 1 et 2, dans la définition nous avons remplacé un élément arbitraire $\sqrt[\mathbb{A}]{\langle \underline{b} \rangle}$ de $\text{Zar } A$ et un élément arbitraire $\sqrt[\mathbb{B}]{\langle \underline{y} \rangle}$ de $\text{Zar } B$ par des générateurs $\sqrt[\mathbb{A}]{\langle \underline{b} \rangle}$ et $\sqrt[\mathbb{B}]{\langle \underline{y} \rangle}$. Comme les générateurs engendrent $\text{Zar } A$ et $\text{Zar } B$ par sups finis, les règles de distributivité impliquent que la restriction à ces générateurs est suffisante. \square

Théorème 6.17 (Going Down) *Soit $A \subseteq B$ des anneaux. Le morphisme $A \rightarrow B$ est going down dans les deux cas suivants.*

1. *B est plat sur A .*
2. *B est intègre et entier sur A , et A est intégralement clos.*

Références

- [CACM] LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Commutative algebra : constructive methods*. Traduit du français (Calvage & Mounet, 2011, version révisée et étendue par les auteurs) par Tania K. Roblot. Springer. Collection Algebra and Applications, vol 20. 2015. 1, 36, 43, 45, 48, 49
- [Eisenbud] EISENBUD D. *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York. 1995. 10
- [MRR] MINES R., RICHMAN F., RUITENBURG W. *A Course in Constructive Algebra*. Universitext. Springer-Verlag. 1988. 4, 10
- [Rota] ROTA G.-C. *Indiscrete Thoughts*. Birkhauser, 1995. 55
- [Sharp] SHARP R.. *Steps in Commutative Algebra*. Second edition. L.M.S. Student Texts 51. Cambridge University Press, 2000. 43
- [1] CEDERQUIST, COQUAND T. *Entailment relations and Distributive Lattices* Logic Colloquium'98 (Prague), 127–139, Lect. Notes Log., 13. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, (2000). 1, 4, 5, 21, 22, 31
- [2] COQUAND T., LOMBARDI H. *Krull's Principal Ideal Theorem*. Institut Mittag Leffler, Technical reports (2001). 6
- [3] COQUAND T., LOMBARDI H. *Hidden constructions in abstract algebra : Krull dimension of distributive lattices and commutative rings*. p. 477–499 dans Commutative ring theory and applications (Fez, 2001), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. vol 231. Dekker, New York (2003). 1
- [4] COQUAND T., LOMBARDI H., ROY M.-F. *An elementary characterization of Krull dimension.* , p. 239–244, From sets and types to topology and analysis, Oxford Logic Guides n°48. Oxford Univ. Press, Oxford (2005). 1
- [5] COQUAND T., PERSSON H. *Valuations and Dedekind's Prague Theorem*. Journal of Pure and Applied Algebra **155** (2001), 121–129. 6, 21
- [6] COSTE M., LOMBARDI H., ROY M.-F. *Dynamical method in algebra : Effective Nullstellensätze*. Annals of Pure and Applied Logic **111** (2001), 203–256. 4, 6, 55, 56
- [7] ESPAÑOL L. *Constructive Krull dimension of lattices*. Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2) **37** (1982), 5–9. 1, 4, 33, 34, 35
- [8] ESPAÑOL L. *Finite chain calculus in distributive lattices and elementary Krull dimension*. Contribuciones científicas en honor de Mirian Andres Gomez. Eds. L. Lamban, A. Romero y J. Rubio, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logrono, Spain, (2010). 36
- [9] JOYAL, A. *Spectral spaces and distributive lattices*, Notices of the American Mathematical Society **18**, (1971). 1
- [10] JOYAL A. *Le théorème de Chevalley-Tarski*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 1975. 4
- [11] KUHLMANN F.-V., LOMBARDI H. *Construction du hensélisé d'un corps valué*. Journal of Algebra **228**, (2000), 624–632. 6
- [12] LOMBARDI H. *Un nouveau positivstellensatz effectif pour les corps valués*. Séminaire «Structures Ordonnées» (Paris 6-7) (18 pages, paru en janvier 96 dans la livraison 94-95. Editeurs : F. Delon, A. Dickmann, D. Gondard) 6
- [13] LOMBARDI H. *Le contenu constructif d'un principe local-global avec une application à la structure d'un module projectif de type fini* . Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. (1997). Fascicule 94–95 & 95–96. 6

- [14] LOMBARDI H. *Relecture constructive de la théorie d'Artin-Schreier*. Annals of Pure and Applied Logic, **91**, (1998), 59–92. 4, 6
- [15] LOMBARDI H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique*. Math. Zeitschrift **242** (2002), 23–46. 1, 4, 6
- [16] LOMBARDI H. *Platitude, localisation et anneaux de Prüfer : une approche constructive*. Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. (2002). Fascicule 1998–2001. 6
- [17] LOMBARDI H. *Hidden constructions in abstract algebra (I) Integral dependance*. Journal of Pure and Applied Algebra **167** (2002), 259–267. 6
- [18] LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Constructions cachées en algèbre abstraite : le principe local-global*. p. 461–476 dans Commutative ring theory and applications (Fez, 2001), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. vol 231. Dekker, New York (2003). 6
- [19] LORENZEN P. *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände*. J. Symbolic Logic, **16** (1951), 81–106. Translation by Stefan Neuwirth : *Algebraic and logistic investigations on free lattices*, <http://arxiv.org/abs/1710.08138>. 21
- [20] MACNEILLE H. M. *Partially ordered sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937), no. 3, 416–460. 35

Annexe A : Complétude, compacité, LLPO et théories géométriques

A.1 Théories propositionnelles et modèles

Considérons un ensemble V fixé de *propositions atomiques*, ou *variables de propositions*, ou *atomes*.

Une *proposition* ϕ, ψ, \dots est un objet syntactique construit sur les atomes $p, q, r \in V$ avec les connecteurs logiques usuels

$$0, 1, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \neg\phi$$

Notons P_V l'ensemble des propositions. Soit F_2 l'algèbre de Boole à deux éléments. Une *valuation* est une fonction $v \in F_2^V$ qui assigne une valeur de vérité à chaque proposition atomique. Une telle valuation s'étend en une application $P_V \rightarrow \{0, 1\}$, $\phi \mapsto v(\phi)$ de manière naturelle¹⁵.

Une *théorie propositionnelle* \mathcal{T} est un sous-ensemble de P_V . Un *modèle* de \mathcal{T} est une valuation v qui vérifie $v(\phi) = 1$ pour tous les $\phi \in \mathcal{T}$.

Plus généralement, étant donnée une algèbre de Boole B on peut définir une B -valuation comme une fonction $v \in B^V$. Une telle valuation s'étend également en une application $P_V \rightarrow B$, $\phi \mapsto v(\phi)$ de manière naturelle. Un B -*modèle* de \mathcal{T} est une valuation v qui vérifie $v(\phi) = 1$ pour tous les $\phi \in \mathcal{T}$. La notion usuelle de modèle est un cas particulier en prenant pour B l'algèbre F_2 .

Pour une théorie \mathcal{T} donnée il existe une algèbre de Boole universelle pour laquelle \mathcal{T} est un modèle. On l'appelle l'*algèbre de Lindenbaum de \mathcal{T}* . C'est une algèbre de Boole définie par générateurs et relations. Les générateurs sont les éléments de V et chaque élément ϕ de \mathcal{T} fournit la relation $v(\phi) = 1$. La théorie \mathcal{T} est formellement consistante si, et seulement si, son algèbre de Lindenbaum est non triviale.

A.2 Le théorème de complétude

Théorème A.1 (*théorème de complétude*) Une théorie \mathcal{T} est formellement consistante si, et seulement si, elle admet un modèle.

Ceci est le théorème de complétude pour la logique des propositions, démontrable en mathématiques classiques.

Un tel théorème est fortement relié au programme de Hilbert, qui peut être vu comme une tentative de remplacer la question de l'existence d'un modèle pour une théorie par le fait purement formel que la théorie n'est pas contradictoire.

Soit B l'algèbre de Lindenbaum de \mathcal{T} . Pour prouver la complétude il suffit de trouver un morphisme $B \rightarrow F_2$ quand B n'est pas triviale, ce qui est la même chose que trouver un idéal premier dans une algèbre de Boole non triviale.

Notez que l'existence est claire quand B est finie, car elle est isomorphe à une algèbre F_2^k . Dans ce cas le théorème de complétude est direct.

A.3 Le théorème de compacité

Le théorème de complétude peut être vu comme une conséquence du résultat fondamental suivant.

Théorème A.2 (*théorème de compacité*) Soit \mathcal{T} une théorie. Si tous les sous-ensembles finis de \mathcal{T} admettent un modèle, il en va de même pour \mathcal{T} .

15. En utilisant les tables de vérité des connecteurs.

En fait cet énoncé est équivalent au théorème de complétude. En effet une théorie est formellement consistante si, et seulement si, toutes ses sous-théories finies sont formellement consistantes. Et toute théorie finie consistante admet un modèle.

Une preuve simple générale du théorème de compacité consiste à munir $W := \{0, 1\}^V$ de la topologie produit et à remarquer que l'ensemble des modèles de \mathcal{T} est un sous-espace fermé. Le théorème est alors un corolaire de la compacité de l'espace W si l'on exprime la compacité (en mathématiques classiques) sous la forme : si une famille de sous-ensembles fermés de W a des intersections finies non vides, alors son intersection est non vide.

A.4 LPO et LLPO

Lorsque V est dénombrable (c'est-à-dire discret et énumérable) on a l'argument alternatif suivant. On écrit $V = \{p_0, p_1, \dots\}$ et l'on construit par récurrence une valuation partielle v_n sur $\{p_i \mid i < n\}$ de sorte que :

- v_n étend v_{n-1} ,
- chaque sous-ensemble fini de \mathcal{T} admet un modèle qui étend un v_n

Pour définir v_{n+1} on essaie d'abord $v_{n+1}(p_n) = 0$. Si cela échoue il y a une partie finie de \mathcal{T} telle que chacun de ses modèles qui étend v_n satisfait $v(p_n) = 1$ et l'on prend $v_{n+1}(p_n) = 1$.

Le caractère non effectif de l'argument est contenu dans le choix de $v_{n+1}(p_n)$, qui demande de donner une réponse globale à un ensemble infini de questions élémentaires.

Maintenant supposons aussi que nous pouvons énumérer l'ensemble infini \mathcal{T} . Nous pouvons alors construire une suite croissante de parties finies de \mathcal{T} , $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots$ qui recouvre \mathcal{T} . Si nous avons construit une valuation v_n qui s'étend en un modèle de chaque K_j , pour définir $v_{n+1}(p_n)$, nous devons donner une réponse globale à la question : est-ce que tous les K_j ont un modèle w qui prolonge v_n et qui vérifie $w(p_n) = 0$? Pour chaque j , il s'agit d'une question élémentaire qui a une réponse claire.

Plus précisément définissons $g_n : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ de la manière suivante : $g_n(j) = 0$ s'il y a un modèle $v_{n,j}$ de K_j qui étend v_n avec $v_{n,j}(p_n) = 0$, sinon $g_n(j) = 1$. Si $g_n(j) = 1$ et si $\ell \geq j$ tous les modèles $v_{n,\ell}$ de K_ℓ qui étendent v_n satisfont $v_{n,\ell}(p_n) = 1$. Ainsi la fonction g_n est croissante. Nous devons poser $v_{n+1}(p_n) = 1$ si $g_n(j) = 1$ pour un j . Si $g_n(j) = 0$ pour tout j , nous pouvons poser $v_{n+1}(p_n) = 0$. Dans les deux cas nous savons que pour tout j , il y a un modèle de K_j qui étend v_{n+1} . La récurrence fonctionne ! Ainsi nous « construisons » par récurrence une suite infinie de modèles partiels v_n en utilisant à chaque étape le principe non constructif LPO de Bishop (Least Principle of Omniscience) :

- pour toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, on a $f = 0$ ou $\exists j \in \mathbb{N} f(j) = 1$.

Ce principe est appliqué à chaque étape n à la fonction g_n .

En fait nous pouvons modifier légèrement l'argument et utiliser seulement une combinaison du Choix Dépendant et du principe de Bishop LLPO (Lesser Limited Principle of Omniscience), qui est connue pour être strictement plus faible que LPO :

- étant données deux fonctions croissantes $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ telles que, pour chaque j on ait

$$g(j) = 0 \text{ ou } h(j) = 0$$

alors nous avons $g = 0$ ou $h = 0$.

En effet définissons $h_n : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ de manière symétrique : $h_n(j) = 0$ s'il y a un modèle $v_{n,j}$ de K_j qui étend v_n avec $v_{n,j}(p_n) = 1$, sinon $h_n(j) = 1$. Les fonctions g_n et h_n sont croissantes. Par hypothèse de récurrence nous avons $g_n(j) = 0 \vee h_n(j) = 0$ pour tout j . Donc par LLPO, nous pouvons définir $v_{n+1}(p_n) = 0$ si $g_n = 0$ et $v_{n+1}(p_n) = 1$ si $h_n = 0$. Néanmoins nous devons utiliser le Choix Dépendant pour pouvoir faire ce choix une infinité de fois car la réponse « $g = 1$ ou $h = 1$ » donnée par l'oracle LLPO peut être ambiguë.

Réciproquement, on voit facilement que le théorème de compacité restreint au cas dénombrable implique LLPO.

A.5 Théories géométriques

What would have happened if topologies without points had been discovered before topologies with points, or if Grothendieck had known the theory of distributive lattices? (Gian Carlo Rota [Rota]).

Une formule est *géométrique* si, et seulement si, elle est construite uniquement avec le connecteurs $0, 1, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi$ à partir des symboles de proposition dans V . Une théorie (propositionnelle) \mathcal{T} est *géométrique* si, et seulement si, toutes les formules dans \mathcal{T} sont du type $\phi \rightarrow \psi$ où ϕ et ψ sont géométriques.

Les formules d'une théorie géométrique peuvent être vues comme fournissant une relation implicative sur V pour un treillis distributif $L_{\mathcal{T}}$ (engendré par V) et l'algèbre de Lindenbaum de \mathcal{T} n'est rien d'autre que l'algèbre de Boole librement engendrée par le treillis distributif $L_{\mathcal{T}}$.

Il résulte de la proposition 2.5 que \mathcal{T} est formellement consistante si, et seulement si, le treillis $L_{\mathcal{T}}$ est non trivial. En outre un modèle de \mathcal{T} n'est rien d'autre qu'un élément de $\text{Spec}(L_{\mathcal{T}})$.

Théorème A.3 (*théorème de complétude pour les théories géométriques*) *Si le treillis distributif $L_{\mathcal{T}}$ défini par une théorie géométrique \mathcal{T} est non trivial, alors \mathcal{T} a un modèle.*

A.6 Théories dynamiques

Voir [6]. Une théorie propositionnelle dynamique est presque la même chose qu'une théorie géométrique. Elle est un moyen très élémentaire de produire une théorie géométrique \mathcal{T} à partir d'*axiomes*.

Elle est définie comme un système de preuves pour établir des *règles dynamiques*. Une règle dynamique est une règle de déduction du type

$$P \vdash Q_1 \text{ ou } \dots \text{ ou } Q_n$$

où P et chaque Q_i sont des listes dans V (des listes de propositions atomiques). Une règle sans second membre est lue comme $P \vdash \perp$. La conclusion \perp signifie l'effondrement de la théorie.

Les axiomes de la théorie sont des règles dynamiques et le fonctionnement des preuves consiste à valider d'autres règles dynamiques à partir des axiomes en appliquant les règles de réflexivité, monotonie et transitivité évidentes.

Si par exemple la règle suivante

$$(p_1, p_2, p_3) \vdash (q_{1,1}, q_{1,2}) \text{ ou } (q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3})$$

est validée à partir des axiomes par le système de preuves, cela valide dans la théorie géométrique correspondante \mathcal{T} la présence de la formule

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \longrightarrow (q_{1,1} \wedge q_{1,2}) \vee (q_{2,1} \wedge q_{2,2} \wedge q_{2,3}).$$

Une règle est dite algébrique s'il n'y a pas de «ou» dans le second membre. Pour une théorie algébrique, c'est-à-dire une théorie où tous les axiomes sont algébriques, les conditions d'effondrement sont souvent faciles à établir. Par exemple si l'effondrement d'un anneau commutatif¹⁶ est défini comme le fait d'avoir établi la règle $\vdash 1 = 0$, l'effondrement signifiera que l'idéal des hypothèses $a = 0$ contient 1.

16. L'anneau est défini à partir d'un système générateur G par une famille d'hypothèses $p_i = 0$ pour des $p_i \in \mathbb{Z}[G]$.

Collapsus simultané

Il arrive que l'ajout d'un axiome dans une théorie dynamique ne change pas le collapsus (l'effondrement de la théorie). On dit que la nouvelle théorie s'effondre simultanément avec la première.

Les théorèmes de collapsus simultané sont les versions constructives des théorèmes en mathématiques classiques qui disent que tout modèle de la première théorie s'étend en un modèle de la seconde. Par exemple un anneau commutatif s'effondre dès que le fait de le voir comme un corps algébriquement clos dynamique le fait s'effondrer. Cela constitue la version constructive de plusieurs théorèmes classiques importants : 1) tout anneau commutatif non trivial possède un idéal premier ; 2) tout anneau intègre est un sous-anneau d'un corps ; 3) tout corps possède une clôture algébrique. Mais seul le deuxième admet une preuve constructive.

Dans le cas où on ajoute un axiome $P \vdash Q_1$ ou Q_2 , démontrer le collapsus simultané de la nouvelle théorie revient à démontrer que si l'ajout séparément de $\vdash Q_1$ ou de $\vdash Q_2$ produit le collapsus, alors l'ajout de $\vdash P$ produit également le collapsus.

Un autre exemple important est la démonstration du caractère inoffensif de l'ajout du tiers exclu dans les théories géométriques. Plus précisément, si pour un $p \in V$ on ajoute un symbole p' (non dans V) et si sur le nouveau V' on ajoute les axiomes $\vdash p$ ou p' et $p, p' \vdash \perp$, la nouvelle théorie s'effondre simultanément avec la précédente (en fait elle prouve exactement les mêmes règles dynamiques formulées sans l'utilisation de p').

Théories dynamiques du premier ordre [6]

La généralisation usuelle des théories propositionnelles est donnée par les théories formelles du premier ordre.

Il correspond à cela des théories géométriques du premier ordre et des théories dynamiques du premier ordre.

Ce qui relève d'une théorie dynamique du premier ordre admet une interprétation constructive évidente. En outre, comme pour les théories propositionnelles, un théorème explique le caractère inoffensif de la logique classique du premier ordre lorsque l'on se situe dans une théorie formelle dont tous les axiomes sont des formules géométriques ([6]) : *lorsqu'on passe d'une théorie dynamique à la théorie formelle du premier ordre avec logique classique correspondante, les règles dynamiques prouvables (formulées dans la théorie dynamique de départ) restent les mêmes.*

Ce résultat fondamental est rendu particulièrement simple par la considération des théories dynamiques du premier ordre. Cela tient à ce que le système de preuve dans une théorie dynamique relève de calculs purs, sans utilisation de formules plus compliquées que les formules atomiques. Il s'agit en quelque sorte de preuves directes sans utilisation de la logique.

Le théorème de compacité pour les théories propositionnelles (valable en mathématiques classiques) implique également le théorème de complétude pour les théories formelles du premier ordre, mais la démonstration (constructive) de cette implication est plus délicate.