



HAL
open science

Réels irréels. La problématique du réel et de l'irréel dans les notions spatiotemporelles

Jean Stratonovitch

► **To cite this version:**

Jean Stratonovitch. Réels irréels. La problématique du réel et de l'irréel dans les notions spatiotemporelles. Le "réel" dans les situations de transmission, d'apprentissage et de connaissances, Béatrice Drot-Delange - Dacia Hammouda, Mar 2018, Clermont-Ferrand, France. hal-01755933v1

HAL Id: hal-01755933

<https://hal.science/hal-01755933v1>

Submitted on 31 Mar 2018 (v1), last revised 29 Apr 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

Réels irréels

La problématique du réel et de l'irréel dans les notions spatiotemporelles

Jean Stratonovitch

Résumé : Deux conceptions de l'espace, du temps, de l'espace-temps sont possibles : la première est la conception chosiste ; elle affirme que ce sont des entités ayant une réalité « en elles-mêmes » ; la deuxième est la conception relativiste, au sens premier du mot ; elle affirme que ce sont des entités n'ayant pas de réalité « en elles-mêmes », et qui ne sont que des « grilles » que nous projetons sur le réel pour le décrire et le comprendre. Cet article s'attache à montrer que la deuxième hypothèse a une portée explicative supérieure à la première en ce qui concerne

- la constitution d'un degré zéro de rotation ;
- le phénomène de fuite apparente des corps lointains dans un univers stable ;
- l'accélération apparente de ce phénomène de fuite apparente ;
- le caractère euclidien de l'espace plat ;
- sa tridimensionnalité ;
- l'existence de dimensions « repliées ».

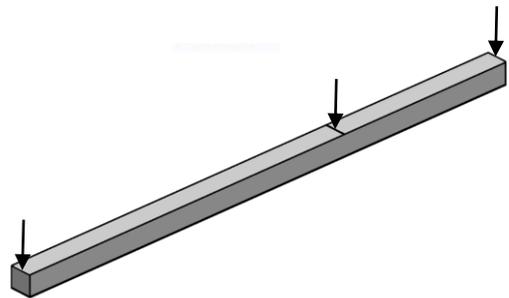
1 - Contes de fées mathématiques

Trois contes de fées

Le même vertige inondé de terreur qui s'empare parfois de l'être humain devant le ciel étoilé devrait également le saisir lorsqu'il se penche sur ces nombres qu'on appelle « réels ».

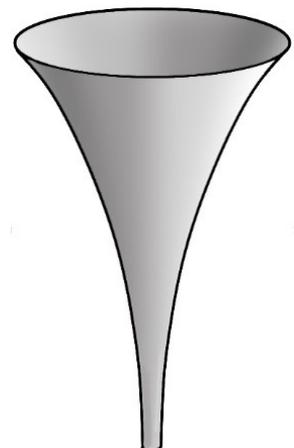
Chacun d'eux – ou presque – a une écriture de longueur infinie, qui irait donc infiniment plus loin, si nous pouvions la dérouler tout droit dans l'espace, que les plus lointains corps célestes que nous pouvons observer. Je dis « presque » car il faut exclure les décimaux, dont l'écriture n'est pas infinie. Mais c'est un cas négligeable, puisqu'ils forment un ensemble de mesure nulle. En oubliant ce cas particulier, chacun de ces nombres, considéré comme un code, renferme en lui plus – infiniment plus – d'informations que ce qu'il faudrait pour encoder tout ce que l'humanité a jusqu'ici produit de numérisable, textes, images, musiques, films, etc. Cet encodage prendrait tellement peu de place, dans la suite illimitée des décimales, qu'il en resterait suffisamment pour encoder de la même manière tout ce que toutes les civilisations existant dans l'univers ont produit de numérisable, même si elles sont en nombre infini.

Le nombre x qui encode toutes les productions culturelles de l'univers entier peut sans perte de généralité être choisi dans l'intervalle $]0, 1[$. Il lui correspond donc, sur une règle à mesurer géométriquement parfaite, une unique graduation. Tout le savoir, au sens le plus large, de toutes les cultures de l'univers peut être codé par la position exacte de cette graduation sur cette règle.

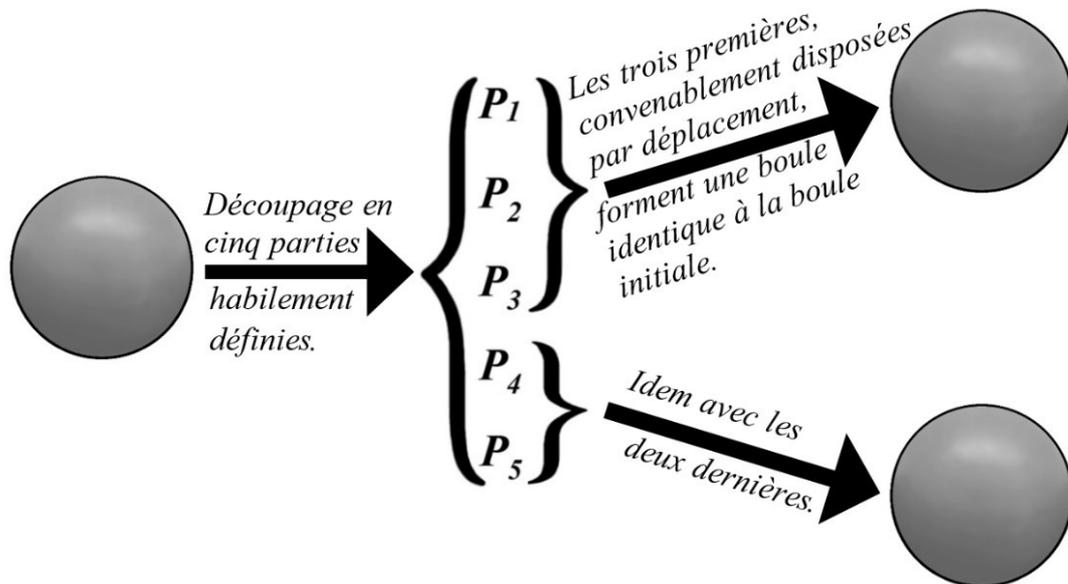


Autre conte de fées, celui de l'entonnoir, tiré lui aussi du « répertoire populaire » de la géométrie. Cet objet est engendré par la rotation de l'arc d'hyperbole équilatère $y = f(x) = \frac{1}{x+1}$ pour $x \geq 0$ autour de l'axe des x . Sa surface est infinie, tandis que son volume est fini.

Il suffit donc d'y verser une quantité finie de peinture pour le remplir, et elle recouvrira néanmoins une surface infinie.



Autre exemple, tirée cette fois du répertoire savant de la géométrie, le paradoxe de Banach et Tarski¹ : on peut découper une boule en cinq parties qui, réassemblées convenablement, forment deux boules identiques à la première.



Irréalité des réels

Un simple trait sur une règle réelle n'aura jamais l'infinie finesse qu'il a dans le conte de fées mathématique. Il aura au moins l'épaisseur d'un atome, environ un angström, soit 10^{-10} mètres. Si la règle mesure un mètre, ce trait, loin de pouvoir potentiellement coder tout le savoir de toutes les cultures de l'univers, permettra au mieux de coder les dix chiffres d'un seul numéro de téléphone.

Semblablement, l'entonnoir, dont le diamètre tend vers zéro lorsque la distance à l'ouverture tend vers l'infini, n'est pas constructible.

Dans le paradoxe de Banach et Tarski, le terme « morceau » est trompeur, qui évoque quelque chose d'analogue à ce que produit le bris d'un objet. Ce n'est en rien le cas. Les « morceaux » sont d'impensables dentelles, s'interpénétrant de partout, elles-mêmes réunions (en nombre infini non dénombrable) de dentelles tout aussi impensables sélectionnées grâce à l'axiome du choix, qui assure certes une existence mathématique à l'objet construit, mais ne va pas plus loin et ne donne aucune information quant à ce qu'il peut être. On ne sait pas ni ne saura jamais comment ces dentelles sont faites et même si on le savait, leur infinie finesse rendrait évidemment leur construction physique impossible. Le théorème de Banach et Tarski ne permet en aucune façon de multiplier les boules effectives comme il est écrit que Jésus l'a fait avec les pains.

¹ On en trouvera un excellent et vivant exposé sous le titre *Deux (deux ?) minutes pour le théorème de Banach-Tarski* à l'adresse eljjdw.canalblog.com – il dure une trentaine de minutes.

Ces trois contes de fées, irréprochables sur le plan mathématique, sont construits sur la même ressource : l'infinie petitesse des points géométriques, ou, ce qui revient au même, l'infinie exactitude des réels, ou encore, ce qui revient encore au même, la longueur infinie de leur développement décimal.

Les mathématiques, quoique maniées selon les règles de l'art, fabriquent aisément de l'irréel dès lors qu'elles utilisent le plein pouvoir qu'ont les nombres réels de plonger dans l'infiniment petit.

Mais elles sont – et particulièrement la géométrie – en premier lieu une science du réel en tant qu'obéissant à certaines lois, qui sont formalisées en un système obéissant à une logique dont la solidité se veut absolue. C'est une science construite précisément pour ne jamais produire de contes de fées – aussi est-il bien difficile à accepter qu'elle le fasse.

2 – Irréalité de l'infiniment petit

Tant que les connaissances sur l'infiniment petit restent inexistantes, aucun problème n'apparaît. Il est tout naturel de croire que la propriété de divisibilité observée aux échelles macroscopique et microscopique perdure indéfiniment – et donc que l'infiniment petit est infiniment grand. C'est ce que fait par exemple Pascal dans sa célèbre méditation sur les deux infinis – autre conte de fées.

Il est intéressant d'observer que le concept d'espace n'y apparaît pas : c'est le réel, l'objet concret qui est divisible à l'infini, le corps du ciron, partie par partie plus petite emboîtée dans la précédente, jusqu'à contenir un univers entier, lui aussi divisible à l'infini.

La preuve définitive de l'existence des atomes et plus généralement de l'aspect corpusculaire de l'infiniment petit devrait logiquement renverser ou écorner ce paradigme. Mais ce n'est pas le cas. La réalité présumée de l'infiniment petit indéfiniment divisible trouve des solutions de survie.

J'y vois diverses raisons :

– Le principe selon lequel la nature est écrite en langage mathématique est puissant. Il a donné maintes preuves de son efficacité ; et ces preuves invoquent toutes, ou presque, le calcul différentiel. En particulier la vitesse instantanée, l'accélération instantanée, concepts fondateurs de la physique moderne. Comment pourrait-on considérer que les variations infiniment petites de la grandeur « position » sont sans signification, alors même que leur émergence dans la théorisation du réel s'est avérée si féconde ?

– Sur le plan mathématique, il n'y a pas d'autre choix pertinent que celui des nombres réels. On peut certes construire des systèmes de nombres « refusant »

de pouvoir tendre vers zéro, mais ils posent des problèmes insurmontables : perte de la notion de limite, de continuité, de dérivation, etc. Dès lors qu'on admet sans réserve que la nature est écrite en langage mathématique, on échappe difficilement à la conclusion que ces incontournables nombres réels doivent correspondre à quelque réalité.

– Si le *seul* instrument de mesure des longueurs était cet *instrument premier* qu'est la règle à mesurer, nous ne pourrions pas donner de sens à des longueurs inférieures à la taille d'un atome, mais on découvre des *instruments-relais* fondés sur divers rayonnements et permettant d'extrapoler la géométrie au monde subatomique. On peut ainsi donner une signification à des longueurs considérablement plus petites que celle de l'atome, par exemple la taille du noyau. Cela renforce l'hypothèse d'une divisibilité à l'infini du réel.

– Enfin, dans le délai qui sépare Blaise Pascal de Jean Perrin, dont le livre *Les atomes*, signa en 1908 la mort des conceptions anti-atomistes encore vigoureusement vivantes dans le milieu scientifique, on a inventé le concept d'*espace*. Né simple objet mathématique chez Descartes, ensemble des coordonnées possibles d'un point, il se chosifie avec Newton pour devenir une entité *réelle* qui est à la fois contenant et arrière-plan du monde². Peu importe alors que l'aspect corpusculaire de l'« infiniment petit » soit en conflit avec le postulat de sa divisibilité à l'infini, puisque l'*espace* est là, qui peut assumer cette divisibilité dorénavant largement décrochée du réel.

Mais d'autres considérations viennent condamner cette issue. Pour « voir » dans l'« infiniment petit », il faut utiliser des longueurs d'onde à l'échelle de ce qu'on veut observer. Leur emploi demande une quantité d'énergie inversement proportionnelle à elles, et qui tend donc vers l'infini quand les dimensions de ce qu'on veut observer tendent vers zéro. Il y a donc une taille en-dessous de laquelle toute observation devient définitivement impossible : la longueur de Planck, environ 10^{-35} mètres.

Certes, c'est immensément petit devant la dimension d'un atome, mais ce n'est pas nul. Deux points théoriques dont la distance est inférieure à la longueur de Planck sont deux points qu'aucune observation ne peut séparer, alors que la géométrie les sépare – et les sépare, en outre, par un abîme où Pascal pourrait faire tenir, au moindre détail près, autant de milliards de galaxies qu'il aurait fantaisie de le faire. Sur la règle magique où la féerie mathématique voudrait que nous puissions coder tout le savoir du monde, le trait le plus fin que nous pourrions tracer, par un éventuel procédé sophistiqué nous permettant d'outrepasser la

² Sur la genèse et l'évolution du concept d'espace : Alexandre Koyré, *Du monde clos à l'univers infini*, collection *Tel*, Gallimard.

granularité de l'atome, ne nous permettra jamais, quel que soit le procédé, que de coder 35 caractères, trois numéros de téléphone.

De même, il existe une durée, la durée de Planck, telle que deux instants séparés par une durée inférieure ou égale à elle sont, de quelque façon que l'on s'y prenne, physiquement indiscernables. En conséquence, la propriété s'étend à l'espace-temps : il existe une limite définitive à notre possibilité de séparer les instants locaux théoriques qui le composent.

L'infinie divisibilité du réel n'a plus aucun territoire réel où se réfugier. Elle n'est plus rien d'autre qu'une vue de l'esprit. Cependant que les nombres réels, imperturbablement, continuent de construire un « réel » divisible à l'infini.

Ce n'est pas sans dégâts.

– Tant qu'on ignorait la longueur et la durée de Planck, les points et les instants théoriques, objets certes inexistantes dans leur infinie finesse, pouvaient néanmoins être envisagés comme limites d'objets effectifs. Ils n'appartenaient pas au réel, certes, mais faisaient tout de même partie de son « adhérence ». Ce lien est rompu : ces objets théoriques ne peuvent plus être désignés par des suites convergentes d'objets effectifs. Ils sont définitivement trop petits pour pouvoir être atteints d'une quelconque manière. Ils sont à jamais engloutis dans l'irréel. Cela pose problème car ils sont les objets logiques premiers de la physique : sans point ni instant local, on ne peut *rien* faire.

– On identifie l'espace, le temps ou l'espace-temps à des variétés affines ou différentielles. Mais les variétés sont séparables à l'infini tandis que les premiers ne le sont pas. Les variétés sont faites d'éléments sur lesquels on peut en théorie mettre le doigt, tandis que l'espace, le temps, l'espace-temps sont bordés du côté de l'infiniment petit par une région définitivement hors d'atteinte. L'espace, le temps, l'espace-temps effectifs ne peuvent donc pas coïncider avec les variétés affines ou différentielles auxquelles nous les identifions.

– On peut certes dire de ce défaut de coïncidence qu'il est tellement tenu qu'on peut presque toujours le négliger, et c'est certainement vrai dans bien des cas : 10^{-35} mètres ou 10^{-44} secondes, ce n'est vraiment pas grand-chose. Il est cependant tout aussi vrai, du point de vue de la comptabilité mathématique, que le négligé est infiniment plus vaste que le non-négligé : l'infinité des décimales au regard des 35 premières. Le paradoxe de Pascal perdure, à ceci près que ce n'est plus dans le réel qu'il loge l'infiniment grand présent dans l'infiniment petit, mais dans l'irréel qu'engendre l'emploi des nombres réels. L'ennuyeux avec cet irréel-là, c'est qu'il est impossible à évacuer en raison de l'incontournable nécessité mathématique d'utiliser des nombres réels.

3 – Espace, temps, espace-temps : réels ou irréels ?

La conclusion paraît inexorable : Ces entités, *définies comme ensembles d'éléments infiniment petits*, n'appartiennent donc pas au réel. Elles sont des constructions mathématiques, des grilles que nous plaquons sur le réel, mais qui n'en font pas partie.

Ce ne sont pas des *choses*.

Sont-elles alors des *représentations de choses* ? Existe-t-il des *choses*, encore appelées espace, temps ou espace-temps, impossibles, d'après ce que nous venons de voir, à mathématiser en toute perfection, mais qui, *en elles-mêmes*, existent ? Ou ces entités ne sont-elles rien d'autre que des grilles irréelles ?

Donnons un nom aux deux termes de cette alternative.

L'hypothèse de la grille dépourvue de réalité physique est l'hypothèse *relativiste*³, au sens premier du mot.

L'hypothèse qu'au contraire l'espace, le temps l'espace-temps ont une réalité physique est l'hypothèse *chosiste*.

³ Les mots « relativiste » et « relativité » recouvrent un panel hétéroclite de significations.

a) « Relativiste » au sens premier est le contraire de ce que nous qualifions de « chosiste ». Selon cette signification, les conceptions relativistes de l'espace et du temps considèrent ces entités comme n'ayant pas d'existence en elles-mêmes, mais étant seulement des constructions par lesquelles nous ordonnons le réel.

b) Obéissant au principe de relativité. Dans une physique relativiste selon cette acception, tous les espaces galiléens sont essentiellement identiques, aucun n'est privilégié, et lois de la physique sont les mêmes relativement à chacun d'entre eux. Une physique relativiste au sens a) ne l'est pas nécessairement au sens b) : tout en n'étant pas des choses, les différents espaces galiléens peuvent avoir des propriétés différentes selon leur situation relativement au Ciel lointain.

c) Conforme à la théorie de la relativité restreinte. Ainsi, le formulaire « relativiste » est le formulaire de la relativité restreinte. Le terme est doublement malencontreux :

– la relativité galiléenne, qui est relativiste aux sens a) et b), n'aboutit pas au même formulaire ;

– des théories non-relativistes (par exemple admettant un espace et un temps absolus identiques à ceux de Newton) peuvent avoir une cinématique lorentzienne et donc un formulaire largement (ou totalement) « relativiste ».

d) Se dit de phénomènes ou de vitesses obéissant au formulaire « relativiste » au sens c) et caractérisés par des valeurs significativement différentes de celles que donnerait le formulaire de la relativité galiléenne. Si nous considérons la relativité restreinte comme une théorie géométrique et non comme une théorie physique, cet emploi du mot n'a pas lieu d'être car les effets « relativistes » existent alors même aux toutes petites vitesses.

Le cadre d'étude

Nous étudions cette question dans le cadre « plat », le « désert intersidéral », qui joue un rôle central dans la construction des notions d'espace et de temps. En effet, le cadre non plat, où les forces de gravitation modifient l'espace et le temps dans l'hypothèse chosiste, ou, dans l'hypothèse relativiste, le comportement des instruments au travers desquels nous les construisons, est partout singulier, sous la dépendance de conditions locales à chaque fois différentes. Si nous ne voulons pas voir la théorie de l'espace et du temps – la *cinématique* – éclatée en une infinité de théories de portée locale sans lien les unes avec les autres, il nous faut un cadre universel relativement auquel toutes ces occurrences locales pourront se construire dans leur différence avec lui, et ce cadre ne peut-être que le seul universel dont nous disposons, celui du désert intersidéral, qui est aussi celui de la relativité restreinte.

Le cadre plat, préalable à tous les autres, est aussi à la fois cas limite et cas particulier d'une théorie plus générale, exactement comme la relativité restreinte l'est devant la relativité générale. Il est donc logiquement déductible de cette théorie générale, et se trouve ainsi en position de verrou logique relativement à elle : toute défaut de consistance d'une théorie du cadre plat serait un défaut de consistance de la théorie générale.

4 – Arguments immédiats en faveur de l'irréalité de l'espace, du temps ou de l'espace-temps

Le réel n'est pas facile à attraper, si tant est qu'on puisse jamais y arriver. Essayons quelques critères.

– **Est « réel » ce qui peut être atteint par l'expérience.** Avec cet avenant : l'expérience peut être directe ou indirecte, sans cela l'intérieur de la Terre pourrait ne pas être réel, et encore moins celui d'une étoile.

Alors qu'une expérience sur un morceau de fer est une expérience sur un morceau de fer, une expérience sur l'espace, le temps ou l'espace-temps n'est jamais rien d'autre qu'une expérience sur des événements, des objets, des instruments. Celui qui n'accepte pas la réalité des « édifices spatiotemporels » ne pourra y voir qu'une confirmation de son point de vue.

– **Est réel ce qui peut être considéré comme la cause d'un phénomène réel.** C'est ce principe que Newton applique quand il cherche une cause réelle au creusement réel en son centre de l'eau qui tourne dans le seau. Nous verrons plus loin que l'existence d'un degré zéro de rotation découle de l'hypothèse d'homogénéité statistique de l'univers. Les corps célestes lointains, considérés depuis un point de l'univers, sont mutuellement « solidaires » et engendrent une sphère des fixes concrète exactement en place pour assumer le rôle de cause de cet effet.

– **N'est pas réelle, en principe, la cause surabondante et inutile.** La sphère des fixes est exactement calée sur l'effet dont on cherche la cause, et on sait que corps célestes « agissent » à distance. C'est à eux que devrait être attribuée une action exactement calée sur eux, et non à un éventuel espace newtonien.

Semblablement, le point de vue chosiste ne dispense pas d'avoir des instruments de géométrie et des horloges. Son panel de choses « réelles » contient l'espace et le temps et/ou l'espace-temps, des « objets » et des événements, alors que pour une description aussi complète du réel le panel relativiste ne contient que les mêmes « objets » et événements. De ce point de vue, l'espace, le temps, l'espace-temps sont surabondants et inutiles et ne peuvent donc pas être réels.

Les sauts qualitatifs de la portée explicative témoignent d'une meilleure approche du réel. Newton, ramenant la chute des corps et le

mouvement des astres à la même loi de gravitation universelle, dévoile un réel pas forcément définitif, mais en tout cas « plus réel » que le paradigme aristotélécien auquel il se substitue. Si nous croyons que le réel peut être non pas compréhensible dans son entier, ce serait une ambition folle, mais traversé par un réseau de lignes de compréhension, alors nous devons croire qu'un progrès dans le domaine de l'explicatif témoigne d'un progrès dans l'approche du réel. S'agissant de la réalité ou de l'irréalité de l'espace, nous verrons la deuxième hypothèse apporter un gain explicatif sur plusieurs points.

Le critère des contradictions internes. Est suspect d'irréalité, au moins partielle, un point de vue ou une théorie affligé de contradictions internes. Ainsi la discordance entre l'infinie finesse des points et des instants théoriques et la réalité de ce qu'on peut en atteindre est propre à nous faire douter de la réalité des édifices spatio-temporels.

La genèse des notions peut éclairer le débat. L'espace est une notion tardive. Il a commencé à se mettre en place avec Descartes et ses coordonnées cartésiennes qui installaient une grille recouvrant le réel. Ce premier avatar de l'espace n'est qu'une commodité analytique, il ne revendique pas de faire « en lui-même » partie de l'étoffe du monde et entre sur la scène scientifique sur le mode relativiste.

Ce n'est que plus tard que Newton, analysant l'expérience de l'eau qui tourne dans un seau, conclura qu'elle prouve l'existence d'un mouvement absolu et donc d'un espace absolu.

Quoi qu'il en soit, il est évident que l'adage galiléen « le mouvement est comme rien » ne s'applique pas dans ce cas. Comment se fait-il, si les espaces sont tous relatifs, qu'ils possèdent tous un degré zéro de rotation absolu ? La question est incontournable et l'impossibilité d'y répondre compromettrait la possibilité d'une conception relativiste de l'espace.

5 – Le problème du degré zéro de rotation

Dans un univers relativiste, l'existence d'un degré zéro de rotation découle du principe cosmologique

Le **principe cosmologique** assure que l'univers, considéré à une échelle suffisamment grande, est en tout lieu à peu près le même – homogène –, et d'autant mieux que l'échelle est grande. Nous en avons fait un usage implicite en affirmant que le désert intersidéral est un universel.

Puisque un tel univers est relativiste, il n'existe pas d'« espace » global *a priori* « dans » lequel il serait contenu. Tout ce qui existe, ce sont des espaces particuliers que les différents corps engendrent par prolongement virtuel. Parce que ces espaces ne sont que des grilles vides projetées sur le cosmos, ils sont indéfiniment prolongeables. Leur géométrie est celle qui est pertinente dans le contexte du cadre plat, la géométrie euclidienne.

Parce que cet univers est dépourvu de degré zéro de rotation *a priori*, la notion d'espace galiléen n'y a pas cours. Mais depuis chaque corps céleste O on peut, à tout instant t mesuré par une horloge en ce corps, attribuer à chaque autre corps M une distance $OM(t)$ et donc, par dérivation, une vitesse algébrique d'éloignement.

a) Si l'univers est évolutif, s'il déroule une histoire, cette histoire, en vertu du principe cosmologique, est la même en tout lieu. La relation « être au même moment de l'histoire de l'univers » est une relation d'équivalence, elle définit une simultanéité universelle. On choisit d'employer pour chaque espace des horloges renvoyant la même durée entre deux instants simultanés, par exemple en dupliquant les durées délivrées par l'une d'entre elles. Dans cet univers agravitationnel, les corps n'agissent pas les uns sur les autres, si bien que les horloges sont stables, que l'égalité des durées entre deux couples d'instants simultanés deux à deux est une relation d'équivalence, et que si pour horloge maîtresse on fait le choix d'une autre allant ou n'allant pas à la vitesse de la première, cela ne change rien.

Comme l'univers est homogène, les longueurs des segments à un instant donné sont proportionnelles au nombre de corps célestes qu'ils rencontrent, et on peut décider de prendre pour tous les espaces le même coefficient de proportionnalité.

Ainsi, la simultanéité, les durées et les longueurs sont universelles. Cette cinématique à grande échelle n'est pas lorentzienne. Mais la cinématique est le fruit des instruments et des protocoles utilisés, et varie donc quand ces derniers

varient. En l'occurrence, ils ne sont pas les mêmes que lorsque à notre échelle nous utilisons la lumière et un observateur médian pour définir la simultanéité.

À partir du corps céleste O , considérons un alignement de corps célestes $OO_1O_2\dots O_n$ formant une graduation régulière de pas R . La vitesse algébrique d'éloignement du dernier d'entre eux est la composée de n vitesses algébriques d'éloignement obéissant toutes à la même loi statistique d'espérance $\overline{V}(t)$ et d'écart type $\sigma(t)$. Si R est suffisamment grand, dans cet univers postulé soumis aux plus simples lois du hasard, la corrélation entre ces vitesses doit pouvoir être considérée comme nulle. D'autre part, la loi de composition des vitesses algébriques d'éloignement est l'addition. La vitesse algébrique d'éloignement de O_n relativement à O est donc $n \overline{V}(t)$ avec un écart type négligeable devant n .

Autrement dit, si $\overline{V}(R, t)$ est la vitesse algébrique moyenne d'éloignement à l'horizon R , on a, lorsque R tend vers l'infini, $\overline{V}(R, t) = k(t) R + o_t(R)$. La variation en une unité de temps des longueurs des côtés d'un triangle devient proportionnelle à eux dès lors qu'ils sont suffisamment grands, ce qui montre que ses angles deviennent constants et donc qu'il se forme une sphère des fixes.

b) Cas d'un univers invariant

Étant donné un corps en O , nous pouvons le remplacer par un autre au même lieu, qui tournerait sur lui-même relativement au premier, cela ne changerait rien aux distances mutuelles des corps ni à leurs mouvements relativement à l'ensemble des autres. Nous pouvons ainsi « lisser » notre univers en remplaçant chaque corps par un corps tel que la moyenne des vitesses (arithmétiques) des autres relativement à son espace soit la plus basse possible dans la sphère de grand rayon R ; ou bien faire une opération analogue avec une méthode des moindres carrés ; éventuellement faire en outre tendre R vers l'infini. Par ces méthodes qui doivent aboutir à des résultats extrêmement proches, nous pouvons, dans le cadre relativiste au sens premier du mot où nous sommes, nous placer dans un contexte tel que si A et B sont deux corps quelconques, il est légitime de considérer que le premier est au deuxième exactement ce que le deuxième est au premier, autrement dit que leur situation mutuelle obéit au principe de relativité. Comme il n'existe que deux cinématiques plates possibles obéissant au principe de relativité, la galiléenne et la lorentzienne, les vitesses algébriques d'éloignement répondent soit au formulaire galiléen, soit au formulaire lorentzien. Le premier des deux cas se raccroche à celui traité ci-dessus, reste le deuxième.

Si la moyenne des vitesses algébriques d'éloignement était non nulle à l'horizon R , elle le serait également, en vertu de la loi de composition des vitesses algébriques d'éloignement, à une infinité d'autres horizons. Par continuité, elle le

serait encore à tous les horizons, et l'univers ne serait pas invariant. Les vitesses algébriques d'éloignement sont donc en moyenne nulle à tous les horizons.

Enfin, puisque les vitesses sont majorées dans la cinématique lorentzienne, on a, lorsque R tend vers l'infini, $\bar{V}(R) = o(R)$, formule qui est un cas particulier de celle obtenue pour un univers évolutif. La variation relative en une unité de temps de la distance entre deux corps, évaluée dans l'espace engendré par l'un des deux, tend vers zéro quand cette distance tend vers l'infini. Par addition et soustraction des longueurs, ce résultat s'étend aux espaces engendrés par tout corps aligné avec eux. Si la cinématique de cet univers n'est pas trop bizarre – ce que nous postulons – il sera également valide quel que soit le corps engendrant l'espace depuis lequel on évalue cette distance.

Sphère des fixes « synchrone » et sphère des fixes « observée »

Nous ne sommes cependant pas tout à fait au bout de nos peines, car la sphère des fixes découlant du principe cosmologique, la sphère des fixes « synchrone », existe *aujourd'hui*, à l'instant où nous sommes, et il faudrait que nous soyons assis dans le « fauteuil de Dieu » pour pouvoir l'embrasser du regard. Tandis que celle que nous voyons est faite d'images « fossiles » extraites des sphères des fixes du passé dont la lumière nous parvient avec un retard d'autant plus grand qu'étaient loin de nous les corps qui l'ont émise.

Installons depuis un corps O un espace dans lequel la sphère des fixes synchrones est constamment immobile. Nous ne pouvons comprendre comment se constitue la sphère des fixes observée qu'en postulant certaines propriétés de cet espace et de la propagation de la lumière. En l'occurrence, que cet espace est isotrope, le même dans toutes les directions. Et que la lumière respecte cette isotropie ; donc se propage du ciel lointain vers nous en ligne droite et à la même vitesse dans toutes les directions. Moyennant ces deux postulats, les images qui nous parviennent du passé suffisamment ancien de l'univers sont faites de corps qui paraissent immobiles relativement à cet espace et forment en conséquence la sphère des fixes observée.

L'existence d'un degré zéro de rotation est donc un corollaire du principe cosmologique. Elle ne contredit pas l'hypothèse relativiste selon laquelle espace, temps, espace-temps ne sont pas réels, mais ne sont que des grilles que nous projetons sur le réel.

6 – Illusion d'expansion dans un univers relativiste stable

Dans un univers invariable obéissant au principe cosmologique et doté d'un espace absolu, les vitesses des corps sont en moyenne partout les mêmes *relativement à cet espace absolu*. Tandis que dans un univers relativiste invariable obéissant au même principe, où il n'y donc pas d'espace absolu, elles sont en moyenne partout les mêmes *relativement à leur voisinage*.

Dans le premier cas, les vitesses des corps lointains relativement à un espace galiléen donné sont majorées.

Dans le deuxième cas, semblablement à ce qui se produit lorsqu'on joue indéfiniment à pile ou face, les vitesses résultent d'un cumul où elles ne se compensent qu'imparfaitement. Le défaut de compensation est la vitesse de ces corps relativement à nous. Lorsque leur distance tend vers l'infini, ces vitesses, qu'elles soient celles de corps s'éloignant ou se rapprochant, tendent vers l'infini si la cinématique est galiléenne, vers C si elle est lorentzienne.

Cette différence a des effets suffisamment importants pour que nous donnions un nom au modèle d'univers concerné. En hommage à celui qui jusqu'au bûcher, persista dans l'affirmation de ce qu'il croyait vrai, nous appellerons **univers de Bruno** un univers plat, relativiste, obéissant au principe cosmologique, invariable et isotrope.

« **Isotrope** » signifie que parmi tous les points historicisés galiléens se croisant en un quelconque instant local il en existe un (et un seul) relativement auquel l'univers est le même dans toutes les directions.

Considérons, dans un univers de Bruno, un lieu O marqué par un corps au repos galiléen, tel que l'espace galiléen (E) qu'il engendre soit isotrope en O .

À l'instant $t = 0$ de la chronologie de cet espace, un corps céleste générique K se trouve en un point M à la distance D de O . Ce qu'un observateur en O voit à cet instant de lui n'est pas ce qu'il est à cet instant, puisque la lumière ne se propage pas à vitesse infinie.

L'univers de Bruno étant stable, la vitesse algébrique d'éloignement de K relativement à O a une espérance mathématique nulle. Comme le nombre de corps célestes dans la boule de centre O et de rayon D est constant, K , en cet instant 0 , a la même probabilité de s'éloigner de O que de s'en rapprocher.

Supposons qu'il s'en rapproche. Alors, quand il a émis la lumière que l'observateur reçoit de lui à l'instant 0 , il était en un point P de (E) probablement plus éloigné de O que M . Inversement, si K , à l'instant 0 , s'éloigne de O , l'image

qu'en a l'observateur à cet instant provient d'un point P de (E) probablement plus proche de O que M.

Plus précisément : en prenant pour espace galiléen de référence celui tangent au mouvement de K à l'instant $t = 0$ et en faisant aller le temps à rebours, les circonstances particulières du trajet de K modifient sa vitesse, nulle à l'instant $t = 0$, selon une loi de probabilité dont il est raisonnable de penser qu'elle a une symétrie sphérique, et dont l'espérance devrait par conséquent être nulle. La position moyenne de K à l'instant où on le voit devrait donc être celle qu'il aurait si son trajet était uniforme. Appelons-la encore P.

Dans l'hypothèse chosiste d'un espace absolu en arrière-plan du monde, en vertu du principe cosmologique, le cosmos serait partout statistiquement le même relativement à lui. Cet espace absolu ne serait pas fortuit relativement au cosmos, qui serait « construit » sur lui. Il serait donc isotrope ou quasi isotrope en chacun de ses lieux. Comme notre espace galiléen de référence (E) est isotrope, sa vitesse serait petite relativement à l'espace absolu.

Partout dans l'univers, les vitesses des corps relativement à l'espace isotrope local sont censées être plus ou moins ce qu'elles sont « chez nous », donc petites. Les corps lointains vont de même à petite vitesse relativement à leur espace isotrope local, qui irait à petite vitesse relativement à l'espace absolu, relativement auquel notre espace isotrope de référence (E) irait à petite vitesse. Les corps lointains iraient donc à petite vitesse relativement à (E). PM serait petit devant D , et le biais d'observation qui favorise les corps s'éloignant serait en conséquence petit. On verrait donc à toute distance D , dans cette hypothèse chosiste, sensiblement autant de corps s'éloignant que de corps se rapprochant.

Mais dans l'hypothèse relativiste où nous sommes, lorsque D tend vers l'infini, les vitesses des corps à cet horizon, quelle que soit leur direction, tendent à devenir presque partout infiniment grandes si la cinématique est galiléenne, infiniment proches de C si elle est lorentzienne. La distance MP est alors du même ordre de grandeur que la distance OM. Les corps s'approchant aujourd'hui de nous sont vus considérablement plus loin que là où ils sont aujourd'hui, les corps s'éloignant considérablement plus près.

– Ce phénomène augmente la densité apparente des premiers et diminue celle des seconds, il fait donc voir dans le Ciel plus de corps s'éloignant que de corps se rapprochant.

– Corollairement, il augmente la taille apparente des corps qui s'éloignent et diminue celle de ceux qui se rapprochent. Il rend les premiers plus brillants, et donc plus visibles que les deuxièmes.

– Comme les corps s'éloignant sont vus plus près que ceux se rapprochant, ils ont plus de chances de les occulter que d'être occultés par eux.

– Les corps s'éloignant sont vus au travers d'une plus petite épaisseur de milieu interstellaire, qui ne peut pas être absolument transparent. Leur éclat en est moins affaibli que celui des corps qui se rapprochent.

– Ce phénomène est d'autant plus intense qu'on regarde loin. À la limite, on ne voit plus que des corps s'éloignant. L'univers semble en expansion, alors qu'il ne l'est pas.

– L'intensification du phénomène serait linéaire si les vitesses des corps lointains augmentaient proportionnellement à la distance D . Mais ce n'est pas le cas, puisque ces vitesses sont la part non compensée du cumul d'un grand nombre n de vitesses qui se compensent globalement. La corrélation entre elles ne peut être tenue pour parfaitement nulle, aussi il n'est pas certain que cette part non compensée ait une évolution en $O(\sqrt{n})$, autrement dit en $O(\sqrt{D})$. Cependant, comme il y a globalement compensation, la part non compensée est un $o(D)$: le phénomène s'intensifie lorsque D croît, mais d'une façon plus lente que la proportionnalité, qui donnerait l'illusion d'une expansion uniforme.

L'illusion d'expansion ralentit avec la distance, et comme le plus éloigné est le plus ancien, elle est accompagnée d'une deuxième illusion, celle que l'expansion de l'univers s'accélère.

7 – Fuite des corps lointains : le raisonnement traditionnel, en apparence limpide, est erroné

Le raisonnement par lequel on infère de la fuite observée des corps célestes lointains l'expansion de l'univers est le suivant :

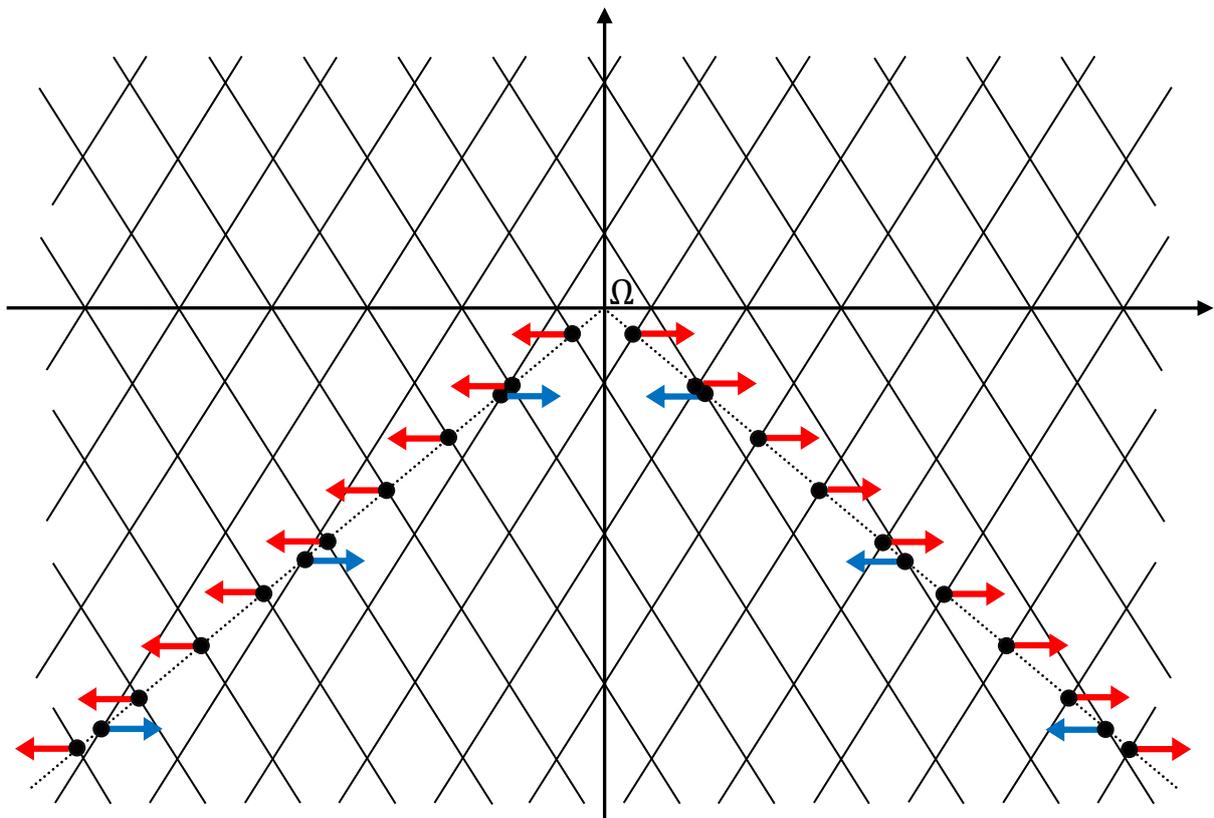
Supposons que l'univers soit stable dans le temps, et donc sans expansion ni contraction. Ce que nous voyons à la distance D de nous est l'image d'un passé qui s'est déroulé à l'instant $-D/c$. À cet instant, comme l'univers est stable, il y avait, à cette distance D , autant de corps s'éloignant de nous que de corps s'en rapprochant. Donc ce que nous voyons, quand nous regardons à la distance D , est composé pour moitié de corps qui s'éloignent, pour moitié de corps qui se rapprochent. Comme c'est vrai quelle que soit D , nous devons

voir dans le Ciel autant de corps s'éloignant que de corps se rapprochant. Or tel n'est pas le cas, puisque nous voyons au contraire à tout horizon D suffisamment grand plus de corps s'éloignant que de corps se rapprochant. C'est donc que notre univers n'est pas stable, mais en expansion.

Pour éprouver ce raisonnement, considérons un modèle très simple d'univers, réduit à une droite sur laquelle les corps vont tous à la même vitesse v , dans un sens ou dans un autre. Ces deux familles sont faites de corps régulièrement espacés. (Que cet univers soit de dimension un n'interdit pas aux corps de se croiser, ni n'empêche de voir à travers eux.)

Dans un plan rapporté au repère (Ω, x, t) , où x est la variable d'espace et t celle de temps, traçons les courbes représentant les mouvements des corps relativement à un lieu O de cet univers. Ce sont deux familles de droites parallèles et régulièrement espacées, de pentes $1/v$ et $-1/v$.

Traçons aussi, en pointillés, le cône de lumière arrivant en O à l'instant 0 . Il est formé de deux demi-droites issues de Ω , de pentes $1/C$ et $-1/C$. Ses intersections avec les courbes précédentes montrent comment sont vus les corps célestes depuis O , à l'instant 0 : en rouge ceux qu'on voit s'éloignant, en bleu ceux qu'on voit se rapprochant.



On voit plus de corps s'éloigner que se rapprocher, alors même qu'ils sont exactement aussi nombreux à faire l'un que l'autre. Le raisonnement rapporté plus haut est donc incorrect.

Il renferme en fait un biais. Lorsque nous nous donnons une distance D , la probabilité pour qu'il existe un corps céleste à la distance D de O est nulle. Ce qui doit être considéré, à un instant donné, ce ne sont pas les corps à la distance D de O , mais ceux dont la distance à O est comprise entre D et $D + dD$. Cet ensemble est bien formé d'autant de corps s'approchant que de corps s'éloignant. Cependant, quand on observe depuis O les corps compris entre ces deux distances, ce n'est pas à un ensemble de ce type qu'on a affaire, puisque ce qu'on voit à l'horizon $D + dD$ est plus ancien que ce qu'on voit à l'horizon D .

Un essai de raisonnement quantitatif

Nous nous plaçons donc dans un univers de Bruno, par définition stable.

Si un corps K , actuellement en M , s'éloigne de O , alors nous postulons que l'image qu'en a actuellement l'observateur en O est issue d'un point dont la distance à O est inférieure à OM , ou en tout cas plus probablement inférieure que supérieure à OM .

Cette prémisse se ramène à son tour à celle-ci : dans un univers de Bruno, les variations de vitesse des corps célestes sont suffisamment peu importantes et se compensent en moyenne suffisamment bien pour que l'analyse faite en supposant uniformes leurs mouvements ait de la pertinence.

Une autre prémisse est que la vitesse de la lumière vaut partout C relativement à (E) , que ce soit dans les régions proches de O ou dans les régions lointaines. Ce n'est pas une évidence, et cette prémisse doit être comprise comme la précédente : elle doit être suffisamment vraie pour que l'analyse faite en la supposant parfaitement vraie soit pertinente.

Une troisième prémisse est que la lumière qui nous vient d'un corps lointain témoigne, par sa couleur, de la vitesse avec laquelle il s'éloigne ou se rapproche de nous.

Une quatrième est que l'univers n'est pas parfaitement transparent. S'il l'était, dans le cadre euclidien où nous nous plaçons, l'éclat d'un corps céleste en fonction de sa distance D suivrait une loi en $\frac{1}{D^2}$. Le défaut de transparence est supposé être en tout lieu le même, et donc la loi donnant l'éclat être en $\frac{1}{D^2} \exp \frac{-D}{L}$, où L est une constante homogène à une longueur.

Nous supposerons aussi que les corps célestes que nous considérons (des galaxies ou des amas de galaxies, pour fixer les idées) ont une durée de vie

illimitée qui permet d'éliminer le cas où ils pourraient naître ou disparaître en cours d'expérience.

Le raisonnement sera conduit sans faire appel à des changements de référentiel. Il est donc valide dans le cadre d'une cinématique lorentzienne comme dans celui d'une cinématique galiléenne. Dans ce dernier cas, nous « oublions » les éventuels corps lointains dont la vitesse relative à l'espace de référence où nous sommes immobiles est supérieure à celle de la lumière.

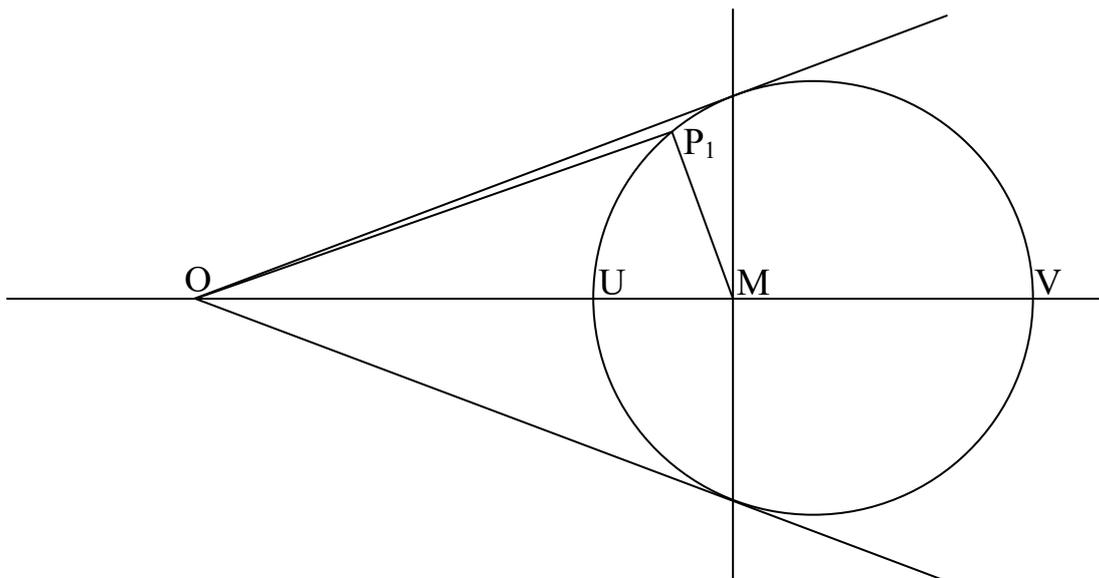
Plaçons-nous donc en un lieu O d'un espace galiléen (E), et considérons, à l'instant actuel, un corps céleste K en lieu M tel que $OM = D$. Appelons v sa vitesse.

K a autant de chances de s'éloigner de O que de s'en rapprocher, propriété qui reste vraie si on remplace O par un autre lieu O'. Nous supposons donc que les directions de déplacement de K dans (E) sont équiprobables.

Appelons P le point de (E) en lequel l'observateur en O voit K. Les points P, O et M sont tels que $PM/PO = v/C$. En vertu d'un théorème classique, l'ensemble des points P est une sphère (S) centrée sur la droite OM, et coupant cette droite en deux points U et V qui divisent MO dans le rapport $k = v/C$.

Repérons, dans (E), P à l'aide de coordonnées « pseudo-sphériques » de centre M et d'axe MO : α est l'angle \widehat{OMP} , β l'angle que fait le plan (OMP) avec un plan (OMP) particulier. La probabilité que K se trouve dans l'angle solide d'axe (MP) et de largeurs $d\alpha$ et $d\beta$ est $\frac{1}{4\pi} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$.

Soit P_1 un point sur la frontière entre la partie (S_e) de (S) sur laquelle K est vu s'éloignant et celle (S_r) sur laquelle il est vu se rapprochant. OP_1 est donc perpendiculaire à P_1M .



Soit α_1 l'angle $\widehat{OMP_1}$. Comme $P_1M/P_1O = UM/UO$, U est le pied de la bissectrice issue de P_1 dans le triangle OP_1M . Puisque $k < 1$, U est plus proche de M que de O. On a donc $\widehat{OMP_1} > \widehat{MOP_1}$. Comme le triangle OP_1M est rectangle en P_1 , $\alpha_1 > \pi/4$.

Les éclats lumineux de K quand il est vu se rapprochant et quand il est vu s'éloignant sont respectivement proportionnels aux nombres

$$E_r = \iint_{(S_r)} \frac{\exp\left(-\frac{OP}{L}\right)}{OP^2} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$$

et

$$E_e = \iint_{(S_e)} \frac{\exp\left(-\frac{OP}{L}\right)}{OP^2} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$$

La symétrie de révolution de la figure et le théorème de Fubini nous permettent de nous débarrasser de la variable β , et E_r et E_e sont proportionnels aux nombres

$$I_r = \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{\exp\left(-\frac{OP}{L}\right)}{OP^2} \sin \alpha \, d\alpha$$

et

$$I_e = \int_0^{\alpha_1} \frac{\exp\left(-\frac{OP}{L}\right)}{OP^2} \sin \alpha \, d\alpha$$

Le théorème de la moyenne nous assure de l'existence d'une longueur X comprise entre OP_1 et OV, telle que

$$I_r = \frac{\exp\left(-\frac{X}{L}\right)}{X^2} \int_{\alpha_1}^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha$$

Soit P_2 un point de (S), tel que son angle α vaille $\pi/6$. Comme

$$I_e > \int_0^{\pi/6} \frac{\exp\left(-\frac{OP}{L}\right)}{OP^2} \sin \alpha \, d\alpha$$

on a par le théorème de la moyenne qu'il existe une longueur Y comprise entre OU et OP_2 telle que

$$I_e > \frac{\exp\left(-\frac{Y}{L}\right)}{Y^2} \int_0^{\pi/6} \sin \alpha \, d\alpha$$

D'où, finalement,

$$\frac{E_e}{E_r} > \frac{X^2}{Y^2} \exp\left(\frac{X-Y}{L}\right) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \alpha \, d\alpha}{\int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha} > \exp\left(\frac{X-Y}{L}\right) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \alpha \, d\alpha}{\int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha}$$

Lorsque D tend vers l'infini, k tend vers 1 et (S) tend vers le plan médiateur de OM. On en déduit que $OP_1 \sim \frac{D/2}{\cos \frac{\pi}{4}}$ et $OP_2 \sim \frac{D/2}{\cos \frac{\pi}{6}}$, puis que $OP_1 - OP_2$ tend vers l'infini.

Comme $X - Y > OP_1 - OP_2$, $\frac{E_e}{E_r}$ tend vers l'infini.

Conclusion

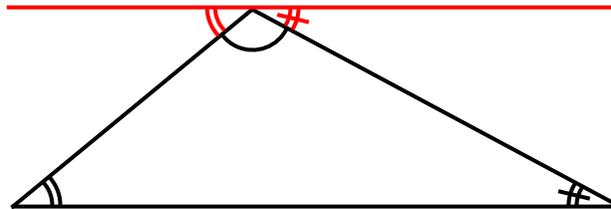
Si l'univers où nous sommes ressemble suffisamment à un univers de Bruno, et si les prémisses simples sur lesquelles nous avons construit notre raisonnement sont suffisamment vraies, alors, lorsqu'on regarde de plus en plus loin dans le Ciel, on finit par ne plus voir que des corps s'éloignant à des vitesses qui grandissent avec la distance. L'univers, alors même qu'il n'est nullement en expansion, donne l'illusion de l'être. L'expansion apparente ne prouve donc pas l'expansion réelle.

On peut bien entendu discuter de la validité des prémisses, et notamment de celle par laquelle on reconstruit à rebours la trajectoire la plus probable d'un corps céleste en lui attribuant une vitesse uniforme. Elle est forcément trop simple pour être parfaitement adéquate à la réalité. Il faudrait remplacer ce mouvement uniforme par une distribution probabiliste que nous ne connaissons pas et qui engendrerait des calculs sans doute très compliqués.

Notons cependant que cette prémisses du mouvement uniforme est exactement celle qui est utilisée dans le raisonnement classique « montrant » l'expansion de l'univers à partir de l'observation de l'éloignement des corps lointains. Cela prouve d'une autre façon que ce raisonnement est erroné.

8 – La propriété d’Euclide

Prenons notre costume d’ermite du cosmos et partons installer notre laboratoire dans un désert galiléen, là où nous postulons que la géométrie est universelle. Faisons alors une petite expérience : traçons un triangle, reportons ses angles sur un des sommets et évaluons l’angle ainsi obtenu.



Nous savons depuis Beltrami et Poincaré qu’il peut sans contradiction logique prendre une infinité de valeurs. L’une d’elles, toutefois, engendre une géométrie particulière, plus simple que les autres et indépendante de l’échelle à laquelle on considère le monde. Cette valeur, singulière pour cela, l’est également parce qu’elle « tombe juste » : c’est l’angle plat. Si elle est atteinte, la géométrie est euclidienne. Sinon, elle ne l’est pas.

Cette valeur n’est qu’un point isolé parmi l’infinité des possibles. Si on la tirait à la loterie, sa probabilité de sortir serait nulle. Et pourtant c’est elle qui a cours.

(Nous n’avons bien sûr pas les moyens d’aller faire concrètement nos expériences dans les déserts intersidéraux, mais nous avons les plus solides raisons de penser que la géométrie du cadre plat qui y règne est remarquablement euclidienne. La preuve en est que sur notre Terre, certes massive, mais pas au point de tordre significativement le cadre plat, on n’en utilise concrètement pas d’autre – même pour construire par exemple cet objet de très grande précision qu’est un télescope moderne.)

Les hasards trop miraculeux sont trop beaux pour être honnêtes. La propriété d’Euclide, vraie alors même qu’elle peut paraître infiniment improbable, n’est certainement pas accidentelle. Elle devrait donc pouvoir être expliquée.

Mais l’explication ne peut pas être là où elle ne peut se trouver. L’affirmation que l’espace n’a pas d’existence « en lui-même », n’est rien d’autre qu’une grille vide posée sur le réel, fait que lui attribuer quelque qualité intrinsèque que ce soit est un non-sens. Les « propriétés de l’espace » ne peuvent rien être d’autre que celle de la grille vide.

Cette grille est l'extension virtuelle illimitée d'un corps mémoforme au repos galiléen – c'est-à-dire un corps élastique dans un usage restreint, redevenant par hypothèse identique à lui-même d'une position de repos galiléen à une autre, cette identité étant celle définie par l'expérience de superposition durable. Si l'espace, donc, est euclidien, c'est parce que la matière mémoforme au repos galiléen l'est. La question est de comprendre pourquoi.

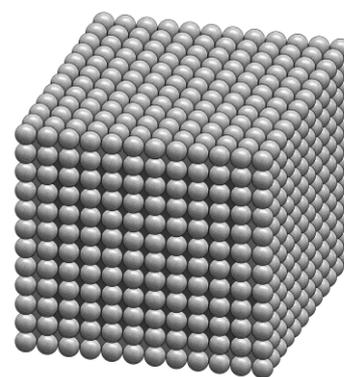
Le cristal peut nous mettre sur la voie. Les atomes s'y assemblent d'une telle façon qu'ils construisent des pavages réguliers ou semi-réguliers, caractérisés les uns comme les autres par la répétition « perpétuelle » du même motif. Si de tels objets se construisent, c'est en vertu du même principe que celui qui fait que la surface d'une eau immobile est parfaitement horizontale : l'installation du système dans un état de plus basse énergie possible.

De ce point de vue, les atomes devraient pouvoir s'assembler selon des pavages réguliers ou semi-réguliers non-euclidiens, car aucun espace n'est là pour imposer son moule. On peut même penser qu'il se constitue parfois des germes de telles structures. Mais ils ne peuvent être que fugitifs, car ils ne sont pas viables.

Les tailles des atomes correspondent en effet à une réalité physique. Si on comprime la matière, elles diminuent ; si on l'étire, elles augmentent. Leurs variations sont conséquences et causes d'actions physiques. L'état de plus basse énergie possible qu'un pavage permet de réaliser a donc des mailles de taille déterminée par le type d'atomes qui les constituent et l'état physique dans lequel ils sont.

La matière au repos n'est pas quelque chose de figé dans une immobilité absolue. Elle est sans cesse traversée de variations locales d'énergie, qui entraînent des variations de taille des atomes et donc des déformations des mailles qu'ils forment.

Or, si les pavages euclidiens peuvent être dilatés ou contractés en conservant leur architecture, puisque leurs angles restent inchangés, c'est chose impossible avec les pavages non-euclidiens, dont les angles sont modifiés par cette opération, d'une façon qui se cumule de maille en maille et engendre des déstructurations catastrophiques. Les pavages non-euclidiens sont des objets que leur architecture rend infiniment rigides pour ce qui est de la possibilité de se contracter ou de se dilater ; mais ce sont aussi des objets formés d'une matière élastique qui ne peut pas, à ce titre, produire des structures « infiniment » rigides. Leur existence, soumise à deux exigences contradictoires, n'est pas viable. Elle ne peut



être que fugitive. Les seules structures cristallines pérennes sont par conséquent euclidiennes.

La matière mémoforme n'existe pas seulement sous la forme de cristaux au repos galiléen, elle peut être aussi formée d'assemblages « amorphes ». Et, qu'elle soit cristalline ou amorphe, elle peut être soumise ou non à des contraintes mécaniques – qui la font sortir des conditions légitimes d'utilisation du corps mémoforme en tant qu'instrument de géométrie. Dans ces cas aussi, elle forme des réseaux, en l'occurrence non-réguliers, qui s'ils n'étaient pas euclidiens, seraient eux aussi « infiniment » rigides quant à la contraction et la dilatation, et seraient donc eux aussi soumis aux deux mêmes exigences contradictoires d'élasticité et de rigidité « infinie », qui ne laissent place qu'à une architecture euclidienne.

En conclusion, la matière, géométrisée dans le cadre plat à l'aune de la matière au repos galiléen, est euclidienne. En particulier, la matière au repos galiléen, ainsi géométrisée, est euclidienne. Et son prolongement illimité, ou plutôt indéfini, par de la matière virtuelle au repos galiléen, que nous appelons « espace galiléen », est donc euclidien.

L'espace à grande échelle reste-t-il euclidien ?

Certes, objectera-t-on aux raisonnements précédents, la matière au repos galiléen est euclidienne, mais cela ne prouve pas que l'espace le soit. Car les géométries non-euclidiennes, lorsqu'on les regarde localement, sont « tangentes » à la géométrie euclidienne : pour peu qu'on se restreigne à un domaine suffisamment petit, elles en sont indiscernables. Il se pourrait donc que l'espace « plat », tout en étant euclidien à notre échelle – et même remarquablement euclidien – cesse de l'être à l'échelle des galaxies, tant la différence est grande.

Mais cet argument ne tient guère. Mathématiquement parlant, il est incorrect. Certes, il est exact qu'une géométrie non-euclidienne tend à être euclidienne quand on fait tendre vers zéro la taille du domaine sur lequel on la considère. En ce sens que, par exemple, la somme des angles d'un triangle dont les trois sommets sont dans le domaine peut être rendue arbitrairement proche de l'angle plat dès lors que le diamètre du domaine est suffisamment petit. Néanmoins, cette convergence ne concerne pas cette caractéristique cruciale qu'est la courbure. Découpez une sphère en une myriade de polygones infinitésimaux, ils seront individuellement « indiscernables » de ceux qu'on aurait taillés dans un plan ; réassemblez-les exactement bord à bord, vous reconstruirez exactement la même sphère. La courbure ne tend pas vers zéro quand la taille des morceaux tend vers zéro.

L'argument est incorrect, mais n'est pas sans valeur sur le fond, tant la différence d'échelle est importante.

Or à grande échelle il existe une explication, qui est la même que celle donnée à petite échelle pour la matière étendue. L'univers est partout sensiblement le même, il est assimilable à une cristallisation amorphe, cristallisation ayant de la souplesse, et donc ne pouvant être qu'eulidienne.

Ces explications ne se contredisent pas, elles se rejoignent et se compètent. Et rejoignent le constat expérimental d'un espace plat eulidien à grande échelle.

- 1) La matière est eulidienne ;
- 2) nous arpentons donc le cosmos avec des instruments eulidiens qui projettent sur lui leur trame ;
- 3) En outre, sa texture est assimilable à une cristallisation homogène, amorphe et souple qui ne peut qu'être eulidienne.

On explique aujourd'hui le caractère eulidien du cadre plat par l'expansion de l'univers. Mais celle-ci, outre qu'elle repose sur un argumentaire erroné, n'est qu'un des modes particuliers de la cristallisation souple, qui a le même pouvoir explicatif, et qui ne requiert pas l'expansion de l'univers. Nul besoin, donc, d'invoquer l'expansion pour expliquer le caractère eulidien du cadre plat.

9 – La question de la tridimensionnalité : un rapide survol de l'existant

De nombreux auteurs ont répondu – ou tenté de répondre – à ce problème. Graig Callender dans son article *An Answer in Search of a Question: 'Proofs' of the Tri-Dimensionality of Space* fait un intéressant survol critique de ces productions⁴. Je m'appuie sur son travail.

La première, semble-t-il, est donnée par Kant, qui observe dans son livre *Pensées sur la véritable estimation des forces vives...*, en 1746, que la tridimensionnalité de l'espace paraît dériver de la loi de la gravitation universelle inversement proportionnelle au carré de la distance.

Ehrenfest, en 1918, montre que les orbites planétaires ne peuvent être stables qu'en dimension trois⁵. Toute démonstration s'appuie sur des hypothèses

⁴ Studies in History & Philosophy of Modern Physics, 36, 1, March 2005, pp. 113-136.

⁵ P. Ehrenfest, *In that way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?* KNAW, Proceedings, 20 I, 1918, Amsterdam, 1918, pp. 200-209.

et Ehrenfest fait celle que dans un espace de dimension n la loi d'attraction universelle est en $1/r^{n-1}$, propriété dérivée de la loi de Gauss. Quelque naturelle que cette loi puisse paraître – elle correspond à une influence gravitationnelle totale à la distance r indépendante de r et donc inversement proportionnelle à la « surface » d'une hypersphère ayant ce rayon – elle n'en a pas moins ses points de fragilité.

Elle légifère en effet la gravitation dans un univers où le nombre des dimensions géométriques est postulé différent de trois, c'est-à-dire un univers dans lequel nous n'avons non seulement jamais fait la moindre expérience, mais encore qui n'existe pas. Aussi, que savons-nous des lois de la physique qui y règneraient ? On répondra à cette objection qu'on prolonge à cet univers les lois qui règnent dans le nôtre, tridimensionnel, pour montrer qu'elles n'y sont pas viables, mais en l'occurrence le prolongement n'est pas univoque. En effet (c'est ce que montrent Burgbacher et al. à propos de l'atome d'hydrogène, mais leur raisonnement s'étend aux orbites planétaires⁶), si l'on fait dériver la force d'attraction d'une énergie potentielle en $-1/r$, que n soit ou non égal à trois, les orbites sont stables. En dimension trois, les deux constructions reviennent au même, aussi pourquoi préférer l'une à l'autre ?

On peut s'interroger aussi sur la loi choisie : la force d'attraction universelle. Pourquoi elle ? Tient-elle – en dehors de l'aspect historique – le rôle central en physique qui devrait être celui d'une loi capable de déterminer la dimension de l'espace ? Le raisonnement fonctionne certes aussi avec l'atome d'hydrogène et l'interaction électromagnétique, mais pourquoi pas l'interaction forte ?

Le n apparaissant dans le raisonnement pose aussi problème : d'un côté c'est un nombre réel, et il peut varier d'une quantité ε suffisamment petite – par exemple 10^{-1000} – sans que cela corresponde à quoi que ce soit d'observable ; mais d'un autre côté, en lieu donné, le nombre n des droites perpendiculaires deux à deux ne peut être qu'un entier exact.

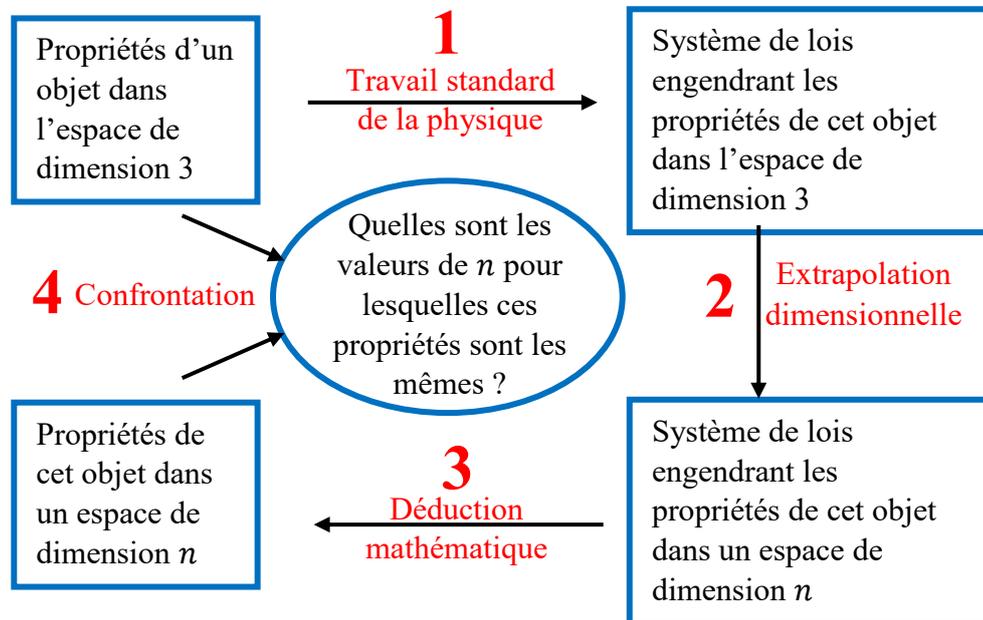
L'argument de la stabilité des orbites planétaires ou de l'atome d'hydrogène n'est pas le seul à être employé. On trouve ainsi divers phénomènes dont les lois posent des contraintes sur le nombre de dimensions de l'espace : par exemple la diffraction des neutrons dans un cristal⁷, la bonne propagation des ondes

⁶ F. Burgbacher and C. Lammerzähl and A. Macias, *Is there a stable hydrogen atom in higher dimensions?* Journal of mathematical physics, vol.40, num. 2, pp. 625-634, feb. 1999.

⁷ Caruso, F. and Xavier, R.M., *On the Physical Problem of Spatial Dimensions: An Alternative Procedure to Stability Arguments*, Fundamenta Scientiae 8, 1987, pp. 73-91.

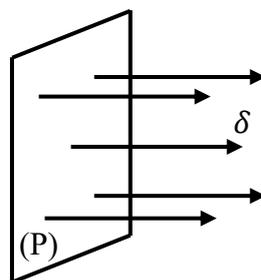
électromagnétiques, le spectre de l'atome, la possibilité pour deux atomes ou molécules d'avoir une probabilité non nulle de se rencontrer quand chacun suit une trajectoire brownienne, et ainsi de constituer des polymères⁸.

Tous ces arguments ont une structure commune :



Le point fragile est évidemment le 2, celui de l'« extrapolation dimensionnelle ». Nous avons vu qu'elle n'est pas univoque lorsque l'objet est la matière considérée sous l'angle de la gravitation universelle. On peut craindre que ce ne soit pas un cas singulier, et que l'extrapolation dimensionnelle d'une loi soit souvent non-univoque.

Imaginons par exemple la propagation d'une onde plane. Le front de l'onde est un plan (P) auquel la direction δ de propagation est perpendiculaire.



Comment extrapoler cette situation à un espace de dimension par exemple quatre ? Est-ce la dimension de δ qui devient 2 ou celle de (P) qui devient 3 ? Les

⁸ Dayantis, J., *Pourquoi l'espace dans lequel nous vivons a trois dimensions et ne peut en avoir davantage ?* Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 32, n° 4, 2007, pp. 513-517.

deux solutions sont *a priori* recevables, et dans un cas comme dans l'autre, nous n'aurons pas de difficulté à les mathématiser. Comment savoir quelle est la bonne ? Et n'est-on pas alors en train de s'interroger sur le sexe des anges, puisque de toute façon l'espace effectif n'est pas de dimension quatre et que donc la réponse est impossible à donner ?

L'argument des trajectoires browniennes donné par Dayantis me semble échapper quelque peu à cette objection. Il y a certes extrapolation, et toute extrapolation peut être équivoque, mais en l'occurrence il faudrait y mettre plus de mauvaise foi qu'il n'est raisonnable : la loi considérée est celle d'un objet ponctuel suivant une trajectoire erratique dont les pas ont tous la même longueur, avec des directions successives tirées au hasard indépendamment des précédentes et uniformément dans l'ensemble (compact) des directions possibles. Si la dimension de l'espace est supérieure à trois, les dimensions (fractales) des trajectoires sont trop petites pour que deux objets aient une probabilité non nulle de se rencontrer, donc de se s'agréger pour former des polymères – et par conséquent d'engendrer la vie. La conclusion est donnée par l'argument anthropique : comme nous existons et que nous sommes vivants, c'est donc que la dimension de l'espace est trois.

La démonstration est ingénieuse et instructive, mais elle ne fonctionne que si on suppose les objets, atomes ou molécules, infiniment ponctuels, alors que ce n'est en réalité pas le cas. Dès lors qu'on leur donne une taille non nulle, et donc un hypervolume non nul, une distribution aléatoire de ces objets à l'intérieur d'un hypercube fournit quelle que soit la dimension n une probabilité non nulle que deux d'entre eux soient adjacents. En outre, quelle est la loi qui nous assure qu'en dimension quatre les atomes ne seraient pas beaucoup plus gros ?

10 – Dimensionnalité de la matière étendue, dimensionnalité de l'espace, dimensionnalités externe et interne de l'atome

Parmi toutes les tentatives d'explication que nous venons de survoler rapidement, aucune ne semble pleinement satisfaisante. La raison en est peut-être bien qu'elles sont cherchées là où elles ne peuvent pas être.

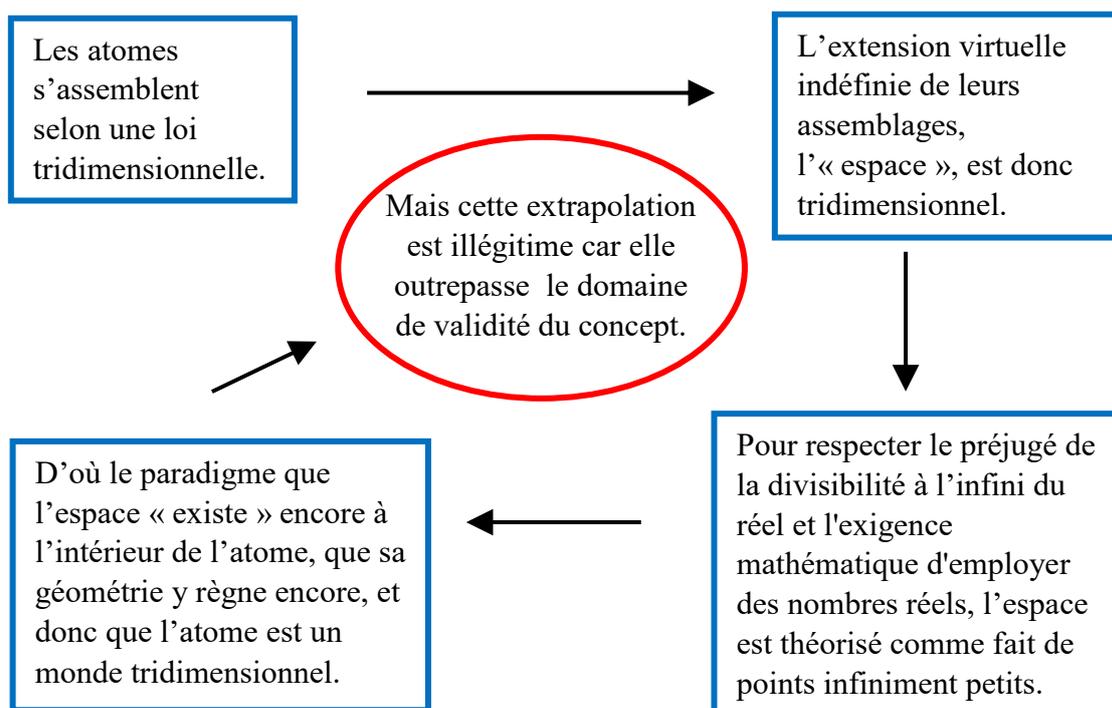
Aucune, en effet, n'adopte le point de vue relativiste, qui commencerait par observer que l'« espace », n'ayant d'existence réelle, ne peut avoir en propre quelque dimension que ce soit. Il ne peut être tridimensionnel que par héritage. Et cet héritage ne peut lui venir que de ce qui l'engendre, la matière dont il est le prolongement virtuel.

La question de savoir pourquoi l'« espace » est tridimensionnel – ou bien pourquoi l'« espace-temps » est quadridimensionnel – est donc à celle de savoir pourquoi la matière au repos galiléen est tridimensionnelle.

Mais la matière, encore une fois, est faite d'atomes, et si elle est tridimensionnelle, c'est que les atomes, lorsqu'ils s'assemblent, le font selon des structures de dimension trois.

Ce serait cependant aller un peu vite en besogne que d'en déduire que ce sont des objets tridimensionnels. De la même façon qu'on peut paver un plan avec de minuscules boules tridimensionnelles et obtenir ainsi, à l'échelle macroscopique, une surface, on peut paver un espace euclidien de dimension trois d'objets de dimension arbitraire, qui n'est même pas obligée d'être la même pour tous. Il suffit pour cela de tracer dans un espace euclidien de dimension n un espace de dimension trois et de le paver.

La physique d'aujourd'hui semble avoir besoin de ces dimensions « repliées ». Ainsi la théorie (ou plutôt les théories) des cordes insèrent leurs particules dans des espaces à 10 ou 11 ou même 26 dimensions. Si nous pensons l'espace comme un « en soi », une « chose », elles entrent en scène comme un lapin jaillissant du chapeau d'un prestidigitateur. Alors que si nous le pensons comme n'ayant pas de réalité, leur apparition ne relève pas de l'exercice de magie. Si l'espace n'est pas une « chose », son seul domaine de validité certaine commence à l'échelle des assemblages d'atomes. En dessous, il peut être n'importe quoi.



Nous ne sommes donc en rien obligés de penser l'atome et plus généralement le monde subatomique comme étant inséré dans un carcan tridimensionnel. Cela n'empêche pas que le seul regard concret possible pour nous sur lui soit nécessairement inséré dans le contexte tridimensionnel où nous sommes et où sont nos dispositifs expérimentaux.

Du coup, l'atome et le monde subatomique sont géométriquement ambivalents. Ils ont une géométrie *externe*, que nous atteignons depuis le contexte tridimensionnel via des *instruments-relais*, rayons de diverses natures avec lesquels nous extrapolons au monde subatomique la géométrie macroscopique, qui elle est construite sur cet *instrument premier* qu'est le corps mémoforme. Ce n'est évidemment pas sans résultat, toute la physique depuis la fin du dix-neuvième siècle en témoigne. Mais on peut penser aussi que cette extrapolation, même si elle est efficiente, même si nous n'avons pas d'autre moyen d'« entrer » dans l'atome, nous fournit un cadre grevé d'une certaine manque de légitimité et qui installe un hiatus entre cette géométrie tridimensionnelle projetée et la géométrie *interne, réelle* du monde subatomique. L'émergence dans la pensée d'aujourd'hui des dimensions « repliées » semble confirmer ce point de vue, en même temps qu'elle accrédite la thèse de l'irréalité de l'espace.

Il semble donc que nous soyons à même de proposer une explication de la tridimensionnalité de l'espace assez différente de celles listées plus haut :

1) Ce n'est pas l'espace qui est tridimensionnel, mais la matière qui l'engendre.

2) Les atomes ne sont pas *a priori* des objets intrinsèquement tridimensionnels. On peut envisager de les considérer

– soit comme étant de dimension intrinsèque n , dépendant peut-être de leur nature,

– soit comme étant de dimension indéterminée, dans le cadre d'une géométrie moins contraignante que si sa dimension était fixée, mais cependant suffisante pour qu'on puisse y écrire les lois qui régissent leur comportement. D'une certaine façon, le paramètre « dimension » est assez secondaire en géométrie. Les notions d'alignement et de distance n'en dépendent pas. La seule différence, c'est que plus la dimension augmente, plus on peut tracer de figures différentes. Le système d'axiomes proposé dans l'article *Une axiomatisation de la géométrie fondée sur l'instrument et l'expérience*⁹ comporte 21 axiomes dont le dernier fixe dimension de l'espace. En le supprimant, on obtient une

⁹ Jean Stratonovitch, Hal.

axiomatisation d'un espace euclidien de dimension inconnue supérieure ou égale à 2.

3) Quoi qu'il en soit, le monde de l'atome est régi par une combinatoire de nombres quantiques qui déterminent la structure de son nuage électronique et en particulier celles de sa couche la plus externe, et qui, en elle-même, n'offre pas de trace d'être attachée à une dimensionnalité plutôt qu'à une autre. Le nombre des boules de rayon R qu'on peut placer autour d'une boule de même rayon, tangentes à elle, croît très rapidement avec la dimension de l'espace¹⁰. En dimension 5 il est déjà supérieur ou égal à 40, en dimension 4 il est égal à 24 : ces valeurs outrepassent les possibilités de la couche de valence des atomes déterminée par la combinatoire quantique. En dimension 2 ce nombre est 6, ce qui est au contraire insuffisant. Reste donc la valeur 3.

4) La matière étendue est donc tridimensionnelle. Soit (E) un « espace » construit autour d'un lieu O, au sens de prolongement virtuel d'un corps mémoforme en O, et M un point de l'« espace », au deuxième sens d'ensemble des positions possibles d'un corps dans le cosmos. Nous pouvons en théorie tendre une longue ficelle entre ces deux points, et elle aura une trace déterminée dans l'espace en O. Chaque point M pourra être ainsi décrit par une direction à partir de O dans l'espace tridimensionnel (E) et par une distance, la longueur de ficelle qu'il faut pour l'atteindre. L'« espace » – aux deux sens du mot – est donc bien tridimensionnel.

Cette démonstration – ou plutôt « monstration » – échappe au défaut d'extrapolation hasardeuse d'une loi physique de la dimension 3 vers une autre. Elle met en effet le doigt sur des lois – celles de la combinatoire quantique qui construit les couches électroniques – dont elle justifie qu'elles n'ont pas à être considérées comme liées à une dimension particulière et montre que ces lois construisent un univers tridimensionnel.

11 – Conclusion

Il n'existe aucune expérience de physique qui ne fasse intervenir l'espace et le temps. Les notions spatiotemporelles sont l'étoffe sur laquelle se déploie la physique. Leur construction solide n'est donc pas une question à ranger avec

¹⁰ Mittelman, Hans D., Vallentin, Frank (2009), *High accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers.*, *Experimental Mathematics* **19**: 174–178, arXiv :0902.1105.

O. R. Musin (2003), *The problem of the twenty-five spheres*, *Russ. Math. Surv.* **58** (4): 794–795

celles qui concernent le sexe des anges. Selon qu'on les place d'un côté ou de l'autre de la ligne de démarcation entre réel et irréel, on voit changer la figure du monde. Dans un cas l'expansion de l'univers est une réalité, dans l'autre une simple illusion. Dans un cas, on manipule comme si elles allaient de soi des expressions telles que « une picoseconde après le big-bang », dans l'autre on reste interloqué devant cette formule, incapable de lui trouver la moindre signification puisqu'il n'y a pas d'horloge à laquelle se référer dans cet univers qui serait alors bien plus petit qu'une tête d'épingle, pas plus qu'il n'y a d'instrument de géométrie qui permettrait de comprendre à quoi renvoie cette taille si petite. Dans un cas, on court à la poursuite d'une mystérieuse énergie qui expliquerait l'accélération de son expansion, dans l'autre on voit une explication immédiate tomber tout naturellement dans son panier.

Quoi qu'il en soit, quels que soient en l'occurrence les champs du réel et de l'irréel, on ne peut pas rester dans l'entre-deux. La question a trop d'incidence pour qu'on puisse l'évacuer.