



HAL
open science

Méthode de couplage éléments finis/éléments finis pour l'analyse linéaire de problèmes d'interaction fluide/structure

Jean-Francois Sigrist

► To cite this version:

Jean-Francois Sigrist. Méthode de couplage éléments finis/éléments finis pour l'analyse linéaire de problèmes d'interaction fluide/structure. Mhamed Souli; Jean-François Sigrist. Interaction Fluide Structure: Modélisation et simulation numérique, Hermès-Lavoisier, 2009, Traité MIM - Mécanique et ingénierie des matériaux. <hal-01742397>

HAL Id: hal-01742397

<https://hal.science/hal-01742397v1>

Submitted on 24 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Méthode de couplage éléments finis/éléments finis pour l'analyse linéaire de problèmes d'interaction fluide/structure

Jean-François SIGRIST

1.1. Introduction

Les phénomènes liés au couplage mécanique fluide/structure apparaissent, à des degrés divers d'importance, pour toute structure en contact avec un fluide. On entend par problème de couplage fluide/structure mécanique tout problème dans lequel :

- les milieux solide et fluide échangent des énergies d'origine *mécanique* ;
- les phases solide et fluide sont *distinctes* ;
- les milieux solide et fluide *n'échangent pas de masse*.

Le solide et le fluide, occupant un domaine de l'espace noté respectivement Ω_S et Ω_F , sont *couplés* dans le sens suivant : au niveau de la zone de contact entre le fluide et la structure (ou *interface fluide/structure* Γ), des échanges d'énergie mécanique se produisent dans les deux sens (voir FIG. 1.1) :

- le fluide exerce des *efforts* sur la structure en mouvement, ce qui modifie la dynamique de la structure ;
- la structure impose des *déplacements* sur le fluide et modifie ainsi les caractéristiques de l'écoulement fluide.

Les processus physiques régissant ces échanges varient selon les situations de couplage, selon que le fluide est en écoulement ou non, par exemple. On s'intéresse dans ce chapitre au problème de l'interaction dynamique entre une structure vibrante et un fluide au repos (le fluide est immobile si l'on excepte le flot oscillant créé par la structure vibrante) [AXI 01] [MOR 95]. On se limite dans ce type de problèmes à une description du mouvement du fluide et de la structure basée sur la théorie des *vibrations* : on considère ainsi les petites perturbations du mouvement de la structure et les fluctuations de pression du fluide autour d'un état d'équilibre stable. La formalisation des équations est conduite dans un cadre *linéaire*, pour lequel les notions de *modes propres* de la structure, du fluide ou de l'ensemble fluide/structure permettent de décrire la dynamique du système considéré. L'objet de ce chapitre est ainsi d'exposer la technique de couplage éléments finis structure/éléments finis fluide permettant de calculer les modes propres d'un système couplé fluide/structure.

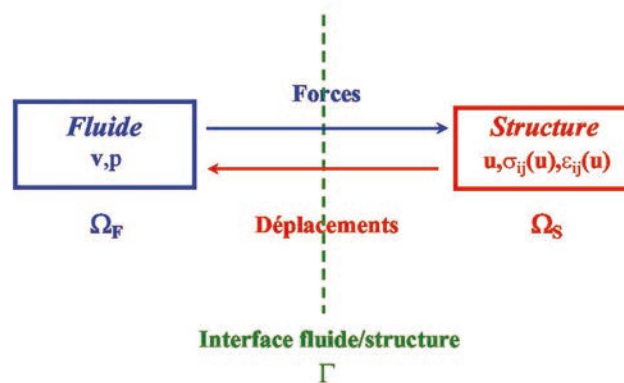


Figure 1.1. Schématisation générale d'un problème de couplage mécanique fluide/structure

1.1.1. Un exemple élémentaire de système couplé fluide-structure

Une première approche des effets d'*interactions fluide/structure* peut être proposée en considérant le cas élémentaire suivant (voir FIG. 1.2).

Le système étudié est un cylindre rigide de masse m , de rayon R . Le cylindre est couplé à un fluide incompressible de masse volumique ρ , contenu dans l'espace annulaire délimité par le cylindre et une paroi circulaire concentrique de rayon R' . Le cylindre est relié à la paroi rigide par un ressort de raideur k .

En l'absence de fluide, l'équation décrivant les oscillations libres du cylindre est :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u = 0 \quad u|_{t=0} = u_o \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \dot{u}_o$$

La pulsation propre des oscillations est alors :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

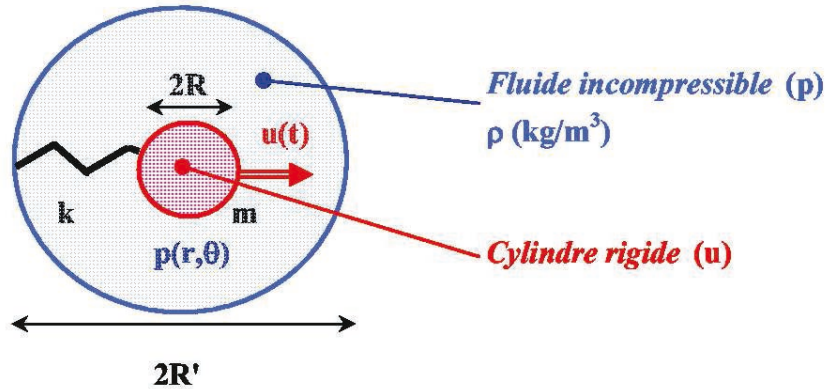


Figure 1.2. Un problème élémentaire d'interaction fluide/structure : système masse-ressort couplé avec un fluide incompressible confiné

En présence de fluide, les oscillations du cylindre sont régies par :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u = \varphi \quad u|_{t=0} = u_o \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \dot{u}_o$$

où φ désigne les efforts exercés par le fluide sur le cylindre oscillant. Ce terme se calcule comme :

$$\varphi = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) R \cos \theta d\theta$$

L'état du fluide est décrit par la variable pression $p(r, \theta)$ pour $(r, \theta) \in [R, R'] \times [0, 2\pi]$. Comme on le verra dans la suite du cours (voir paragraphe 1.4), les évolutions de la pression dans le fluide sont décrites par :

$$\Delta p = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\rho \frac{d^2 u}{dt^2} \cos \theta \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = 0$$

On montre alors que p est de la forme [FRI 72] :

$$p(r, \theta) = -\frac{\rho}{1 - \alpha^2} \left(r + \frac{\alpha^2 R^2}{r} \right) \frac{d^2 u}{dt^2} \cos \theta$$

et que l'effort exercé par le fluide sur le cylindre est :

$$\varphi = -m_h \frac{d^2 u}{dt^2}$$

avec m_h masse de fluide ajoutée donnée par :

$$m_h = \rho\pi R^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$$

où $\alpha = \frac{R'}{R}$. Les oscillations du cylindre couplé avec le fluide sont alors décrites par :

$$(m + m_h) \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = 0 \quad u|_{t=0} = u_o \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \dot{u}_o$$

La masse de fluide ajoutée peut être vue comme une masse additionnelle faisant partie intégrante du système oscillant. Cette masse est une masse "virtuelle" décrivant les efforts, de nature *inertielle*, exercés par le fluide sur la structure. Cette masse est différente de la masse de fluide réellement présente (calculée comme $m_f = \rho\pi R^2(\alpha^2 - 1)$), comme le montre la FIG. 1.3, et peut même devenir très importante, notamment dans le cas de problèmes avec un fluide confiné (dans le cas étudié, $m_h \rightarrow +\infty$ lorsque $\alpha \rightarrow 1$).

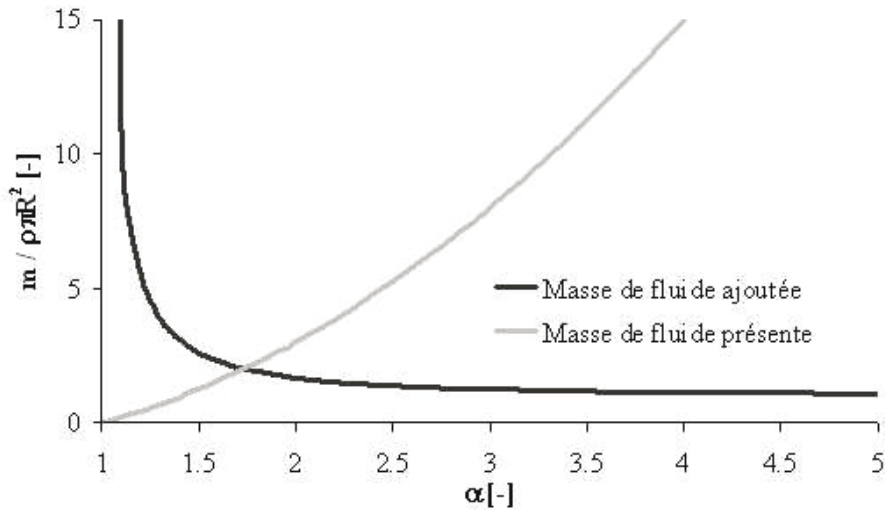


Figure 1.3. Masse de fluide présente et masse de fluide ajoutée

La pulsation propre des oscillations est alors :

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k}{m + m_h}} = \frac{\omega_o}{\sqrt{1 + m_h/m}} \leq \omega_o$$

La pulsation propre d'oscillations du système couplé avec le fluide est alors *inférieure* à la pulsation propre du système non couplé, et la baisse en fréquence peut être significative pour des situations de fort confinement. On voit donc que le comportement dynamique d'une structure peut être significativement affecté par la présence d'un fluide avec lequel elle peut interagir.

1.1.2. Contenu du chapitre

Ce premier chapitre est consacré à l'exposé des méthodes numériques de l'ingénieur applicables à l'étude de problèmes d'*interaction fluide/structure* ; il est divisé en quatre paragraphes.

Le premier paragraphe rappelle les équations décrivant la dynamique vibratoire d'une structure linéaire et expose la méthode des éléments finis utilisée pour la discrétisation spatiale du problème structure. La méthode est appliquée à titre d'exemple sur une structure élémentaire.

Le deuxième paragraphe expose ensuite les équations régissant la dynamique vibratoire d'un fluide (modes de *ballotement* en basse fréquence et modes *acoustiques* en haute fréquence) et détaille la méthode de résolution du problème fluide, basée sur une discrétisation de type éléments finis.

Le troisième paragraphe s'intéresse au comportement dynamique d'une structure élastique couplée avec un fluide incompressible. Les équations du système couplé sont présentées et le problème est résolu en utilisant un couplage entre la discrétisation éléments finis du problème structure et la discrétisation éléments finis du problème fluide. Les effets d'interaction fluide/structure sont de nature inertielle : on met en évidence un opérateur de masse ajoutée qui décrit les efforts exercés par le fluide en réponse à la vibration de la structure.

Le quatrième paragraphe enfin est dédié à l'étude de systèmes couplés fluide/structure dans le cas d'un couplage de type *hydro-élastique* (décrivant la dynamique de structure élastique et de fluide incompressible avec modes de ballotement) et de type *élasto-acoustique* (décrivant la dynamique de structure élastique et de fluide compressible avec modes acoustiques). Les équations générales du problème couplé sont écrites avec deux formulations différentes permettant d'obtenir un problème avec des opérateurs de masse et de raideur *symétriques* ou *non-symétriques*. La résolution numérique des équations ainsi posées utilise la technique de couplage éléments finis/éléments finis.

1.1.3. Pour en savoir plus...

Ce chapitre reste une introduction aux méthodes numériques permettant la résolution de problèmes d'interaction fluide/structure et se limite à des méthodes éprouvées et validées par leurs applications dans un contexte industrie. Ces méthodes sont encore en évolution et font l'objet d'améliorations continues, le lecteur désireux d'approfondir le sujet est invité à consulter la littérature scientifique, par exemple les journaux suivants : *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *Journal of Computational Physics*,

Pour une approche plus exhaustive, portant en particulier sur les aspects théoriques et physiques de ce type de problèmes, le lecteur pourra également se reporter aux ouvrages de référence suivants, dont le présent chapitre s'inspire largement.

– F. AXISA. *Interactions fluide/structure*. Hermès, 2001 : cet ouvrage propose une approche physique détaillée des phénomènes d'interactions fluide/structure et expose de nombreux exemples d'application sur des cas concrets. Les aspects liés à la compressibilité du fluide et leurs conséquences sur le couplage avec une structure sont en particulier très détaillés ;

– R.J. GIBERT. *Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986 : cet ouvrage propose une approche générale des problèmes de vibration de structures, avec prise en compte des interactions fluide/structure. Il contient de nombreux exemples analytiques et aborde de façon détaillée différents aspects de l'interaction fluide/structure ;

– H. J.P. MORAND, R. OHAYON. *Interactions fluide/structure*. Masson, 1992 : ouvrage de référence présentant de façon théorique les différentes formulations permettant la modélisation de problèmes d'interactions fluide/structure. Cet ouvrage repose sur un formalisme mathématique rigoureux et rentre dans le détail des formulations.

L'exposé développé ici reprend le formalisme mathématique et quelques exemples physiques présentés dans les ouvrages référencés ci-dessous et y apporte un complément pratique en détaillant la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis sous l'aspect interactions fluide/structure. Les exemples traités ici peuvent donc servir de cas de validation pour l'utilisation de codes de calcul industriels ou comme base de travail pédagogique pour l'enseignement des méthodes de couplage éléments finis/éléments finis [SIG 08].

1.2. Méthode éléments finis pour un problème de dynamique vibratoire d'une structure

L'objet de ce premier paragraphe est de proposer un bref rappel des équations qui décrivent le comportement dynamique linéaire d'une structure et de la méthode de résolution numérique classiquement utilisée pour résoudre ce type de problème.

On commence par rappeler les équations de l'élasticité linéaire décrivant les petits mouvements d'une structure autour d'une position de référence. On suppose connues

les notions de base de dynamique des structures ; un exposé plus approfondi des définitions et des concepts généraux de la mécanique des milieux continus est proposée par exemple dans les ouvrages de référence [CIA 86] [DUV 90] [SAL 02].

On présente ensuite succinctement la méthode des éléments finis utilisée pour résoudre le problème structure. Un exposé exhaustif de la méthode dépasse très largement le cadre de ce paragraphe ; les ouvrages de référence [BAT 82] [CIA 78] [DHA 84] [ZIE 89] proposent différentes présentations théoriques ou pratiques de la méthode.

On termine enfin par l'application de la méthode de éléments finis à l'étude d'un cas simple (poutre élastique encadrée/libre) pour lequel on rappelle les équations continues et la solution analytique correspondant au calcul des modes propres de flexion de la poutre.

1.2.1. Contexte d'étude et hypothèses générales

On s'intéresse à la description des vibrations d'une structure, supposée *homogène* et *isotrope*, dans le cadre de *petites transformations linéaires* et *élastiques* autour d'une position de référence.

L'hypothèse de petites transformations implique en particulier que l'on confonde la configuration de référence et la configuration actuelle de la structure. On écrit donc les équations de comportement de la structure sur un domaine fixe de l'espace, noté Ω_S , de frontière $\partial\Omega_S$, réunion disjointe des éléments $\partial\Omega_{S_0}$ et $\partial\Omega_{S_\sigma}$ (voir FIG. 1.4). Sur $\partial\Omega_S$, la normale unitaire extérieure est notée \mathbf{n}_S .

Comme on s'intéresse au calcul des modes propres de la structure, on suppose cette dernière libre d'efforts volumiques sur Ω_S et d'efforts surfaciques sur $\partial\Omega_{S_\sigma}$; on supposera sans perte de généralité que les mouvements de la structure sont bloqués sur $\partial\Omega_{S_0}$.

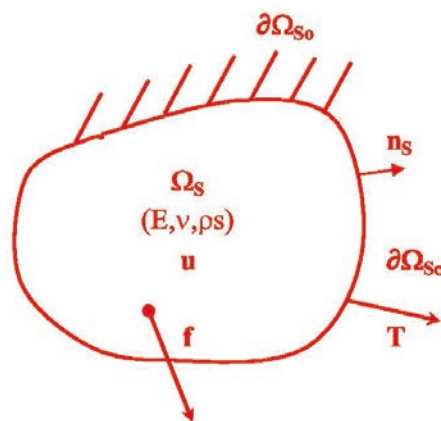


Figure 1.4. Schématisation générale du problème structure

Le mouvement de la structure est ainsi décrit par un *champ de déplacement* $\mathbf{u} = (u_i)$ défini en tout point \mathbf{x} du domaine Ω_S , les déformations sont représentées par le *tenseur des déformations* $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}))$. L'hypothèse de petites transformations permet d'écrire la relation linéaire suivante entre déplacements et déformations, en ne retenant que les termes du premier ordre :

$$\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1)$$

Les déformations de la structure induisent un champ de contraintes dans la structure, représentés par le *tenseur des contraintes* $\sigma(\mathbf{u}) = (\sigma_{i,j}(\mathbf{u}))$. L'hypothèse de comportement linéaire élastique de la structure permet d'écrire la relation entre les déformations et les contraintes dans la structure sous la forme suivante (loi de Hooke) :

$$\sigma_{i,j}(\mathbf{u}) = \lambda \varepsilon_{k,k}(\mathbf{u}) \delta_{i,j} + 2\mu \varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}) \quad (1.2)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé de la structure, supposés connus. Ces coefficients peuvent être calculés à partir du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν de la structure selon :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

1.2.2. Formulation forte et formulation faible du problème structure

Avec les hypothèses précédentes, la relation fondamentale de la dynamique pour le milieu continu structure s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{i,j}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } \Omega_S \quad (1.3)$$

avec la relation de liaison déplacement/déformations et la loi de comportement déformations/contraintes données respectivement par (1.1) et (1.2). L'équation locale précédente est assortie des conditions aux limites suivantes :

$$u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad (1.5)$$

qui traduisent le fait que la structure est bloquée sur $\partial\Omega_{S_o}$ et libre d'effort sur $\partial\Omega_{S\sigma}$.

Dans le cas général, il n'est pas possible de déterminer une *solution forte* au problème posé, c'est-à-dire de trouver une solution \mathbf{u} satisfaisant l'équation (1.3) avec les conditions aux limites (1.4,1.5) et les relations (1.1,1.2).

La résolution du problème est alors conduite en recherchant une *solution faible* satisfaisant une formulation intégrale (ou *formulation variationnelle*), équivalente au problème initial.

La *formulation faible* du problème est obtenue en utilisant la méthode des fonctions test [RAV 83]. On considère un champ de déplacement $\delta \mathbf{u} = (\delta u_i)$ appelé *champ de déplacement virtuel* vérifiant la condition $\delta \mathbf{u}|_{\partial \Omega_{S_0}} = \mathbf{0}^1$. On multiplie (1.3) par $\delta \mathbf{u}$ et on intègre sur le domaine Ω_S , de façon à écrire :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i dV - \int_{\Omega_S} \frac{\partial \sigma_{i,j}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \delta u_i dV = 0$$

On utilise alors la formule d'intégration par partie généralisée, écrite comme :

$$\int_{\Omega_S} \frac{\partial \sigma_{i,j}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \delta u_i dV = - \int_{\Omega_S} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) dV + \int_{\partial \Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S \delta u_i dS$$

en utilisant la propriété de symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes. En tenant compte de cette relation, la formulation variationnelle du problème structure est alors :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i dV + \int_{\Omega_S} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) dV = 0 \quad (1.6)$$

1.2.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

La résolution numérique des problèmes posés par la formulation variationnelle (1.6) utilise de façon classique la *méthode des éléments finis* [BAT 82] [DHA 84] [ZIE 89].

L'idée de la méthode est de produire une solution discrète réalisant une approximation de la solution au problème continu en travaillant sur un domaine géométrique discret sur lequel les équations intégrales continues sont approchées à l'aide de relations algébriques.

Le domaine Ω_S est ainsi approché par E_S volumes élémentaires Ω_{S_e} de forme polygonale de sorte qu'on puisse écrire $\Omega_S \sim \bigcup_{e=1}^{e=E_S} \Omega_{S_e}$. On réalise ainsi un *maillage* de la structure étudiée.

1. On dit que le champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ est *admissible*.

Les intégrales de volume apparaissant dans la formulations (1.6) sont alors approchées de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_S} (\cdot) d\mathcal{V} \sim \sum_{e=1}^{e=E_s} \int_{\Omega_{S_e}} (\cdot) d\mathcal{V}_e$$

On est donc ramené au calcul des termes suivants (respectivement terme de *masse* et terme de *raideur*) sur chaque élément fini Ω_{S_e} :

$$\int_{\Omega_{S_e}} \rho_S u_i \delta u_i d\mathcal{V}_e \quad \int_{\Omega_{S_e}} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V}_e$$

Le principe de discrétisation est alors le suivant : sur chaque élément fini Ω_{S_e} , le champ de déplacement $\mathbf{u}|_{\Omega_{S_e}}$ est calculé à partir d'un nombre fini de valeurs en des points (ou *noeuds*) donnés sur l'élément fini, par interpolation polynômiale. On écrit ainsi sur l'élément Ω_{S_e} fini une relation linéaire du type :

$$\mathbf{u}|_{\Omega_{S_e}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_S^e(\mathbf{x}) \mathbf{U}_e(t)$$

où :

– \mathbf{U}_e est le *vecteur des inconnues nodales en déplacement* sur l'élément fini Ω_{S_e} ;

– \mathbf{N}_S^e est la *matrice des fonctions de forme* (polynômes d'interpolation) pour l'élément fini Ω_{S_e} .

Il s'agit alors de formuler le problème en fonction des inconnues nodales en déplacement pour le problème. L'ensemble des inconnues du problème discret (ou *degrés de liberté*) est regroupé dans un vecteur noté \mathbf{U} . Le passage du vecteur des inconnues globales du problème \mathbf{U} au vecteur des inconnues locales \mathbf{U}_e sur l'élément fini Ω_{S_e} est réalisé formellement au moyen de la relation matricielle :

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{\Lambda}_S^e \mathbf{U}$$

où $\mathbf{\Lambda}_S^e$ est la *matrice de localisation* des degrés de liberté de l'élément fini e dans l'ensemble des degrés de liberté du problème.

On utilise une relation similaire pour les champs virtuels, *i.e.* on écrit $\delta \mathbf{u}|_{\Omega_{S_e}} = \mathbf{N}_S^e \delta \mathbf{U}_e$. On calcule alors les termes de masse et de raideur de la façon suivante.

Calcul du terme de masse Le calcul du terme de masse nécessite l'approximation du produit scalaire $u_i \delta u_i$ sur une éléments fini structure ; ce produit est alors calculé en utilisant les interpolations des champs \mathbf{u} et $\delta \mathbf{u}$, soit :

$$u_i \delta u_i = \delta \mathbf{U}_e^T \mathbf{N}_S^e{}^T \mathbf{N}_S^e \mathbf{U}_e$$

et on déduit alors le terme de masse :

$$\int_{\Omega_{Se}} \rho_S u_i \delta u_i dV_e = \delta \mathbf{U}_e^T \left(\int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_S^e{}^T \mathbf{N}_S^e dV_e \right) \mathbf{U}_e$$

Calcul du terme de raideur Le calcul du terme de raideur nécessite l'approximation du produit scalaire $\sigma_{i,j}(\mathbf{u})\varepsilon_{i,j}(\delta\mathbf{u})$ sur l'élément fini Ω_S^e . On se place sans perte de généralité dans un système de coordonnées cartésiennes. Le produit scalaire précédent est écrit $\sigma_{i,j}\varepsilon_{i,j} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$ où $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont des vecteurs à six composantes donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \langle \sigma_{x,x}, \sigma_{y,y}, \sigma_{z,z}, \sigma_{x,y}, \sigma_{x,z}, \sigma_{y,z} \rangle$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \langle \varepsilon_{x,x}, \varepsilon_{y,y}, \varepsilon_{z,z}, 2\varepsilon_{x,y}, 2\varepsilon_{x,z}, 2\varepsilon_{y,z} \rangle$$

puisque les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ sont symétriques.

La relation de liaison (1.1) s'écrit $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}\mathbf{U}_e$ où \mathbf{H} est la matrice :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G}$$

avec \mathbf{G} représentant l'opérateur gradient :

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_S^e \mathbf{U}_e$ avec $\mathbf{B}_S^e = \mathbf{H}\mathbf{N}_S^e$.

D'autre part, la loi de comportement (1.2) s'écrit $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ avec :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{L} et \mathbf{M} sont données par :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

et :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

On peut ainsi écrire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}_S^e \mathbf{U}_e$. On calcule alors le terme de raideur sur une élément fini comme :

$$\int_{\Omega_{S_e}} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V}_e = \delta \mathbf{U}_e^T \left(\int_{\Omega_{S_e}} \mathbf{B}_S^{eT} \mathbf{E} \mathbf{B}_S^e d\mathcal{V}_e \right) \mathbf{U}_e$$

A partir des expressions des termes de masse, raideur et d'effort établies ci-dessus, on définit les matrices élémentaires suivantes pour chaque élément fini Ω_{S_e} :

- matrice de masse élémentaire $\mathbf{m}_S^e = \int_{\Omega_{S_e}} \rho_S \mathbf{N}_S^{eT} \mathbf{N}_S^e d\mathcal{V}_e$;
- matrice de raideur élémentaire $\mathbf{k}_S^e = \int_{\Omega_{S_e}} \mathbf{N}_S^{eT} \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{N}_S^e d\mathcal{V}_e$.

Ces expressions sont alors calculées numériquement avec une méthode d'intégration appropriée après changement de variable sur un élément fini de référence de façon à ramener les domaines d'intégration à l'intervalle $[-1, +1]$. La méthode de Gauss utilise par exemple un schéma du type :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(\xi) d\xi \simeq \sum_{l=0}^{l=L} w_l \psi(\xi_l)$$

avec $(\xi_l)_{l \in [1, L]}$ les points d'intégration et $(w_l)_{l \in [1, L]}$ les poids associés.

1.2.4. Formulation discrète du problème aux valeurs propres

La forme discrète de la formulation variationnelle (1.6) est alors obtenue en sommant les expressions élémentaires précédentes, établies pour chaque élément fini. On obtient alors la forme discrète :

$$-\omega^2 \sum_{e=1}^{e=E_s} \delta \mathbf{U}_e^T \mathbf{m}_S^e \mathbf{U}_e + \sum_{e=1}^{e=E_s} \delta \mathbf{U}_e^T \mathbf{k}_S^e \mathbf{U}_e = 0 \quad (1.7)$$

En utilisant les relations $\mathbf{U}_e = \boldsymbol{\Lambda}_S^e \mathbf{U}$ et $\delta \mathbf{U}_e = \boldsymbol{\Lambda}_S^e \delta \mathbf{U}$, l'expression précédent s'écrit également :

$$-\omega^2 \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_S \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{U} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{U}$$

où on a défini les matrices globales et les vecteurs globaux de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
- \text{matrice de masse } \mathbf{M}_S &= \sum_{e=1}^{e=E_s} \Lambda_S^{eT} \mathbf{m}_S^e \Lambda_S^e; \\
- \text{matrice de raideur } \mathbf{K}_S &= \sum_{e=1}^{e=E_s} \Lambda_S^{eT} \mathbf{k}_S^e \Lambda_S^e.
\end{aligned}$$

L'opération permettant de calculer les matrices globales à partir des matrices élémentaires est appelée *opération d'assemblage*.

L'expression (1.7) étant valable pour tout $\delta \mathbf{U}$, on établit finalement la relation matricielle suivante :

$$-\omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

REMARQUE.— *Prise en compte des conditions aux limites.* Dans l'expression (1.8), on tient compte de la conditions aux limites de type déplacement imposé nul en considérant des matrices dont on ne conserve que les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté en déplacement non contraints.

1.2.5. Exemple : modes de flexion d'une poutre élastique encastree/libre

On propose dans ce paragraphe un exemple d'application de la méthode des éléments finis pour le calcul des modes propres d'une poutre élastique encastree/libre². On commence par rappeler les équations continues du problème, puis on expose la solution analytique au problème ainsi posé. La méthode des éléments finis est ensuite détaillée pour le cas étudié et on termine par une comparaison des fréquences propres calculées avec la solution analytique et la solution numérique éléments finis.

1.2.5.1. Définition du problème, équations continues et solution analytique

Le problème étudié est décrit par la FIG. 1.5 : il s'agit de calculer les modes propres de flexion d'une poutre droite de section circulaire de rayon R , d'épaisseur e , de longueur L , encastree à une extrémité (en $z = 0$) et libre à l'autre (en $z = L$), comme représenté par la FIG. 1.5. Les caractéristiques physiques et géométriques du système sont $R = 0.1$ m, $e = 0.02$ m, $L = 1$ m, $\rho_S = 7800$ kg/m³, $E = 6.04 \times 10^8$ Pa³.

2. Des solutions analytiques existent pour le calcul des modes et des fréquences propres de structures simples. On trouvera dans l'ouvrage de référence [BLE 84] un ensemble de données d'un grand intérêt pratique.

3. La valeur prise pour le module d'Young de la poutre ne correspond pas à une réalité physique : il s'agit d'obtenir avec les grandeurs géométriques utilisée ici les premières fréquences propres de l'ordre de la quelques Hz à quelques centaines de Hz, afin d'observer par la suite un couplage possible avec des modes de ballonnement du fluide (de l'ordre de quelques Hz) et les modes

$S = \pi (R^2 - (R - e)^2)$ est l'aire d'une section droite de la poutre ($S \simeq 2\pi Re$ pour une poutre de faible épaisseur) et $I = \pi/4 (R^4 - (R - e)^4)$ est le moment d'inertie de flexion ($I \simeq 3\pi/4 R^3 e$ pour une poutre de faible épaisseur).

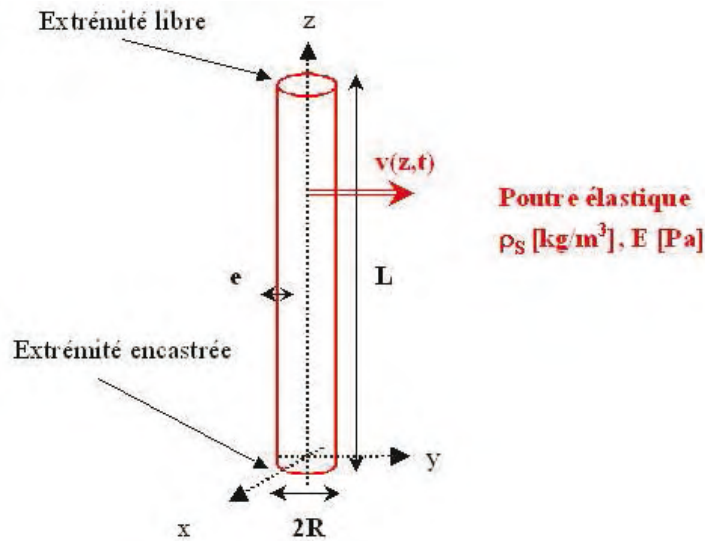


Figure 1.5. Poutre élastique encastree/libre

La dynamique vibratoire de la poutre est décrite dans le cadre de la théorie de Bernoulli [GIB 86]. L'équation décrivant les mouvements de flexion de la poutre est :

$$-\omega^2 \rho_S S v + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0 \text{ pour } z \in [0, L] \quad (1.9)$$

avec les conditions aux limites suivantes (respectivement déplacement et rotation nuls en $z = 0$, moment et effort tranchants nuls en $z = L$) :

$$v|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z=L} = 0 \quad (1.11)$$

On cherche une solution au problème sous la forme d'une combinaison linéaire de fonction du type $v(z) = e^{\lambda z}$. En reportant cette expression dans (1.9), on montre que λ doit nécessairement être racine du polynôme :

$$\Pi(\lambda) = \lambda^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2$$

acoustiques du fluide (de l'ordre de quelques centaines de Hz). Il s'agit dans ce chapitre de faire une expérience *numérique*, ce qui explique la liberté prise avec l'affectation numérique des grandeurs physiques du système.)

avec $\omega_o = \sqrt{\frac{EI}{\rho_S S}}$. Ces racines sont notées $\pm \frac{\Omega}{L}$ et $\pm i \frac{\Omega}{L}$. Les modes propres de flexion ont alors la forme suivante :

$$v(z) = \alpha \cos(\Omega z/L) + \beta \sin(\Omega z/L) + \alpha' \cosh(\Omega z/L) + \beta' \sinh(\Omega z/L)$$

avec $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ constantes réelles, calculées en tenant compte des conditions aux limites. En $z = 0$, (1.10) donne :

$$\alpha + \alpha' = 0 \quad \beta + \beta' = 0$$

et en $z = L$, (1.11) donne :

$$\alpha \cos(\Omega) + \beta \sin(\Omega) - \alpha' \cosh(\Omega) - \beta' \sinh(\Omega) = 0$$

$$\alpha \sin(\Omega) - \beta \cos(\Omega) + \alpha' \sinh(\Omega) + \beta' \cosh(\Omega) = 0$$

A partir de ces deux relations, on déduit le système suivant vérifié par α, β :

$$\begin{cases} \alpha [\cos(\Omega) + \cosh(\Omega)] + \beta [\sin(\Omega) + \sinh(\Omega)] = 0 \\ \alpha [\sin(\Omega) - \sinh(\Omega)] - \beta [\cos(\Omega) + \cosh(\Omega)] = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non nulle lorsque son déterminant est nul, soit lorsque Ω est racine de $D(x) = \cosh(x) \cos(x) + 1$.

On note $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ les racines de $D(x)$. Ω_n définit un mode propre v_n donné par :

$$v_n(z) = \cosh(\Omega_n z/L) - \cos(\Omega_n z/L) + \lambda_n [\sin(\Omega_n z/L) - \sinh(\Omega_n z/L)] \quad (1.12)$$

avec :

$$\lambda_n = \frac{\cosh(\Omega_n L) + \cos(\Omega_n L)}{\sinh(\Omega_n z) + \sin(\Omega_n z)}$$

et une pulsation propre ω_n donnée par :

$$\omega_n = \frac{\Omega_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_S S}}$$

La FIG. 1.6 donne le tracé des courbes $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto -\cosh(x)^{-1}$. Le graphe montre que pour $n \geq 2$, $\Omega_n \simeq \pi(n - 1/2)$.

Les valeurs des premières racines de la fonction D sont données dans le TAB. 1.1.

n	1	2	3	4
x_n	1.875	4.694	7.855	10.996

Tableau 1.1. Premières racines $(x_n)_{n \geq 1}$ de la fonction D

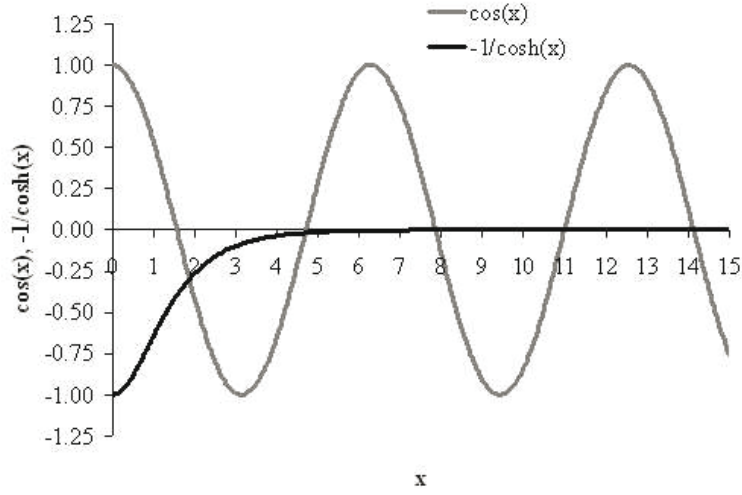


Figure 1.6. Résolution numérique de l'équation $D(x) = 0$

1.2.5.2. Discrétisation éléments finis

La résolution numérique du problème peut être conduite avec une méthode éléments finis, dont on donne ainsi une illustration sur le cas étudié. On commence par établir la formulation variationnelle du problème en considérant une fonction test δv vérifiant les conditions aux limites (1.11) et (1.10). En multipliant l'équation locale (1.9) par δv , en intégrant sur le domaine $[0, L]$, on obtient après deux intégrations par parties⁴, et en prenant en compte les conditions aux limites :

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz - \omega^2 \int_0^L \rho_S S v \delta v dz = 0$$

L'intervalle $[0, L]$ est divisée en N éléments finis mono-dimensionnels $[z_n, z_{n+1}]$ avec $n \in [1, N]$, de façon à écrire :

$$\int_0^L (\cdot) dz = \sum_{n=1}^{n=N} \int_{z_n}^{z_{n+1}} (\cdot) dz$$

On utilise des éléments finis poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (voir FIG. 1.7).

Sur $[z_n, z_{n+1}]$, le déplacement v est calculé comme :

$$v|_{[z_n, z_{n+1}]} = \mathbf{N}_n^S \mathbf{V}_n$$

avec :

4. L'utilisation de deux intégrations par parties permet de transformer l'intégrale non symétrique $\int_0^L \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \delta v dz$ en l'intégrale symétrique équivalente $\int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz$.

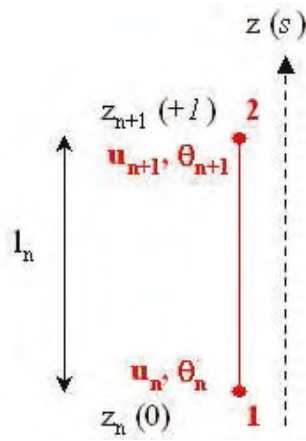


Figure 1.7. Élément fini poutre à deux noeuds et deux degrés de liberté par noeud

– \mathbf{V}_n le vecteur des valeurs nodales de l'élément :

$$\mathbf{V}_n = \langle v_n, \theta_n, v_{n+1}, \theta_{n+1} \rangle^T$$

où $\theta = \frac{\partial v}{\partial z}$ désigne la rotation d'une section droite de la poutre ;

– \mathbf{N}_n^S le vecteur des fonctions de forme associées ; on choisit des fonctions cubiques, soit :

$$\mathbf{N}_n^S(s) = \langle 1 - 3s^2 + 2s^3, l_n(s - 2s^2 + s^3), 3s^2 - 2s^3, l_n(-s^2 + s^3) \rangle$$

avec $z = z_n + sl_n$, pour $s \in [0, 1]$, et $l_n = z_{n+1} - z_n$.

La FIG. 1.8 donne une représentation de la fonction de forme $s \mapsto N_1^S(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3$ de l'élément poutre en fonction de l'abscisse locale s .

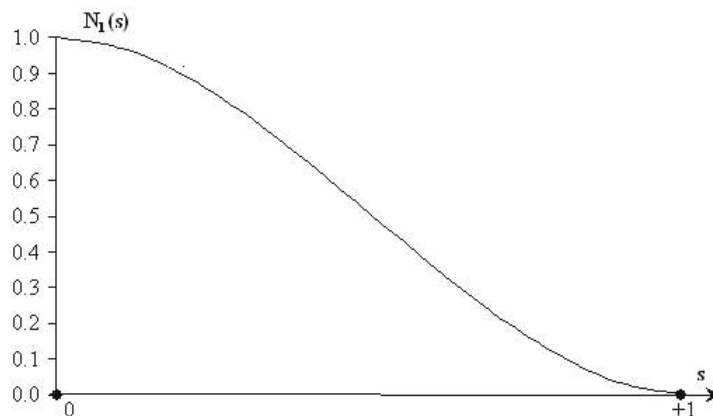


Figure 1.8. Fonction de forme $N_1^S(s)$

On utilise une relation d'interpolation identique pour δv . On discrétise ainsi les termes de la formulation variationnelle comme suit :

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} \rho_S S v \delta v dz = \delta \mathbf{V}_n^T \left(\int_{z_n}^{z_{n+1}} \mathbf{N}_n^{ST} \mathbf{N}_n^S dz \right) \mathbf{V}_n = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{\Lambda}_n^{ST} \mathbf{m}_S^n \mathbf{\Lambda}_n^S \mathbf{V}$$

avec $\mathbf{\Lambda}_n^S$ la matrice de localisation des degrés de liberté élémentaires \mathbf{V}_n dans l'ensemble des degrés de liberté \mathbf{V} du problème. On écrit de même :

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz = \delta \mathbf{V}_n^T \left(\int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{d^2 \mathbf{N}_n^{ST}}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_n^S}{dz^2} dz \right) \mathbf{V}_n = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{\Lambda}_n^{ST} \mathbf{k}_S^n \mathbf{\Lambda}_n^S \mathbf{V}$$

Les matrices \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S sont assemblées à partir des matrices élémentaires \mathbf{m}_S^n et \mathbf{k}_S^n selon les relations :

$$\mathbf{M}_S = \sum_{n=1}^{n=N} \mathbf{\Lambda}_n^{ST} \mathbf{m}_S^n \mathbf{\Lambda}_n^S \quad \mathbf{K}_S = \sum_{n=1}^{n=N} \mathbf{\Lambda}_n^{ST} \mathbf{k}_S^n \mathbf{\Lambda}_n^S$$

La matrice de localisation $\mathbf{\Lambda}_n^S$ est une matrice de dimension $4 \times 4(N+1)$, dont toutes les composantes sont nulles à l'exception des termes $(1, 4n-3)$, $(2, 4n-2)$, $(3, 4n-1)$ et $(4, 4n)$ qui valent 1.

Les composantes (i, j) des matrices élémentaires sont calculées analytiquement après changement de variable $z = z_n + sl_n$ selon :

$$m_{S(i,j)}^n = l_n \int_0^1 \rho_S S N_{n,i}^S N_{n,j}^S ds$$

$$k_{S(i,j)}^n = \frac{1}{l_n^3} \int_0^1 EI \frac{d^2 N_{n,i}^S}{ds^2} \frac{d^2 N_{n,j}^S}{ds^2} ds$$

Avec les fonctions de forme choisies, ces matrices élémentaires ont pour expression :

$$\mathbf{m}_S^n = \frac{\rho_S S l_n}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_n & 54 & -13l_n \\ 22l_n & 4l_n^2 & 13l_n & -3l_n^2 \\ 54 & 13l_n & 156 & -22l_n \\ -13l_n & -3l_n^2 & -22l_n & 4l_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_S^n = \frac{EI}{l_n^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_n & -12 & 6l_n \\ 6l_n & 4l_n^2 & -6l_n & 2l_n^2 \\ -12 & -6l_n & 12 & -6l_n \\ 6l_n & 2l_n^2 & -6l_n & 4l_n^2 \end{bmatrix}$$

Le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

où les matrices \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S sont obtenues à partir des matrices de masse et de raideur globales, dont on a retiré les deux premières lignes et les deux premières colonnes, afin de prendre en compte les conditions aux limites en $z = 0$. Si on a utilisé un maillage de la poutre avec N éléments finis poutres à deux noeuds et deux degrés de liberté par noeud, la taille du problème est donc $2 \times N$. \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S sont des matrices bandes de largeur 4, comme le montre la FIG. 1.9 (les composantes non nulles des matrices y sont repérées par une croix).

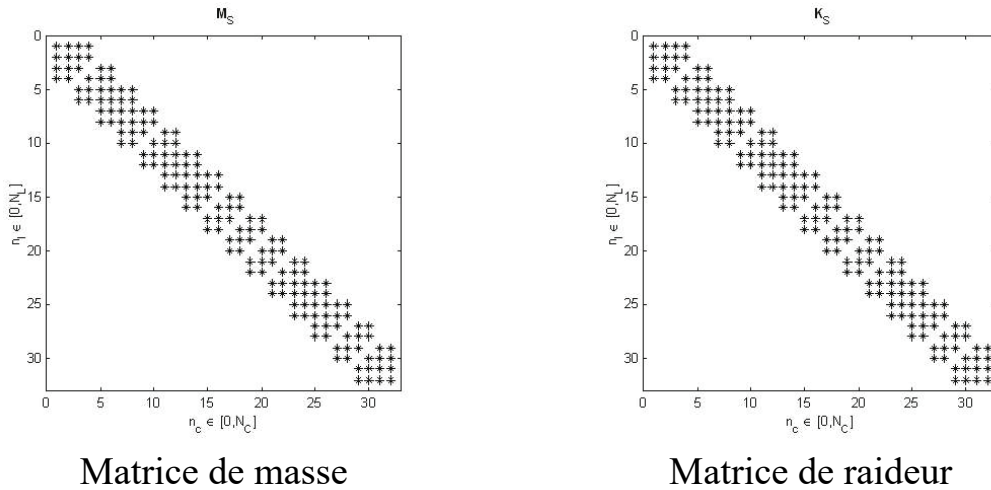


Figure 1.9. Structure des matrices de masse et de raideur pour la poutre élastique

1.2.5.3. Calcul des modes propres et des fréquences propres

La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis permet un calcul numérique des fréquences propres du système étudié. L'exemple proposé est résolu avec un code élémentaire développé dans MATLAB [MOK 97] pour le cas étudié. Les résultats de calcul numérique sont obtenus en utilisant la fonction `eig` de MATLAB, qui permet le calcul les éléments propres du problème. Le TAB. 1.2 compare les fréquences théoriques aux valeurs obtenues par calcul numérique avec $N = 15$ éléments finis poutre.

Fréquence	Solution analytique	Calcul éléments finis
f_1	9.9698 Hz	9.9709 Hz
f_2	62.484 Hz	62.487 Hz
f_3	174.97 Hz	174.97 Hz
f_4	342.89 Hz	342.93 Hz

Tableau 1.2. Fréquences propres analytique et numérique pour la poutre élastique

La FIG. 1.10 donne une représentation des modes propres en flexion. Les formes modales calculées ont une allure qui correspond bien aux expressions analytiques données par (1.12).

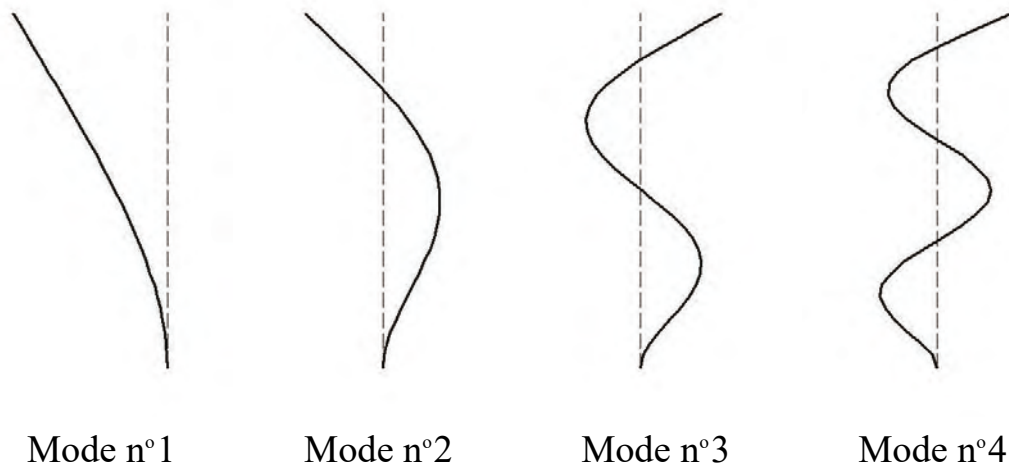


Figure 1.10. Modes propres de la poutre en flexion $v(z)$

1.3. Méthode éléments finis pour un problème de dynamique vibratoire d'un fluide

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les équations qui décrivent le comportement vibratoire d'un fluide en haute fréquence (problème d'acoustique) et en basse fréquence (problème de ballonnement) et de d'exposer la méthode des éléments finis, utilisée pour résoudre les deux types de problèmes. On détaille en particulier le calcul de opérateurs de masse et de raideur et on termine enfin par deux exemples d'application en proposant le calcul analytique et numérique des modes propres d'un fluide contenu dans une cavité cylindrique.

1.3.1. Contexte d'étude et hypothèses générales

Le comportement vibratoire d'un fluide (petites fluctuations autour d'un état d'équilibre), supposé *homogène, parfait* et initialement *au repos* peut être décrit par l'évolution d'une variable scalaire caractérisant l'état du fluide. Les équations du problème sont obtenues par linéarisation des équations générales d'écoulement du fluide [AXI 01] [GIB 86] [MOR 95] (équations de Navier-Stokes). Ces équations expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement et s'écrivent respectivement :

$$- \text{conservation de la masse } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0;$$

– conservation de la quantité de mouvement $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j^2}$.

où p et $\mathbf{v} = (v_i)$ sont les champs de pression et de vitesse du fluide. Ces équations sont complétées par la loi d'état du fluide, écrite par exemple :

$$p = \psi(\rho)$$

Les vibrations linéaires du fluide peuvent être décrites en utilisant une formulation en déplacement \mathbf{u}_F [BER 98] [HAM 78], en potentiel des vitesses ϕ [PES 98], en potentiel des déplacements φ [BOU 87] [SAN 88] ou en pression p [MAR 78] [SIG 07]. Dans ce cas, on s'intéresse aux évolutions de la pression p et de la masse volumique ρ d'un fluide non visqueux (*i.e.* caractérisé par $\mu = 0$) autour d'un état initial. Ces grandeurs sont écrites en utilisant la décomposition :

$$p(\mathbf{x}, t) = p_o(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t) \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_o(\mathbf{x}) + \rho'(\mathbf{x}, t)$$

dans laquelle on distingue la partie fluctuante (p', ρ') de la partie stationnaire (p_o, ρ_o) caractérisant l'état initial du fluide. En reportant les relations précédentes dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et en ne retenant que les termes du premier ordre, on déduit les équations de conservation (masse et quantité de mouvement) linéarisées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \rho_o \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations sont écrites sur un domaine fixe (hypothèse de petites transformations). Au premier ordre la loi de comportement du fluide s'écrit :

$$p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{(p_o, \rho_o)} \rho'$$

La relation précédente s'écrit aussi :

$$p' = c_o^2 \rho'$$

où c_o est la *célérité du son* dans le milieu fluide⁵. c_o est donc donnée par :

$$c_o = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}_{(p_o, \rho_o)}$$

On peut donc calculer c_o à partir des loi d'état du fluide⁶. On détermine par exemple à l'aide des propriétés thermodynamiques [SCH 81] la valeur de c_o dans l'eau pour les conditions normales de température et de pression (20°C, 1 bar) : $c_o = 1480$ m/s. Pour des fluides di-phasiques, la caractérisation de E_o et c_o est plus délicate ; si on utilise un modèle de mélange homogène, on peut proposer un calcul du module d'Young équivalent et de la célérité des ondes équivalente du fluide di-phasique à partir des caractéristiques de chacune des phases [AXI 01].

En dérivant par rapport au temps l'équation linéarisée de conservation de la masse on a :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_o \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_i} = 0$$

et en prenant la divergence de l'équation linéarisée de conservation de la quantité de mouvement, on écrit :

$$\rho_o \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

En combinant les deux relations précédentes avec la loi de comportement linéaire $p' = c_o^2 \rho'$, on déduit :

$$\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0$$

Cette équation permet de décrire la propagation d'*ondes acoustiques* dans le milieu fluide.

Les conditions aux limites traduisant la présence d'une surface libre ou d'une paroi mobile (rigide ou déformable) en frontière du domaine fluide s'expriment de la façon suivante.

5. Cette relation est obtenue en écrivant la relation déformations/contraintes dans le fluide avec les coefficients de Lamé $\mu = 0$, $\lambda = E_o$: un fluide est un milieu élastique qui ne reprend pas les efforts de cisaillement et pour lequel le module d'Young est $E_o = \rho_o c_o^2$ [AXI 01].

6. c_o peut être calculée en se plaçant dans une hypothèse de comportement *adiabatique* ou *isotherme* du fluide, les deux modèles donnant des valeurs différentes. On trouvera dans [AXI 01] une discussion physique sur ce point : le choix du modèle dépend du rapport entre le temps caractéristique de diffusion thermique dans le fluide et le temps de propagation des ondes sonores dans le fluide (lorsque les phénomènes de diffusion thermique sont lents, l'hypothèse adiabatique est valable).

Condition de surface libre Si on considère un fluide non pesant (pas d'effets de gravité), on exprime le fait que la surface libre est une *isobare*. La condition aux limites de surface libre s'exprime donc simplement par :

$$p' = 0$$

Cette condition aux limites permet de représenter une surface libre dans le domaine hautes fréquences.

Si on prend en compte les effets de pesanteur, on montre que la pression au niveau de la surface libre est donnée par :

$$p' = \rho_o g \eta$$

où η est l'*élévation* du niveau libre [AXI 01]. Dans l'état initial de fluide au repos, la surface libre est plane, et l'élévation η représente le déplacement du fluide dans la direction normale au niveau libre (par convention, la normale \mathbf{n} extérieure au milieu fluide est choisie verticale et ascendante, de façon à écrire le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}$). En vertu de l'hypothèse de petites transformations, la condition de surface libre est écrite sur la configuration de référence du fluide.

La relation précédente relie les variables p et η . On peut néanmoins éliminer cette grandeur pour obtenir une condition de surface libre exprimée uniquement en fonction de la pression. La vitesse du fluide au niveau de la surface libre est reliée à l'élévation selon $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. En utilisant cette relation et l'équation linéarisée de quantité de mouvement, on écrit :

$$\rho_o \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \rho_o \frac{\partial v_i}{\partial t} n_i = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} n_i$$

En combinant cette expression avec la relation $p' = \rho_o g \eta$ dérivée deux fois en temps, on déduit :

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

Cette condition permet de représenter une surface libre dans le domaine basses fréquences et de décrire la propagation d'*ondes de gravité*.

Condition de paroi Si on suppose que le fluide est en contact avec une paroi déformable, dont le déplacement est caractérisé par le vecteur \mathbf{u} , la condition de glissement des particules fluide à la paroi se traduit dans le cas d'un fluide parfait par la continuité de la composante normale des vitesses, soit :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}$$

Compte tenu de la relation $\nabla p = -\rho_o \dot{\mathbf{v}}$, on écrit cette condition avec la variable pression sous la forme :

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = -\rho_o \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}$$

Dans le cas d'une paroi rigide immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), cette condition devient :

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = 0$$

Cette condition permet également de représenter une surface libre dans le domaine des très basses fréquences [AXI 01].

Dans la suite, on se place dans le cas d'étude général défini par la FIG. 1.11 ci-dessous. On considère un fluide occupant le domaine de l'espace Ω_F , de frontière $\partial\Omega_F$ réunion disjointe des éléments de frontière $\partial\Omega_{F_o}$ (surface libre) et $\partial\Omega_{F\pi}$ (paroi rigide). L'état du fluide est décrit par les fluctuations de pression autour d'un état d'équilibre de référence⁷, ses grandeurs physiques sont notées c et ρ_F .

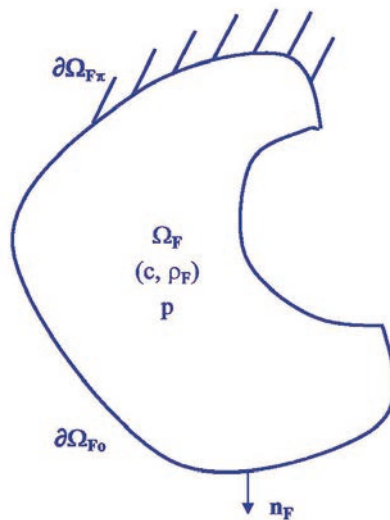


Figure 1.11. Schématisation générale du problème fluide

Sur $\partial\Omega_F$, la normale extérieure est notée \mathbf{n}_F ; elle est orientée dans la direction ascendante au niveau de la surface libre, de sorte que le champ de pesanteur soit $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}_F$ sur $\partial\Omega_{F_o}$. On s'intéresse alors à deux types de problème :

– problème fluide acoustique pour la caractérisation du niveau de pression dans une cavité acoustique (exemple d'application : étude du confort acoustique des passagers dans un véhicule [NEF 82]) ;

7. Dans la suite, pour simplifier la présentation, on note la pression fluctuante p au lieu de p' et l'on désignera cette grandeur en utilisant le terme "pression".

– problème de ballonnement fluide pour la caractérisation du niveau de pression dans un réservoir fluide (exemple d'application : comportement au séisme d'un réservoir de stockage [BIS 02]).

1.3.2. Formulation forte et formulation faible du problème fluide

1.3.2.1. Problème d'acoustique fluide

Un problème *d'acoustique fluide* est décrit avec l'équation de propagation des ondes :

$$-\frac{\omega^2}{c^2}p - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega_F \quad (1.14)$$

assortie des conditions aux limites suivantes :

$$p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_o} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} n_i^F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \quad (1.16)$$

Ces conditions traduisent la présence d'une surface libre et d'une paroi rigide (voir paragraphe précédent).

La résolution du problème ainsi posé est conduite en recherchant une solution faible, vérifiant la formulation variationnelle associée aux équations (1.14, 1.15, 1.16).

La formulation faible est obtenue comme dans le cas structure en utilisant la méthode des fonctions test. On considère une champ de pression virtuelle δp vérifiant la condition aux limites $\delta p|_{\partial\Omega_{F_o}} = 0$. On multiplie l'équation locale (1.14) par δp et on intègre sur le domaine Ω_F , de façon à écrire :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \delta p dV - \int_{\Omega_F} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \delta p dV = 0$$

En utilisant la formule d'intégration par partie généralisée :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \delta p dV = - \int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} dV + \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i^F \delta p dS$$

et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient la formulation variationnelle du problème fluide acoustique sous la forme :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \delta p dV + \int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} dV = 0 \quad (1.17)$$

1.3.2.2. Problème de ballonnement fluide

Un problème de *ballonnement fluide* linéaire est décrit avec l'équation de comportement d'un fluide *incompressible*⁸ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega_F \quad (1.18)$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} n_i^F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F = \omega^2 \frac{1}{g} p \text{ sur } \partial\Omega_{F\sigma} \quad (1.20)$$

qui traduisent les fluctuations de pression au niveau de la surface libre et la présence d'une paroi rigide.

La formulation variationnelle du problème s'écrit alors :

$$-\omega^2 \int_{\partial\Omega_{F\sigma}} \frac{1}{g} p \delta p \, dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \, dV = 0 \quad (1.21)$$

1.3.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

1.3.3.1. Problème d'acoustique fluide

La discrétisation de la formulation variationnelle du problème fluide (1.17) est conduite avec la méthode des éléments finis.

On réalise un maillage du domaine Ω_F avec E_f éléments finis Ω_{F_e} de sorte que

$\Omega_F \sim \bigcup_{e=1}^{e=E_f} \Omega_{F_e}$; la frontière $\partial\Omega_{F\pi}$ est alors approchée avec E'_f surfaces élémen-

taires $\partial\Omega_{F\pi e'}$ de façon à écrire $\partial\Omega_{F\pi} \sim \bigcup_{e'=1}^{e'=E'_f} \partial\Omega_{F\pi e'}$.

Il s'agit alors de discrétiser sur chaque élément fini $\Omega_{F_e}^e$ les intégrales suivantes (termes de masse et terme de raideur) :

$$\int_{\Omega_{F_e}} \frac{1}{c^2} p \delta p \, dV_e \quad \int_{\Omega_{F_e}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \, dV_e$$

8. Les phénomènes de ballonnement fluide se situent dans le domaine des basses fréquences : les effets de compressibilité peuvent ainsi être négligés.

Sur chaque élément fini Ω_{Fe} , le champ de pression p est approché par une relation du type :

$$p|_{\Omega_{Fe}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_F^e(\mathbf{x})\mathbf{P}_e(t)$$

où :

- \mathbf{P}_e est le *vecteur des inconnues nodales en pression* sur l'élément fini Ω_{Fe} ;
- \mathbf{N}_F^e est le *vecteur des fonctions de forme* pour l'élément fini Ω_{Fe} .

\mathbf{P} représente le vecteur de l'ensemble des inconnues nodales (degrés de liberté) en pression ; on a alors une relation du type $\mathbf{P}_e = \mathbf{\Lambda}_F^e \mathbf{P}$ avec $\mathbf{\Lambda}_F^e$ matrice de localisation des inconnues locales \mathbf{P}_e de l'élément fini Ω_{Fe} .

Calcul du terme de masse Le calcul du terme de masse nécessite l'approximation du produit scalaire $p \delta p$; compte tenu de l'expression retenue pour l'approximation de p sur l'élément fini Ω_{Fe} , on écrit ce produit scalaire comme $\delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{N}_F^{eT} \mathbf{N}_F^e \mathbf{P}_e$ et on déduit le terme de masse :

$$\int_{\Omega_{Fe}} \frac{1}{c^2} p \delta p d\mathcal{V}_e = \delta \mathbf{P}_e^T \left(\int_{\Omega_{Fe}} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_F^{eT} \mathbf{N}_F^e d\mathcal{V}_e \right) \mathbf{P}_e$$

Calcul du terme de raideur Le calcul du terme de raideur nécessite l'approximation du produit scalaire $\nabla p \cdot \nabla \delta p$. Ce produit scalaire s'écrit aussi $\nabla \delta \mathbf{p} \nabla \mathbf{p}$ où $\nabla \mathbf{p}$ est par définition le vecteur de composantes $\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)$. $\nabla \mathbf{p}$ est calculé sur l'élément fini Ω_{Fe} comme :

$$\nabla \mathbf{p} = \nabla \mathbf{N}_F^e \mathbf{P}_e$$

avec $\nabla \mathbf{N}_F^e$ la matrice des dérivées partielles des fonctions de forme, donnée par :

$$\nabla \mathbf{N}_F^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_F^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_F^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_F^e}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ainsi, le produit scalaire $\nabla p \cdot \nabla \delta p$ est calculé comme $\delta \mathbf{P}_e^T \nabla \mathbf{N}_F^{eT} \nabla \mathbf{N}_F^e \mathbf{P}_e^T$ et le terme de raideur s'écrit :

$$\int_{\Omega_{Fe}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} d\mathcal{V}_e = \delta \mathbf{P}_e^T \left(\int_{\Omega_{Fe}} \nabla \mathbf{N}_F^{eT} \nabla \mathbf{N}_F^e d\mathcal{V}_e \right) \mathbf{P}_e^T$$

A partir des expressions des termes de masse, raideur et de chargement établies ci-dessus, on définit les matrices élémentaires suivantes pour chaque élément fini Ω_{F_e} :

$$\begin{aligned}
 - \text{matrice de masse élémentaire } \mathbf{m}_F^e &= \int_{\Omega_{F_e}} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_F^e T \mathbf{N}_F^e d\mathcal{V}_e ; \\
 - \text{matrice de raideur élémentaire } \mathbf{k}_F^e &= \int_{\Omega_{F_e}} \nabla \mathbf{N}_F^e T \nabla \mathbf{N}_F^e d\mathcal{V}_e .
 \end{aligned}$$

Dans le cas où la géométrie du domaine fluide est simple, on peut calculer analytiquement ces matrices élémentaires ; dans le cas général, on utilise une procédure d'intégration numérique.

1.3.3.2. Problème de ballottement fluide

La discrétisation du problème de ballottement fluide est conduite de la même façon. Dans ce cas, le terme de masse est calculé sur la frontière $\partial\Omega_{F_o}$, discrétisée comme $\partial\Omega_{F_o} \sim \bigcup_{e''=1}^{e''=E_f} \partial\Omega_{F_o e''}$. Les termes de raideur et de chargement sont identiques au cas acoustique. Il s'agit de calculer pour chaque élément fini en contact avec la surface libre un terme du type :

$$\int_{\partial\Omega_{F_o e''}} \frac{1}{g} p \delta p d\mathcal{S}_{e''}$$

Compte tenu de l'approximation $p = \mathbf{N}_F^e \mathbf{P}_{e''}$ sur $\partial\Omega_{F_o e''}$, la discrétisation du terme de masse s'écrit :

$$\delta \mathbf{P}_{e''}^T \mathbf{m}_F^{o e''} \mathbf{P}_{e''}$$

avec la matrice de masse élémentaire définie comme :

$$\mathbf{m}_F^{o e''} = \int_{\partial\Omega_{F_o e''}} \frac{1}{g} \mathbf{N}_F^{e'' T} \mathbf{N}_F^{e''} d\mathcal{S}_{e''}$$

1.3.4. Formulation discrète du problème aux valeurs propres

1.3.4.1. Problème d'acoustique fluide

La forme discrète de la formulation variationnelle (1.17) est obtenue en sommant les expressions élémentaires écrites sur chaque élément fini :

$$-\omega^2 \sum_{e=1}^{e=E_f} \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{m}_F^e \mathbf{P}_e + \sum_{e=1}^{e=E_f} \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{k}_F^e \mathbf{P}_e = 0 \quad (1.22)$$

En utilisant les relations $\mathbf{P}_e = \Lambda_F^e \mathbf{P}$ et $\delta \mathbf{P}_e = 0$, l'expression précédente s'écrit :

$$-\omega^2 \delta \mathbf{P}^T \mathbf{M}_F \mathbf{P} + \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_F \mathbf{P} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{P}$$

où on a défini les matrices globales et les vecteurs globaux de la façon suivante :

$$\begin{aligned} - \text{matrice de masse } \mathbf{M}_F &= \sum_{e=1}^{e=E_f} \Lambda_F^e{}^T \mathbf{m}_F^e \Lambda_F^e ; \\ - \text{matrice de raideur } \mathbf{K}_F &= \sum_{e=1}^{e=E_f} \Lambda_F^e{}^T \mathbf{k}_F^e \Lambda_F^e. \end{aligned}$$

L'expression (1.22) étant valable pour tout $\delta \mathbf{P}$, on établit finalement la relation matricielle suivante :

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_F \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

REMARQUE.— *Prise en compte des conditions aux limites.* Dans l'expression (1.23), on tient compte de la conditions aux limites de type pression imposée nulle dans (1.15) en considérant des matrices dont on ne conserve que les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté en pression non contraints.

1.3.4.2. Problème de ballottement fluide

En sommant les équations élémentaires discrètes correspondant au problème de ballottement fluide, on écrit l'expression discrète de la formulation variationnelle (1.21) :

$$-\omega^2 \sum_{e''=1}^{e''=E_f''} \delta \mathbf{P}_{e''}^T \mathbf{m}_F^o{}^{e''} \mathbf{P}_{e''} + \sum_{e=1}^{e=E_f} \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{k}_F^e \mathbf{P}_e = 0 \quad (1.24)$$

Après assemblage des matrices, on écrit le problème sous la forme :

$$-\omega^2 \delta \mathbf{P}^T \mathbf{M}'_F \mathbf{P} + \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_F \mathbf{P} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{P}$$

en ayant défini la matrice de masse \mathbf{M}'_F comme :

$$\mathbf{M}'_F = \sum_{e''=1}^{e''=E_f''} \Lambda_F^{e''}{}^T \mathbf{m}_F^o{}^{e''} \Lambda_F^{e''}$$

L'expression précédente est valable pour tout $\delta \mathbf{P}$, on déduit alors le système matriciel représentant l'évolution du problème fluide :

$$-\omega^2 \mathbf{M}'_F \mathbf{P}(\omega) + \mathbf{K}_F \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

Comme le terme de masse ne fait intervenir que les degrés de liberté des noeuds situés sur la surface libre $\partial \Omega_{F_o}$, on distingue les degrés de liberté des noeuds de la

surface libre, notés \mathbf{P}_o , des degrés de liberté des nœuds du reste du domaine fluide, notés $\tilde{\mathbf{P}}$; le vecteur des inconnues nodales fluide \mathbf{P} s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_o \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{array} \right\}$$

et l'expression (1.25) est écrite de façon plus précise comme :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F^o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_F^o & \tilde{\mathbf{K}}_F^o \\ \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

On déduit ainsi le problème aux valeurs propres suivant, qui ne fait intervenir que les degrés de liberté en pression sur la surface libre :

$$(\mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}) \mathbf{P}_o(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_F^o \mathbf{P}_o(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.26)$$

1.3.5. Exemple n°2 : modes acoustiques d'une cavité fluide cylindrique

On propose dans ce paragraphe un premier exemple d'application de la méthode des éléments finis pour le calcul des modes propres d'une cavité acoustique à symétrie de révolution. On commence par établir les équations continues du problème, puis on donne la solution analytique au problème posé et on termine par la mise en oeuvre de la méthode numérique au moyen d'éléments finis axi-symétriques utilisant un développement en série de Fourier des inconnues.

1.3.5.1. Définition du problème, équations continues et solution analytique

On s'intéresse au calcul des modes propres d'une cavité fluide acoustique cylindrique, dans la situation décrite par la FIG. 1.12 ci-dessous. Les caractéristiques géométriques de la cavité fluide sont $R = 0.1$ m, $R' = \alpha R = 0.2$ m (soit $\alpha = 2$) et $L = 1$ m ; la célérité des ondes sonores dans le fluide est $c = 1500$ m/s. Les parois de la cavité acoustique sont supposées rigides.

Les equations du problème sont alors les suivantes :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \text{ pour } (r, \theta, z) \in [R, R'] \times [0, 2\pi] \times [0, L] \quad (1.27)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = 0 \quad (1.28)$$

L'équation (1.27) est l'équation de Helmholtz, assortie des conditions aux limites données par les équations (1.28) qui traduisent la présence des parois rigides en $Z = 0, L$ et $r = R, R'$.

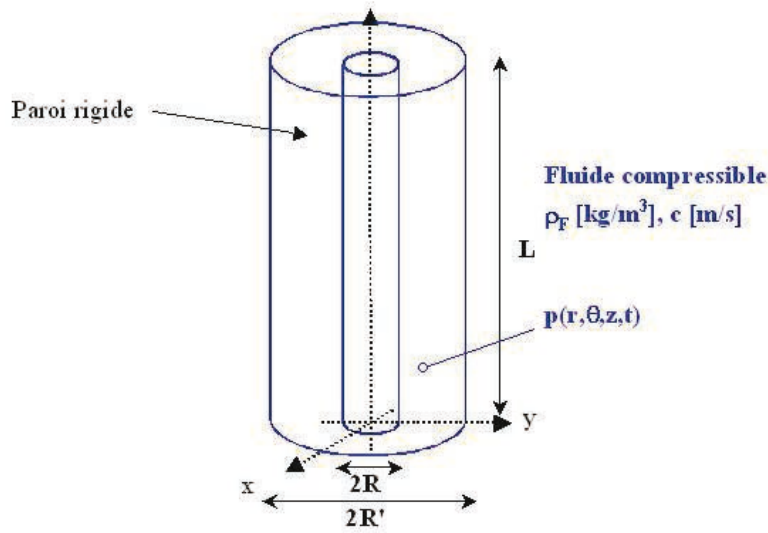


Figure 1.12. Cavité fluide acoustique cylindrique

Une solution analytique au problème posé par (1.27) et (1.28) peut être obtenue en utilisant une méthode de séparation de variables, c'est-à-dire en recherchant la solution sous la forme :

$$p(r, \theta, z) = p_R(r)p_Z(z) \cos(n\theta) \quad \text{ou} \quad p(r, \theta, z) = p_R(r)p_Z(z) \sin(n\theta)$$

La dépendance en θ sous forme d'une fonction harmonique est guid e par la nature axi-symétrique du problème (invariance du problème par changement de variable $\theta \leftarrow \theta + 2\pi$). En coordonnées cylindriques, l'expression du laplacien est :

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$$

Compte tenu de cette expression et de la forme retenue pour la solution en pression, l'équation locale en pression s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{p_R} \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_R}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} p_R \right) + \frac{1}{p_Z} \left(\frac{d^2 p_Z}{dz^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Les fonctions p_R et p_Z ne dépendant uniquement que de r et de z , la relation ci-dessus n'est v rifi e qu'à la condition que :

$$\frac{1}{p_R} \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_R}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} p_R \right) = k_R \quad \frac{1}{p_Z} \left(\frac{d^2 p_Z}{dz^2} \right) = k_Z$$

avec k_R et k_Z constantes réelles. D'autre part, $\frac{\omega^2}{c^2}$ étant toujours positif, $k_R + k_Z$ est un nombre toujours négatif, on peut donc poser $k_R = -q_R^2$ et $k_Z = -q_Z^2$. On déduit ainsi la forme des fonctions p_R et p_Z :

– la fonction p_R est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} + \left(q_R^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) p_R = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{dp_R}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad \left. \frac{dp_R}{dr} \right|_{r=\alpha R} = 0$$

p_R s'écrit alors sous la forme :

$$p_R(r) = \alpha_n J_n(q_R r) + \beta_n Y_n(q_R r)$$

où J_n, Y_n sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce. En tenant compte des conditions aux limites, on montre que α_n et β_n doivent être solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_n J'_n(q_R R) + \beta_n Y'_n(q_R R) = 0 \\ \alpha_n J'_n(q_R \alpha R) + \beta_n Y'_n(q_R \alpha R) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Ce système admet une solution non nulle si son déterminant est nul, c'est-à-dire si $q_R R$ est racine de la fonction $D_{n,\alpha}(x) = J'_n(x)Y'_n(\alpha x) - J'_n(\alpha x)Y'_n(x)$.

Ainsi, si on note $q_{n,m}$ la $m^{\text{ième}}$ racine de $D_{n,\alpha}$, on a :

$$q_R = \frac{q_{n,m}}{R}$$

– la fonction p_Z est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 p_Z}{dz^2} + q_Z^2 p_Z = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{dp_Z}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{dp_Z}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

p_Z est ainsi de la forme :

$$p_Z = \alpha_o \cos(q_Z z) + \beta_o \sin(q_Z z)$$

En tenant compte des conditions aux limites, on montre que $\beta_o = 0$ et que q_Z prend les valeurs discrètes :

$$q_Z = \frac{l\pi}{L} \quad \forall l \geq 0$$

En reprenant l'équation locale, on déduit alors que les pulsations propres doivent ainsi vérifier la relation :

$$\omega_{l,n,m} = c \times \sqrt{\left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{q_{n,m}}{R} \right)^2} \quad (1.30)$$

Le mode propre en pression correspondant est alors :

$$p_{l,n,m}(r, \theta, z) = (\pi_n J_n(q_{n,m}r) - Y_n(q_{n,m}r)) \cos(n\theta) \cos\left(\frac{l\pi z}{L}\right) \quad (1.31)$$

avec : $\pi_n = \frac{Y'_n(q_{n,m}\alpha R)}{J'_n(q_{n,m}R)}$.

La fonction $D_{n,\alpha}$ est représentée par la FIG. 1.13 dans le cas étudié ($R = 0.1$, $\alpha = 2$) pour $n = 1$. Les premières racines de $D_{n,\alpha}$ sont données dans le TAB. 1.3.

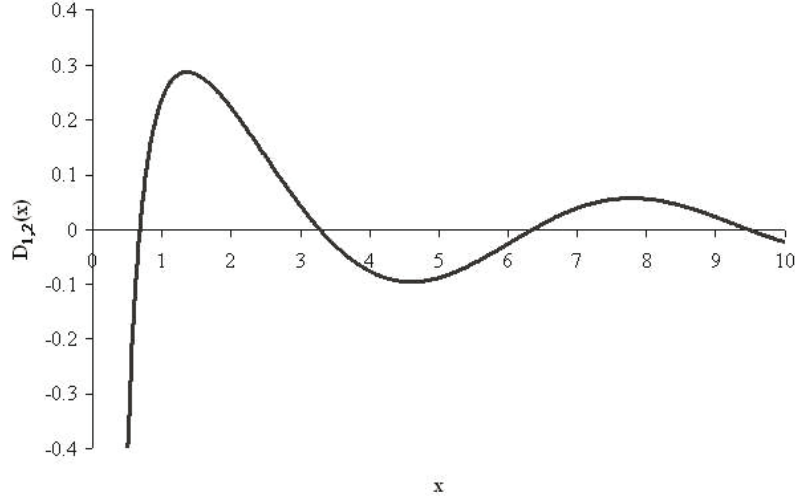


Figure 1.13. Tracé de la fonction $x \mapsto D_{n,\alpha}$ pour $n = 1$ et $\alpha = 2$

m	1	2	3	4
x_m	0.6773360	3.2824712	6.3532112	9.4713290

Tableau 1.3. Premières racines $(x_m)_{m \geq 1}$ de la fonction $D_{1,2}$

1.3.5.2. Discrétisation éléments finis

La formulation faible du problème s'écrit :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \nabla p \nabla \delta p \, r \, dr \, d\theta \, dz - \omega^2 \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{p \delta p}{c^2} \, r \, dr \, d\theta \, dz = 0$$

pour tout champ de pression virtuelle δp , vérifiant les conditions aux limites.

Compte tenu de la symétrie axiale de la géométrie étudiée, on adopte une représentation en série de Fourier de la variable pression. Le développement fait apparaître

les modes de pression symétriques (notés **s**) et anti-symétriques (notés **a**) :

$$p(r, \theta, z, t) = \underbrace{\sum_{s=0}^{s=+\infty} p_s(r, z, t) \cos(s\theta)}_{\text{Modes symétriques}} + \underbrace{\sum_{a=1}^{a=+\infty} p_a(r, z, t) \sin(a\theta)}_{\text{Modes anti-symétriques}} \quad (1.32)$$

Cette représentation permet de ramener l'étude du problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, la dépendance en θ étant décrite par les fonctions trigonométriques $\cos(s\theta)$ et $\sin(a\theta)$. On discrétise alors le problème fluide dans le plan (r, z) , dans lequel le domaine fluide est $[R, R'] \times [0, H]$. Ce domaine est discrétisé avec des éléments finis bi-dimensionnels $[r_m, r_{m+1}] \times [z_n, z_{n+1}]$ avec $(m, n) \in [1, M] \times [1, N]$, de façon à écrire :

$$\int_R^{R'} \int_0^H (\cdot) r dr dz = \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} (\cdot) r dr dz$$

On utilise des éléments finis à quatre nœuds, un degré de liberté par nœud (voir FIG. 1.14).

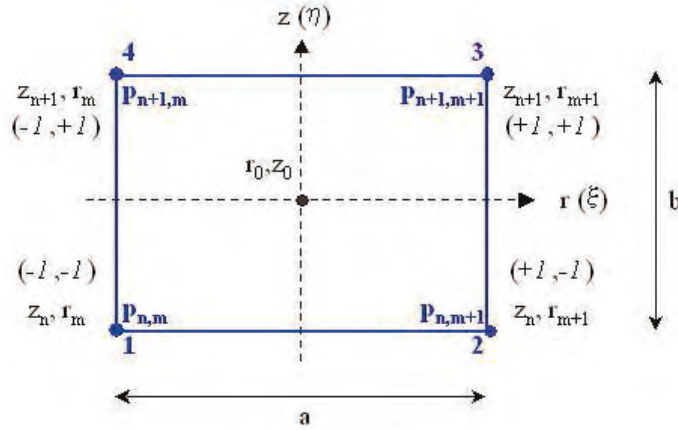


Figure 1.14. Élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)

Les composantes $(p_s)_{s \geq 1}$ du développement (1.32) se calculent sur chaque élément comme :

$$p_s|_{[r_m, r_{m+1}] \times [z_n, z_{n+1}]} = \mathbf{N}_{n,m}^F \mathbf{P}_{n,m}^s, \forall s \geq 1$$

avec :

– $\mathbf{P}_{n,m}^s$ le vecteur des inconnues nodales pour l'élément fluide :

$$\mathbf{P}_{n,m}^s = \langle p_{n,m}^s, p_{n,m+1}^s, p_{n+1,m+1}^s, p_{n+1,m}^s \rangle^T$$

– $\mathbf{N}_{n,m}^F$ le vecteur des fonctions de forme. Les fonctions de forme pour l'élément de dimensions $2a \times 2b$ sont choisies linéaires. En posant $r = r_o + \xi a$, $z = z_o + \eta b$ avec $2a = r_{m+1} - r_m$ et $2b = z_{n+1} - z_n$, la fonction de forme associée au nœud i est :

$$N_i^F(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

avec $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ et $(\xi, \eta) \in [-1, +1] \times [-1, +1]$.

La FIG. 1.15 donne une représentation de la fonction de forme $(\xi, \eta) \mapsto N_1^F(\xi, \eta)$ de l'élément fluide en fonction de l'abscisse et de l'ordonnée locale ξ, η .

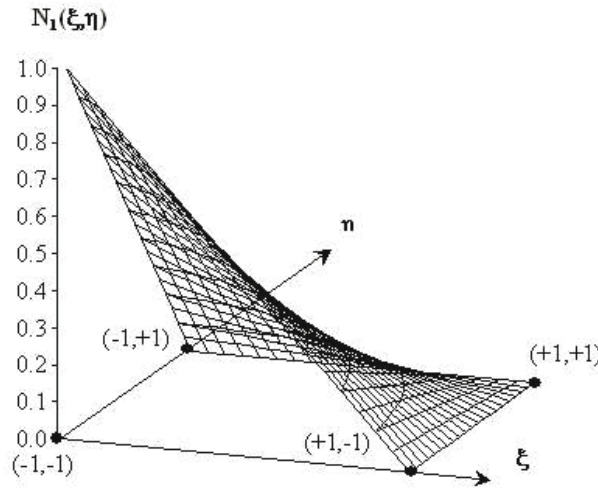


Figure 1.15. Fonction de forme $N_1^F(\xi, \eta)$

On a une relation identique pour les termes de pression anti-symétriques p_a et on utilise des interpolations identiques pour $\delta p_{s,a}$.

On discrétise ainsi les termes de la formulation variationnelle comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{p_s \delta p_s}{c^2} r dr dz &= \delta \mathbf{P}_{n,m}^s T \left(\int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \mathbf{N}_{n,m}^F T \mathbf{N}_{n,m}^F r dr dz \right) \mathbf{P} \\ &= \delta \mathbf{P}^s T \mathbf{\Lambda}_{n,m}^F T \mathbf{m}_F^{n,m} \mathbf{\Lambda}_{n,m}^F \mathbf{P}^s \end{aligned}$$

avec $\mathbf{\Lambda}_{n,m}^F$ la matrice de localisation des degrés de liberté élémentaires $\mathbf{P}_{n,m}^s$ dans l'ensemble des degrés de liberté \mathbf{P}^s du problème. On écrit de même :

$$\begin{aligned} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \nabla p_s \nabla \delta p_s r dr dz &= \delta \mathbf{P}_{n,m}^s T \left(\int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \nabla \mathbf{N}_{n,m}^F T \nabla \mathbf{N}_{n,m}^F r dr dz \right) \mathbf{P} \\ &= \delta \mathbf{P}^s T \mathbf{\Lambda}_{n,m}^F T \mathbf{k}_F^{n,m} \mathbf{\Lambda}_{n,m}^F \mathbf{P}^s \end{aligned}$$

Les matrices \mathbf{M}_F et \mathbf{K}_F sont assemblées à partir des matrices élémentaires \mathbf{m}_S^n et \mathbf{k}_S^n selon les relations :

$$\mathbf{M}_F = \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \Lambda_{n,m}^F{}^T \mathbf{m}_F^{n,m} \Lambda_{n,m}^F \quad \mathbf{K}_F = \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \Lambda_{n,m}^F{}^T \mathbf{k}_F^{n,m} \Lambda_{n,m}^F$$

La numérotation des $(M + 1)(N + 1)$ noeuds du maillage fluide avec $M \times N$ éléments finis est la suivante : un noeud $(m, n) \in [1, M + 1] \times [1, N + 1]$ est repéré par $\mathcal{N}(n, m) = m + (n - 1)M$ dans le vecteur des degrés de liberté du problème. Ainsi, la matrice de localisation $\Lambda_{n,m}^F$ est une matrice de dimension $4 \times (M + 1)(N + 1)$, dont toutes les composantes sont nulles à l'exception des termes $(1, \mathcal{N}(n, m))$, $(2, \mathcal{N}(n, m + 1))$, $(3, \mathcal{N}(n + 1, m))$ et $(4, \mathcal{N}(n + 1, m + 1))$ qui valent 1.

Compte tenu de l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et du développement en série de Fourier (1.32), on calcule $\nabla p_s \nabla \delta p_s$ comme :

$$\nabla p_s \nabla \delta p_s = \frac{\partial p_s}{\partial r} \frac{\partial \delta p_s}{\partial r} + \frac{s^2}{r^2} p_s \delta p_s + \frac{\partial p_s}{\partial z} \frac{\partial \delta p_s}{\partial z}$$

La matrice $\mathbf{k}_F^{n,m}$ comporte ainsi deux termes :

$$\mathbf{k}_F^{n,m} = \mathbf{k}_{F_o}^{n,m} + s^2 \mathbf{k}_{F_s}^{n,m}$$

Les composantes des matrices élémentaires $\mathbf{m}_F^{N,m}$, $\mathbf{k}_{F_o}^{n,m}$ et $\mathbf{k}_{F_s}^{n,m}$ sont définies par :

$$m_F^{n,m}(i,j) = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{1}{c^2} N_{n,m(i)}^F N_{n,m(i)}^F r dr dz$$

$$k_{F_o}^{n,m}(i,j) = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{\partial N_{n,m(i)}^F}{\partial r} \frac{\partial N_{n,m(j)}^F}{\partial r} + \frac{\partial N_{n,m(i)}^F}{\partial z} \frac{\partial N_{n,m(j)}^F}{\partial z} r dr dz$$

$$k_{F_s}^{n,m}(i,j) = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{N_{n,m(i)}^F N_{n,m(j)}^F}{r} dr dz$$

Le calcul des matrices élémentaires est alors donné, après changement de variables sur l'élément de référence, par :

$$m_F(i,j) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{c^2} N_i^F N_j^F a(r_0 + a\xi) d\xi$$

$$k_{F_o}(i,j) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{a^2} \frac{\partial N_i^F}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^F}{\partial \xi} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial N_i^F}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^F}{\partial \eta} (r_0 + a\xi) ab d\xi d\eta$$

$$k_{F_s(i,j)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^F N_j^F \frac{ab}{r_0 + a\xi} d\xi d\eta$$

où l'on a simplifié les notations en ne faisant pas référence à l'élément fluide avec les indices n, m .

Les matrices élémentaires peuvent être calculées analytiquement [SIG 04a]; les composantes (i, j) sont données explicitement par :

$$m_{(i,j)}^F = \frac{ab}{4c^2} \left[r_0 + \frac{\xi_i \xi_j r_0}{3} + \frac{a}{3} (\xi_i + \xi_j) \right] \left[1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right] \quad (1.33)$$

$$k_o^F(i,j) = abr_0 \left[\frac{\xi_i \xi_j}{4a^2} \left(1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right) + \frac{\eta_i \eta_j}{4b^2} \left(1 + \frac{\xi_i \xi_j}{3} \right) \right] + \frac{a^2}{12b} \eta_i \eta_j (\xi_i + \xi_j) \quad (1.34)$$

$$k_s^F(i,j) = \frac{b}{8} \left[2(\xi_i + \xi_j) - \frac{2r_0}{a} \xi_i \xi_j + \left(1 - \frac{r_0}{a} (\xi_i + \xi_j) + \frac{r_0^2}{a^2} \xi_i \xi_j \right) \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \left[1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right] \quad (1.35)$$

Après assemblage des matrices globales de masse et de raideur, on formule le problème aux valeurs propres pour le problème fluide acoustique comme :

$$(\mathbf{K}_{F_o} + s^2 \mathbf{K}_{F_s} - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{P}^s(\omega) = \mathbf{0} \quad \forall s \geq 0$$

et un système identique en a , $\forall a \geq 1$. Le problème s'écrit sous la forme générale :

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.36)$$

La structure des matrices \mathbf{M}_F et \mathbf{K}_F pour le maillage proposé est donnée par la FIG. 1.16 qui met en évidence les composantes non nulles des matrices.

1.3.5.3. Calcul des modes propres et des fréquences propres

La méthode détaillée au paragraphe précédent est mise en oeuvre à titre d'exemple avec MATLAB. Le code développé permet le calcul et l'assemblage des matrices élémentaires à partir des expressions analytiques précédentes et la recherche des éléments propres avec la fonction **eig**.

Le TAB. 1.4 compare les fréquences propres calculées avec la méthode éléments finis avec la solution analytique exposée ci-dessus. Les calculs sont réalisés avec un maillage $M \times N = 30 \times 20$. Les modes propres étudiés correspondent aux modes de Fourier symétriques d'ordre un ($s = 1$). La précision du calcul est très bonne, les écarts constatés entre le modèle analytique et le calcul numérique sont inférieurs à 1% pour les premières fréquences calculées.

Les modes propres sont représentés en iso-valeurs de pression dans le plan $(r, \theta = 0, z)$ par la FIG. 1.17, leur allure est conforme à l'expression analytique (1.31).

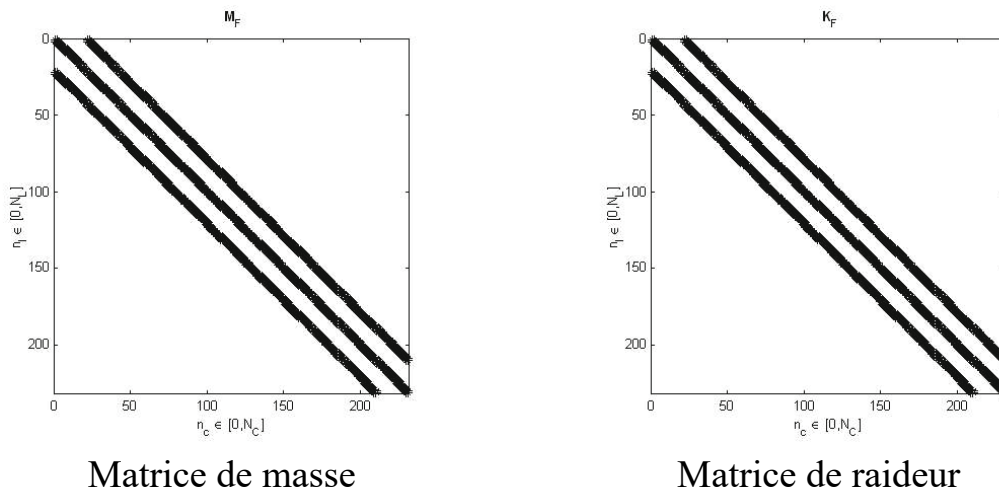


Figure 1.16. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème fluide acoustique

Fréquence	Solution analytique	Calcul numérique
f_1	1617 Hz	1617 Hz
f_2	1782 Hz	1782 Hz
f_3	2205 Hz	2205 Hz
f_4	2770 Hz	2770 Hz

Tableau 1.4. Fréquences propres analytique et numérique pour la cavité acoustique axi-symétrique

1.3.6. Exemple n°3 : modes de ballonnement d'un réservoir cylindrique

On propose dans ce paragraphe un second exemple d'application de la méthode des éléments finis pour le calcul des modes propres de ballonnement d'un fluide contenu dans une cavité à symétrie de révolution. On commence par établir les équations continues du problème, puis on donne la solution analytique au problème posé et on termine par la mise en oeuvre de la méthode numérique en utilisant les éléments finis axi-symétriques présentés dans le paragraphe précédent.

1.3.6.1. Définition du problème, équations continues et solution analytique

On considère le problème fluide décrit par la FIG. 1.18 : il s'agit de calculer les modes de ballonnement d'un fluide incompressible contenu dans un réservoir axi-symétrique. Les dimensions géométriques et physique du problème étudié sont les suivantes : $R = 0.1$ m, $R' = 0.2$ m, $H = 0.75$ m ; l'accélération de la pesanteur est $g = 9.81$ m/s².

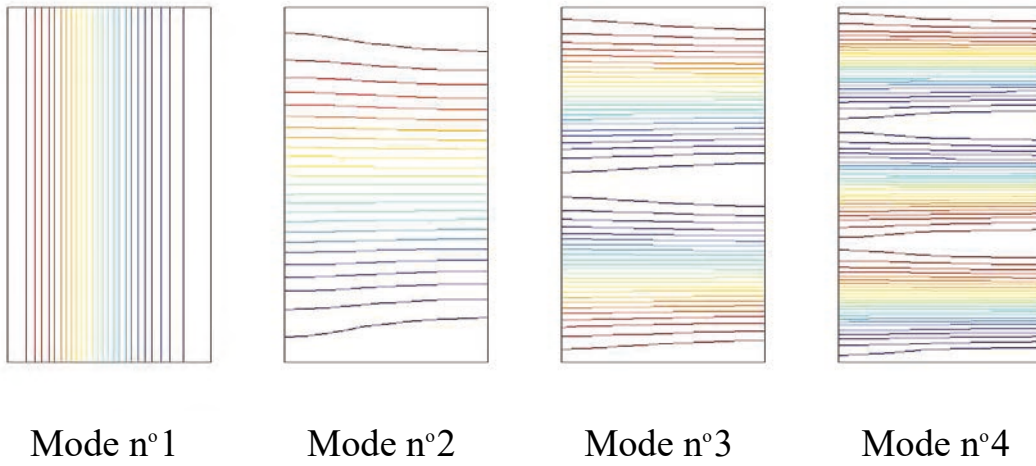


Figure 1.17. Modes propres acoustiques en pression $p(r, z)$ dans le plan $\theta = 0$

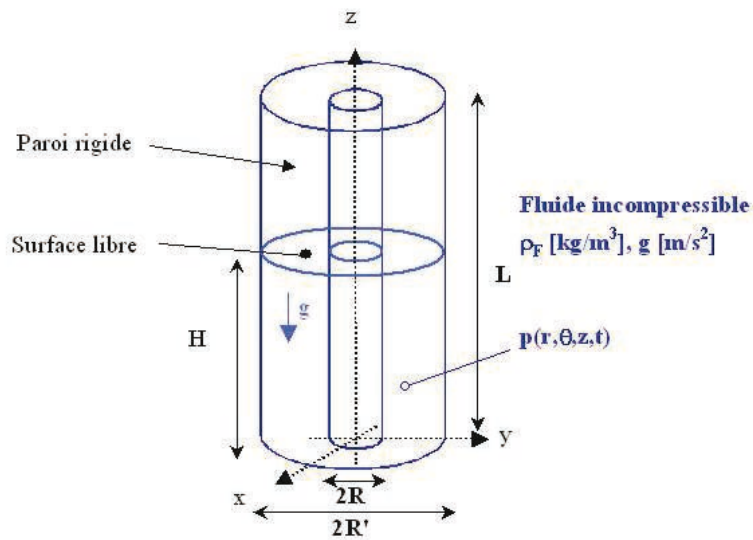


Figure 1.18. Réservoir fluide axi-symétrique

Les équations du problème sont les suivantes [GIB 86] :

$$\Delta p = 0 \text{ pour } (r, \theta, z) \in [R, R'] \times [0, 2\pi] \times [0, H] \quad (1.37)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = 0 \quad (1.38)$$

et la condition de surface libre :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=H} = \frac{\omega^2}{g} p|_{z=H} \quad (1.39)$$

Comme dans le cas précédent, on recherche une solution sous la forme $p(r, \theta, z, t) = p_R(r) \cos(n\theta) p_Z(z)$. En reportant dans l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques, et en séparant les fonctions p_R et p_Z , on montre que ces fonctions vérifient :

$$\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - q^2 \right) p_R = 0 \quad \frac{d^2 p_Z}{dz^2} = -q^2 p_Z$$

avec q réel donné. En prenant en compte les conditions aux limites homogènes, on montre que p_R et p_Z sont respectivement de la forme :

$$p_Z(z) = \cosh(qz) \quad p_R(r) = \alpha_n J_n(qr) + \beta_n Y_n(qr)$$

où α_n, β_n sont des constantes réelles qui vérifient les conditions du système (1.29). On montre que les conditions aux limites sur les parois $r = R, R'$ sont vérifiées lorsque qR est racine de $D_{\alpha, n}$, définie au paragraphe précédent. Si $q_{n, m} R$ désigne la $m^{\text{ième}}$ racine de $D_{\alpha, n}$, en exprimant la condition aux limites en $z = H$, on a :

$$q_{n, m} \cosh(q_{n, m} H) = \frac{\omega^2}{g} \sinh(q_{n, m} H)$$

On déduit ainsi que les pulsations propres sont données par :

$$\omega_{n, m} = \sqrt{g q_{n, m} \times \tanh(q_{n, m} H)} \quad (1.40)$$

Le mode propre en pression correspondant est alors :

$$p_{n, m}(r, \theta, z) = (\pi_n J_n(q_{n, m} r) - Y_n(q_{n, m} r)) \cos(n\theta) \cosh(q_{n, m} z) \quad (1.41)$$

avec π_n défini au paragraphe précédent.

1.3.6.2. Discrétisation éléments finis

La résolution numérique du problème avec une méthode éléments finis est conduite de façon identique au cas acoustique étudié précédemment. On commence par écrire la formulation variationnelle du problème ; dans le cas présent, la formulation faible est :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \nabla p \nabla \delta p r dr d\theta dz - \omega^2 \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} p(r, \theta, H) \delta p(r, \theta, H) r dr d\theta = 0$$

pour tout champ de pression virtuelle δp . La discrétisation de cette expression utilise les éléments fluide axi-symétriques présentés dans le paragraphe précédent. Le terme :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \nabla p \nabla \delta p r dr d\theta dz$$

est discrétisé avec la matrice de raideur \mathbf{K}_F . La discrétisation du terme :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} p(r, \theta, H) \delta p(r, \theta, H) r dr d\theta$$

est ramenée dans le plan (r, z) en utilisant la représentation en série de Fourier de p :

$$\int_R^{R'} \frac{1}{g} p(r, H) \delta p(r, H) r dr = \sum_{m=1}^{m=M} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{1}{g} p(r, H) \delta p(r, H) r dr$$

Les termes élémentaires sont discrétisés comme :

$$\int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{1}{g} p(r, H) \delta p(r, H) r dr = \delta \mathbf{P}^s T \mathbf{\Lambda}_{N,m}^F T \mathbf{m}'_F{}^{N,m} \mathbf{\Lambda}_{N,m}^F \mathbf{P}^s$$

pour les modes symétriques $s \geq 1$. Cette expression définit une matrice élémentaire $\mathbf{m}'_F{}^{N,m}$ sur tout élément fini fluide ayant une frontière sur la surface libre (*i.e.* dans le cas étudié, les éléments (N, m) avec $m \in [1, M]$). Les matrices sont assemblées de façon à définir une matrice \mathbf{M}'_F :

$$\mathbf{M}'_F = \sum_{m=1}^{m=M} \mathbf{\Lambda}_{N,m}^F T \mathbf{m}'_F{}^{N,m} \mathbf{\Lambda}_{n,m}^F$$

Les composantes (i, j) de la matrice de masse élémentaire se calculent sur l'élément de référence comme :

$$m'_{F(i,j)} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{g} N_i^F|_{\eta=1} N_j^F|_{\eta=1} a(r_0 + a\xi) d\xi$$

On obtient l'expression analytique suivante [SIG 04b] :

$$m'_{F(i,j)} = \frac{a}{8g} \left[r_0 + \frac{\xi_i \xi_j r_0}{3} + \frac{a}{3} (\xi_i + \xi_j) \right] [(1 + \eta_i)(1 + \eta_j)] \quad (1.42)$$

Le problème fluide s'écrit ainsi sous la forme :

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}'_F) \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{0}$$

Après condensation des degrés de liberté fluide de la surface libre (voir paragraphe 1.3.4.2), on écrit le problème aux valeurs propres sous la forme donnée par (1.26), soit :

$$\left((\mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}) - \omega^2 \mathbf{M}_F^o \right) \mathbf{P}_o(\omega) = \mathbf{0}$$

La matrice de masse du problème fluide est une matrice bande, la matrice de raideur est une matrice pleine, comme le montre la FIG. 1.19.

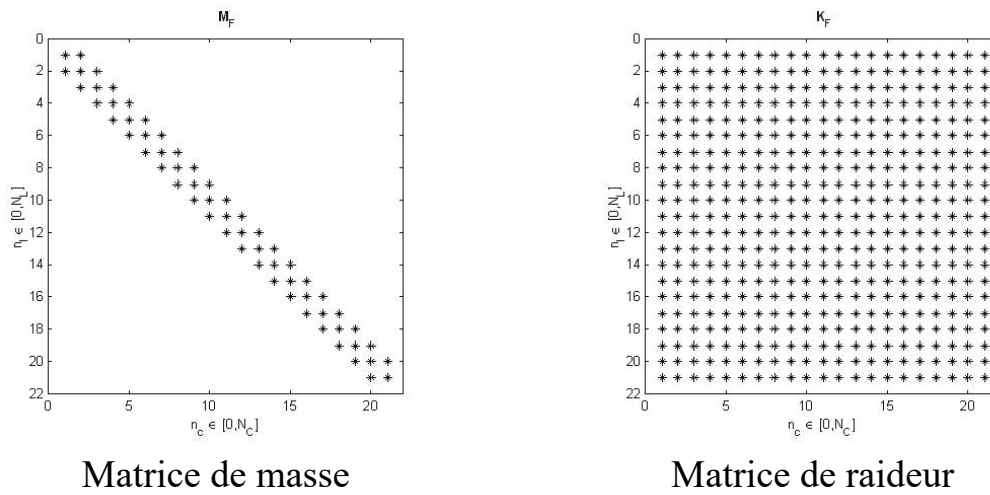


Figure 1.19. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème fluide de ballonnement

1.3.6.3. Calcul des modes propres et des fréquences propres

On met en oeuvre la méthode avec MATLAB. Le TAB. 1.5 compare les fréquences propres calculées avec la méthode éléments finis avec la solution analytique exposée ci-dessus. Les modes propres étudiés correspondent aux modes de Fourier symétriques d'ordre un ($s = 1$). La première fréquence propre est calculée avec une très bonne précision par rapport au modèle analytique. Les fréquences propres suivantes sont très proches du modèle analytique, avec une précision qui se dégrade un peu lorsque l'on monte en fréquence.

Fréquence	Solution analytique	Calcul éléments finis
f_1	1.2973 Hz	1.2978 Hz
f_2	2.8560 Hz	2.8822 Hz
f_3	3.9733 Hz	4.1066 Hz
f_4	4.8513 Hz	5.1906 Hz

Tableau 1.5. Fréquences propres analytiques et numérique pour le réservoir fluide axi-symétrique

La FIG. 1.20 donne une représentation des quatre premiers modes propres en iso-valeurs de pression dans le plan $(r, \theta = 0, z)$. L'allure des modes est conforme à l'expression analytique donnée par l'équation (1.41).

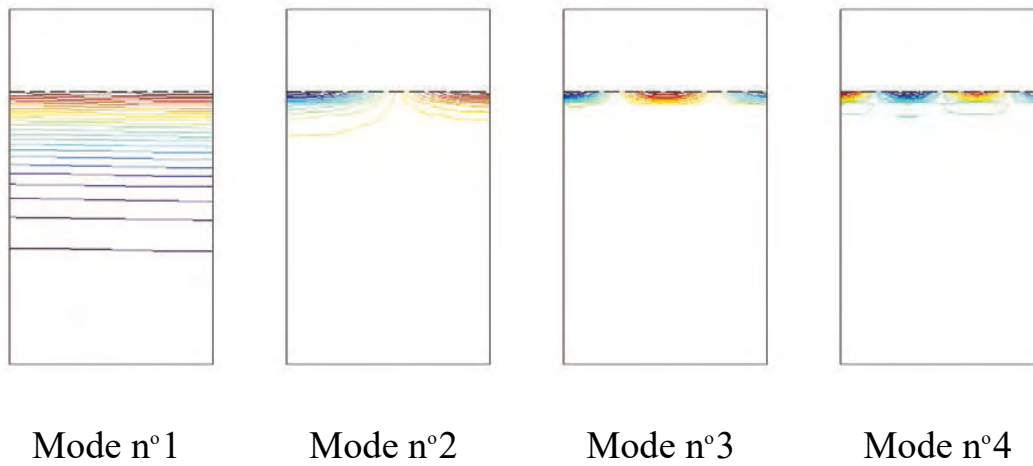


Figure 1.20. Modes propres de ballottement en pression $p(r, z)$ dans le plan $\theta = 0$

1.4. Méthode éléments finis pour l'analyse vibratoire d'une structure couplée avec un fluide incompressible

On s'intéresse dans ce paragraphe à la description des vibrations linéaires d'une structure couplée avec un fluide *incompressible*. On commence par rappeler les équations décrivant le problème couplé, les termes de couplage traduisant l'action du fluide sur la structure (effort de pression imposé au niveau de l'interface fluide/structure) et l'action de la structure sur le fluide (accélération normale imposée au niveau de l'interface fluide/structure).

On expose ensuite la méthode de résolution éléments finis du problème, utilisant un couplage entre la discrétisation éléments finis de la structure (telle que décrite au paragraphe 1.2) et la discrétisation éléments finis du problème fluide (telle que décrite au paragraphe 1.3). La discrétisation des termes de couplage conduit à la définition d'un opérateur de couplage fluide/structure, puis d'un opérateur de masse ajoutée.

L'effet du fluide sur la structure étant purement inertiel, on montre ainsi que le problème peut être formulé du point de vue de la structure sans introduire de degrés de liberté supplémentaires, ce que l'on illustre sur un cas élémentaire.

1.4.1. Contexte d'étude et hypothèses générales

Le problème étudié est celui d'une structure élastique linéaire couplée avec un fluide incompressible, la situation étant décrite par la FIG. 1.21.

La structure occupe le domaine Ω_S , de frontière $\partial\Omega_S$; le fluide occupe le domaine Ω_F , de frontière $\partial\Omega_F$. Les deux domaines sont en contact sur $\Gamma = \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F$.

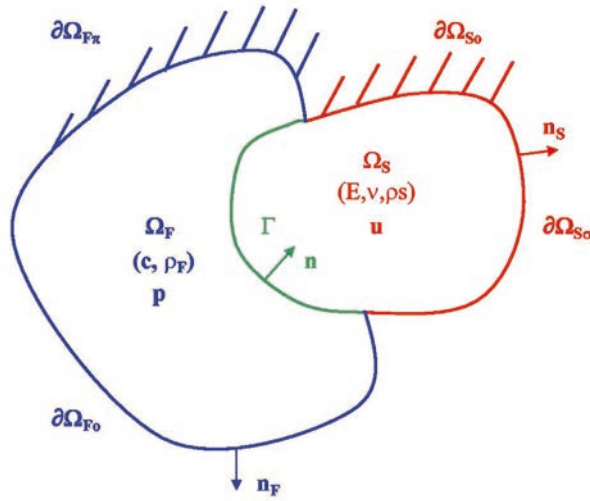


Figure 1.21. Schématisation générale du problème fluide/structure

Les éléments de frontière $\partial\Omega_{S0}$, $\partial\Omega_{S\sigma}$, $\partial\Omega_{F0}$ et $\partial\Omega_{F\pi}$ désignent respectivement, comme dans les paragraphes précédents, les portions de frontière du domaine structure à déplacement imposé, à effort imposé, et les portions de frontière du domaine fluide à pression et gradient normal de pression imposé.

On se place dans le cadre des hypothèses faites dans les paragraphes 1.2 et 1.3 (comportement linéaire en petites transformations de la structure et du fluide). Sans perte de généralité, on suppose que les grandeurs imposées (déplacement, pression, etc..) sur la structure et le fluide sont nulles.

1.4.2. Formulation forte et formulation faible du problème fluide/structure

En se plaçant dans le cadre défini précédemment, on écrit les équations continues du problèmes couplé comme suit.

Problème structure Le problème structure est formulé en *déplacement* et est décrit par les équations de l'élasticité linéaire (voir paragraphe 1.2) :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} &= 0 \text{ dans } \Omega_S \\ u_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o} \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \end{aligned}$$

Problème fluide Le problème fluide est formulé en *pression* et est décrit par les équations d'écoulement potentiel (voir paragraphe 1.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} &= 0 \text{ dans } \Omega_F \\ p &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_o} \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \end{aligned}$$

Couplage des problèmes Le couplage des deux problèmes est modélisé par les équations suivantes qui expriment la *continuité des composantes normales du tenseur des contraintes et du champ d'accélération* à l'interface fluide/structure :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = p n_i \text{ sur } \Gamma \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = \omega^2 \rho_F u_j n_j \text{ sur } \Gamma \quad (1.44)$$

La relation (1.43) traduit le fait que le fluide exerce des efforts de pression sur la structure au niveau de l'interface fluide/structure, dans la direction normale à l'interface. La relation (1.44) traduit le fait que la structure impose une accélération au fluide au niveau de l'interface fluide/structure, dans la direction normale à l'interface (voir paragraphe 1.3.1).

La formulation variationnelle du problème est obtenue en utilisant la méthode des fonctions test. Elle s'obtient alors pour tout champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ et tout champ de pression virtuelle δp vérifiant les conditions aux limites homogènes (déplacement et pression imposés nuls sur $\partial\Omega_{S_o}$ et $\partial\Omega_{F_o}$) en multipliant les équations

locales structure et fluide par $\delta \mathbf{u}$ et δp et en intégrant par partie sur les domaines Ω_S et Ω_F . On écrit ainsi :

$$\int_{\Omega_S} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i d\mathcal{V} = \int_{\Gamma} p n_i \delta u_i d\mathcal{S} \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1.45)$$

pour la structure et :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} d\mathcal{V} = -\rho_F \omega^2 \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p d\mathcal{S} \quad \forall \delta p \quad (1.46)$$

pour le fluide.

1.4.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

La discrétisation de la formulation faible du problème couplé donnée par les équations (1.45) et (1.46) est réalisée avec la méthode des éléments finis pour les deux problèmes fluide et structure, suivant les principes exposés aux paragraphes 1.2 et 1.3. Le domaine structure Ω_S est discrétisé avec E_s éléments finis structure, soit

$\Omega_S \sim \bigcup_{e_s=1}^{e_s=E_s} \Omega_{S e_s}$ et le domaine fluide est discrétisé avec E_f éléments finis fluide, soit $\Omega_F \sim \bigcup_{e_f=1}^{e_f=E_f} \Omega_{F e_f}$.

L'interface fluide/structure Γ est la surface commune entre les frontières des domaines fluide et structure $\partial\Omega_S$ et $\partial\Omega_F$; au niveau de l'interface, on supposera que les maillages fluide et structure coïncident, de sorte que Γ est composée de E surfaces élémentaires $\Gamma \sim \bigcup_{e=1}^{e=E} \Gamma_e$, telles que Γ_e soit une surface commune entre deux éléments fluide et structure, *i.e.* $\Gamma_e = \Omega_{S e} \cap \Omega_{F e}$.

Les équations (1.45) et (1.46) font apparaître les termes de masse et de raideur des problèmes fluide et structure, dont la discrétisation avec la méthode éléments finis a été présentée dans les paragraphes précédents. On rappelle que ces termes se discrétisent comme :

$$\int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i d\mathcal{V} \rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_S \mathbf{U} \quad (1.47)$$

$$\int_{\Omega_S} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V} \rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{U} \quad (1.48)$$

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} d\mathcal{V} \rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_F \mathbf{P} \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

avec \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S les matrices de masse et de raideur de la structure et \mathbf{K}_F la matrice de raideur du fluide.

La formulation variationnelle du problème couplé fait apparaître les termes de couplage suivants :

$$\int_{\Gamma} p n_i \delta u_i dS \quad - \quad \rho_F \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p dS$$

calculés au niveau de l'interface fluide/structure. Le premier terme correspond à l'action du fluide sur la structure, le second correspond à l'action de la structure sur le fluide.

La discrétisation du premier terme de couplage est écrite :

$$\int_{\Gamma} p n_i \delta u_i dS \sim \sum_{e=1}^{e=E} \int_{\Gamma_e} p n_i \delta u_i dS_e$$

Les relations suivantes sont écrites pour les éléments finis Ω_{S_e} et Ω_{F_e} en vis-à-vis au niveau de l'interface :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_S^e \mathbf{U}_e \quad p = \mathbf{N}_F^e \mathbf{P}_e$$

et on a des relations identiques pour les champs p et $\delta \mathbf{u}$. On calcule ainsi le terme élémentaire de couplage comme :

$$\int_{\Gamma_e} p n_i \delta u_i dS_e = \delta \mathbf{U}_e \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_S^{eT} \mathbf{n} \mathbf{N}_F^e dS_e \right) \mathbf{P}_e$$

et on définit ainsi la matrice élémentaire de couplage fluide/structure \mathbf{r}_e , calculée sur Γ_e selon :

$$\mathbf{r}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_S^{eT} \mathbf{n} \mathbf{N}_F^e dS_e \quad (1.51)$$

où \mathbf{n} représente la normale à l'interface, orientée vers l'*extérieur* pour le domaine fluide et vers l'*intérieur* pour le domaine structure.

La discrétisation du terme décrivant l'action du fluide sur la structure s'écrit alors :

$$\int_{\Gamma} p n_i \delta u_i dS \rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{P}$$

où \mathbf{R} est la *matrice de couplage fluide/structure*, assemblée selon la relation :

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{e=E} \Lambda_S^{eT} \mathbf{r}_e \Lambda_S^e \quad (1.52)$$

De même, la discrétisation du terme décrivant l'action de la structure sur le fluide est écrite :

$$-\rho_F \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p dS \rightarrow -\rho_F \delta \mathbf{P}^T \mathbf{R}^T \mathbf{U}$$

où \mathbf{R}^T est la matrice transposée de la matrice \mathbf{R} .

1.4.4. Formulation discrète du problème aux valeurs propres fluide/structure

Après assemblage des matrices de masse, raideur et de couplage élémentaires, on écrit les formulations variationnelles (1.45) et (1.46) sous forme discrète :

$$-\omega^2 \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_S \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{P} \quad \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_F \mathbf{P} = \omega^2 \rho_F \delta \mathbf{P}^T \mathbf{R}^T \mathbf{U}$$

vérifiées pour tout $\delta \mathbf{U}$ et $\delta \mathbf{P}$. On déduit ainsi les équations fréquentielles suivantes :

$$-\omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{U} + \mathbf{K}_S \mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{P}$$

pour le problème structure et :

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P} = \omega^2 \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{U}$$

pour le problème fluide.

Après élimination de la variable \mathbf{P} dans l'équation structure grâce à l'équation fluide, on peut formuler le problème structure couplée avec un fluide incompressible uniquement avec les degrés de liberté en déplacement :

$$-\omega^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.53)$$

L'étude du problème structure couplée avec un fluide incompressible est ainsi conduite sans introduire de degrés de liberté supplémentaire [AXI 01], en prenant en compte les effets de la présence du fluide avec l'opérateur de masse ajoutée \mathbf{M}_H défini par :

$$\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T \quad (1.54)$$

La matrice \mathbf{M}_H est symétrique, définie, positive [CON 94]. Elle traduit l'action du fluide incompressible sur la structure en mouvement au contact du fluide. La vibration de la structure engendre un champ de pression dans le fluide, résultant des mouvements imposés par la structure sur le fluide au niveau de leur interface. Le fluide étant incompressible, ces effets se font ressentir *partout* et de façon *instantanée* dans le domaine fluide. En réponse au mouvement, le fluide exerce un effort de pression sur la structure. Les efforts exercés par le fluide sur la structure sont directement liés à la cause qui les produisent (*i.e.* le mouvement de la structure) et sont donc purement

inertiels, c'est-à-dire décrit par un terme de masse. L'effort exercé par le fluide sur la structure est proportionnel à l'accélération de la structure et s'écrit :

$$\mathbf{F} = \omega^2 \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{M}_H \mathbf{U}$$

Le problème aux valeurs propres (modes propres de vibration de la structure couplée avec un fluide incompressible) est formulé comme :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) - \omega^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.55)$$

1.4.5. Exemple n°4 : poutre élastique couplée avec un fluide contenu dans une cavité cylindrique

1.4.5.1. Définition du problème et équations continues

Le problème étudié est représenté par la FIG. 1.22. On souhaite calculer les modes propres de flexion d'une poutre droite de section circulaire de rayon R , d'épaisseur e , de longueur L , encastée à une extrémité (en $z = 0$) et libre à l'autre (en $z = L$), couplée avec un fluide contenu dans une cavité rigide cylindrique de rayon R' et remplissant partiellement la cavité (la hauteur de remplissage est notée $H \leq L$). Les caractéristiques physiques et géométriques du système sont $R = 0.1$ m, $e = 0.02$ m, $L = 1$ m, $\rho_S = 7800$ kg/m³, $E = 6.04 \times 10^8$ Pa, $R' = 0.2$ m, $H = 0.75$ m et $\rho_F = 1000$ kg/m³. L'inertie et la section de la poutre sont notés respectivement I et S . On utilisera dans la suite les nombres sans dimension suivants, afin de caractériser différents aspects de l'interaction fluide/structure pour le cas étudié :

- ratio de confinement $\alpha = \frac{R'}{R}$;
- ratio d'allongement $\eta = \frac{R}{L}$;
- ratio de remplissage $\lambda = \frac{H}{L}$;
- ratio d'épaisseur $\varepsilon = \frac{e}{R}$;
- nombre de masse : $\mu = \frac{\rho_S}{\rho_F}$.

Les équations du problème couplé sont alors les suivantes [SIG 04a] :

– problème structure

$$-\omega^2 \rho_S S v + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = - \int_0^{2\pi} p|_{r=R} R \cos \theta d\theta \text{ pour } z \in [0, L] \quad (1.56)$$

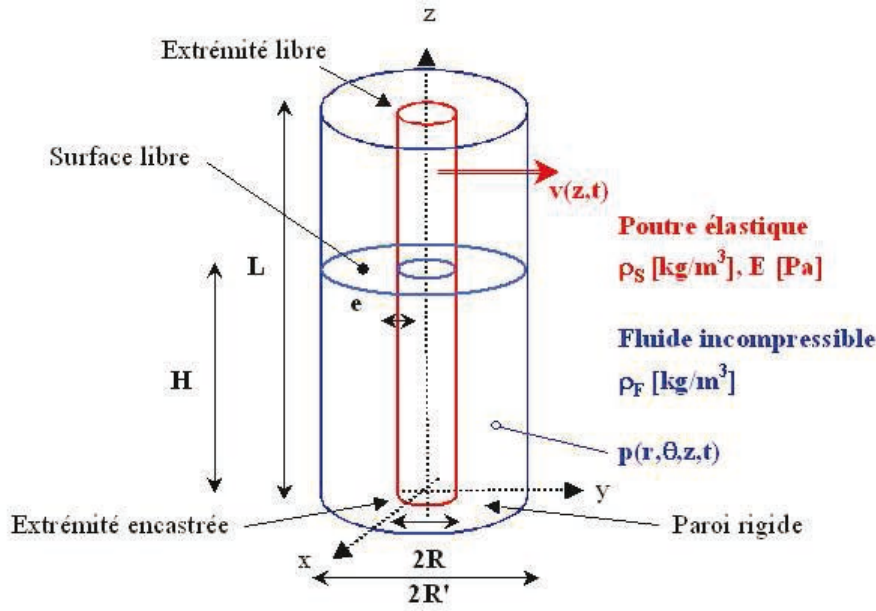


Figure 1.22. Poutre élastique couplée avec un fluide incompressible avec surface libre sans ballotement

avec les conditions aux limites :

$$v|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z=L} = 0 \quad (1.57)$$

– problème fluide

$$\Delta p = 0 \text{ pour } (r, \theta, z) \in [R, R'] \times [0, 2\pi] \times [0, H] \quad (1.58)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad p|_{z=H} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = \rho_F \omega^2 v \cos \theta \quad (1.59)$$

1.4.5.2. Solution analytique

Pour établir la solution analytique au problème posé, on commence par étudier le problème représenté par la FIG. 1.23. Soient deux cylindres co-axiaux de rayons respectifs R_1 et R_2 et de hauteur commune L , soumis respectivement à une accélération $\gamma_1(z, t)$ et $\gamma_2(z, t)$ dans une direction transversale. L'intérieur des cylindres contient un fluide parfait incompressible, présentant une surface libre en $z = H \leq L$ (sans effets de ballotement).

Le problème fluide est décrit par l'équation $\Delta p = 0$ avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad p|_{z=H} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R_i} = -\rho_F \gamma_i \cos \theta \quad i = 1, 2$$

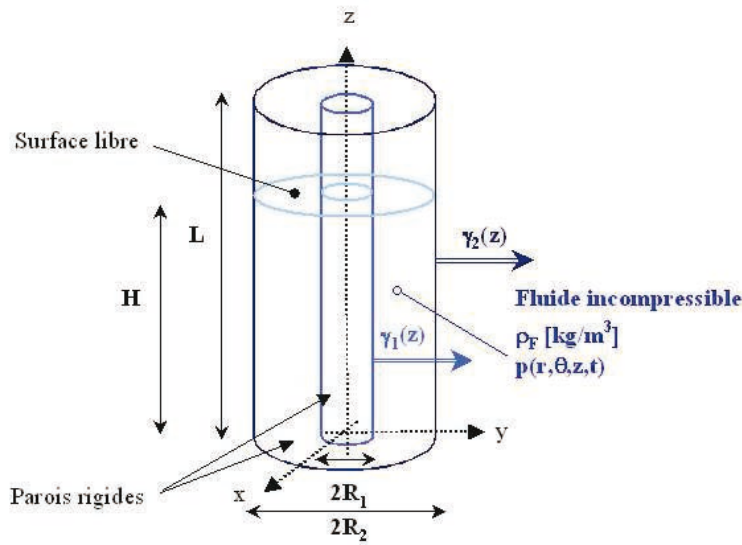


Figure 1.23. *Fluide tridimensionnel axi-symétrique avec surface libre soumis à une accélération*

On recherche une solution au problème sous la forme $p(r, \theta, z) = p_R(r)p_Z(z) \cos \theta$. En reportant cette expression dans l'équation du fluide incompressible, on obtient :

$$p_Z \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} p_R p_Z + p_R \frac{d^2 p_Z}{dz^2} = 0$$

Compte tenu de la dépendance en r de p_R et de la dépendance en z de p_Z , ces fonctions doivent vérifier :

$$-\frac{1}{p_Z} \frac{d^2 p_Z}{dz^2} = k \quad \frac{1}{p_R} \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} - \frac{p_R}{r^2} \right) = k$$

où k est une constante. Selon le signe de k , on détermine plusieurs solutions élémentaires ; on montre [SIG 04a] que la solution compatible avec les conditions aux limites correspond à $k > 0$, soit $k = q^2$. p_Z est alors de la forme $p_Z(z) = \alpha \cos(qz) + \beta \sin(qz)$. L'expression des conditions aux limites homogènes en $z = 0, H$ permet de montrer que $\beta = 0$ et que q prend des valeurs discrètes, $q_l = \frac{(2l-1)\pi}{2H}, \forall l \geq 1$. p_R est alors solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} - \left(q_l^2 + \frac{1}{r^2} \right) p_R = 0$$

p_R s'écrit ainsi $p_R = \alpha_l I(q_l r) + \beta_l K(q_l r)$, avec I et K les fonctions de Bessel modifiées de première et de seconde espèce d'ordre un [?]. La solution p correspondante est alors :

$$p(r, \theta, z) = [\alpha_l I(q_l r) + \beta_l K(q_l r)] \cos(q_l z) \cos \theta$$

Les solutions au problème fluide avec les conditions aux limites homogènes sont donc de la forme :

$$p(r, \theta, z) = \left(\sum_{l=1}^{l=+\infty} [\alpha_l A_l(r) + \beta_l B_l(r)] \cos(q_l z) \right) \cos \theta$$

en ayant posé $A_l(r) = I(q_l r)$ et $B_l(r) = K(q_l r)$. L'expression des conditions aux limites en $r = R_i$ permet de déterminer de façon unique la solution au problème posé. Les équations de couplage sur les parois s'écrivent :

$$\sum_{l=1}^{l=+\infty} q_l (\alpha_l A_{i,l} + \beta_l B_{i,l}) \cos(q_l z) = -\rho_F \gamma_i \quad \forall i$$

en ayant posé $A_{i,l} = A'_l(R_i)$ et $B_{i,l} = B'_l(R_i)$. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, on formule $\forall l \geq 1$ le système suivant :

$$\alpha_l A_{i,l} + \beta_l B_{i,l} = -\frac{\rho_F}{q_l h_l} \int_0^H \gamma_i(z) \cos(q_l z) dz \quad \forall i$$

en ayant posé $h_l = H/2, \forall l \geq 1$. La résolution du système précédent permet de trouver les constantes α_l et β_l :

$$\begin{aligned} \alpha_l &= a_{1,l} \int_0^H \gamma_1(z) \cos(q_l z) dz + a_{2,l} \int_0^H \gamma_2(z) \cos(q_l z) dz \\ \beta_l &= b_{1,l} \int_0^H \gamma_1(z) \cos(q_l z) dz + b_{2,l} \int_0^H \gamma_2(z) \cos(q_l z) dz \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{1,l} &= -\frac{\rho_F B_{2,l}}{D_l h_l} & a_{2,l} &= \frac{\rho_F B_{1,l}}{D_l h_l} \\ b_{1,l} &= \frac{\rho_F A_{2,l}}{D_l h_l} & b_{2,l} &= -\frac{\rho_F A_{1,l}}{D_l h_l} \end{aligned}$$

et $D_l = A_{1,l} B_{2,l} - A_{2,l} B_{1,l}$. La solution p s'écrit alors :

$$p(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\sum_{i=1,2} \Pi_{i,l}(r) \int_0^H \gamma_i(\zeta) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) \cos \theta \quad (1.60)$$

en posant $\Pi_{i,l}(r) = a_{i,l} A_l(r) + b_{i,l} B_l(r)$ pour $i = 1, 2$.

On peut maintenant établir la solution au problème couplé étudié, en partant de l'expression du champ de pression (1.60), et en posant $\gamma_1 = \rho_F \omega^2 v \cos \theta$ et $\gamma_2 = 0$, $R_1 = R$ et $R_2 = \alpha R$. Le problème aux valeurs propres pour la poutre couplée avec le fluide est alors :

$$-\omega^2 \rho_S S v + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \rho_F \omega^2 \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\pi_l \int_0^H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\zeta, t) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) \cdot (z \leq H)$$

avec $\pi_l = \Pi_{1,l}(R)$. Le problème est ainsi formulé du point de vue de la structure, l'effet du fluide est pris en compte dans le terme d'effort au second membre de l'équation.

1.4.5.3. Discrétisation éléments finis

La résolution du problème couplé peut être conduite avec une méthode éléments finis. Pour ce faire, on utilise un couplage entre :

- des éléments finis poutre à deux noeuds, deux degrés de liberté par noeud permettant par maillage de l'intervalle $[0, L]$ la résolution du problème structure (voir paragraphe 1.2.5) ;

- des éléments finis fluide axi-symétrique en série de Fourier à quatre noeuds, un degré de liberté par noeud permettant par maillage du pavé $[R, R'] \times [0, H]$ la résolution du problème fluide (voir paragraphe 1.3.5).

Le principe du maillage du problème dans le plan (r, z) est schématisé par la FIG. 1.24 : on utilise un maillage à N éléments finis de la poutre et un maillage à $M \times N_o$ éléments finis du fluide, avec $N_o/N = H/L$.

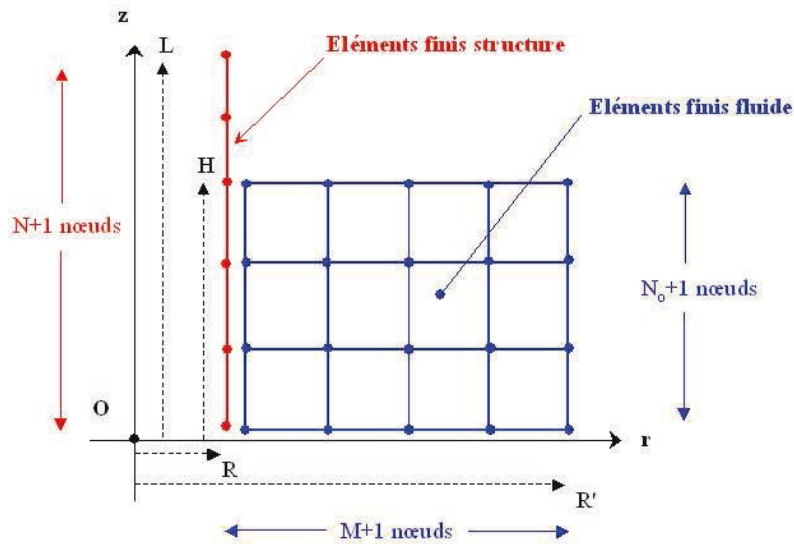


Figure 1.24. Principe de maillage du problème couplé dans le plan (r, z)

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz - \omega^2 \int_0^L \rho_S S v \delta v dz = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p|_{r=R} \delta v R \cos \theta d\theta$$

pour le problème structure et :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \nabla p \nabla \delta p r dr d\theta dz = -\rho_F \omega^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} v \delta p|_{r=R} R \cos \theta d\theta$$

Les termes purement structure et fluide sont discrétisés à l'aide des opérateurs \mathbf{M}_S , \mathbf{K}_S et \mathbf{K}_F définis dans les paragraphes 1.2.5 et 1.3.5.

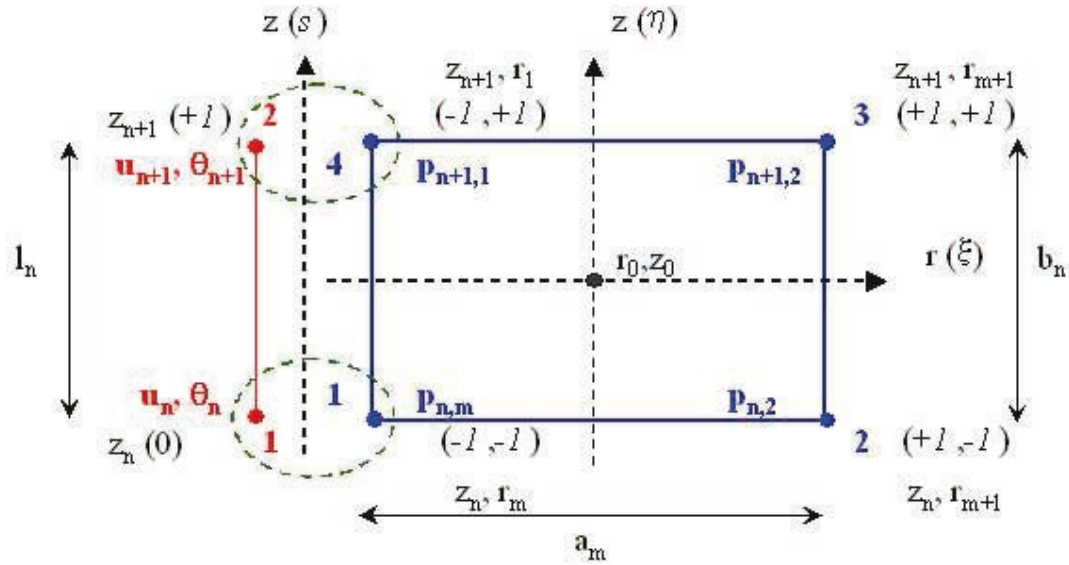


Figure 1.25. Couplage conforme entre un élément fini poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (v, θ) et un élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)

On calcule alors le terme de couplage, en écrivant la pression sous la forme $p(r, \theta, z) = p(r, z) \cos \theta$ (composante symétrique d'ordre un dans le développement en série de Fourier (1.32)) :

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} p|_{r=R} \delta v R \cos \theta d\theta &= R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^H p|_{r=R} \delta v dz \\ &= \pi R \int_0^H p|_{r=R} \delta v dz \end{aligned}$$

On utilise un couplage conforme entre les éléments poutre monodimensionnels et les éléments fluide bidimensionnels, comme représenté par la FIG. 1.25. La discrétisation du terme de couplage est alors :

$$\int_0^H p|_{r=R} \delta v dz = \delta \mathbf{V}^T \left(\sum_{n=1}^{n=N_o} \mathbf{\Lambda}_n^{S^T} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \mathbf{N}_n^{S^T} \mathbf{N}_{n,1}^F dz \mathbf{\Lambda}_{n,1}^F \right) \mathbf{P}$$

en reprenant les notations des paragraphes 1.2.5 et 1.3.5. $\delta \mathbf{V}$ est le vecteur des inconnues nodales en déplacement virtuel structure, \mathbf{P} est le vecteur des inconnues nodales en pression fluide, $\mathbf{\Lambda}_n^S$ et $\mathbf{\Lambda}_{n,1}^F$ sont les matrices de localisation des degrés de liberté élémentaires dans le maillage global structure et fluide et N_o est le nombre d'éléments finis structure sur l'interface fluide/structure.

L'expression précédente met en évidence une matrice élémentaire d'interaction fluide/structure, notée \mathbf{r}_n dont les composantes se calculent comme :

$$\begin{aligned} r_{(i,j)}^n &= \pi R \int_{z_n}^{z_{n+1}} N_i^S N_j^F dz \\ &= \pi R \int_0^1 N_i^S N_j^F ds \end{aligned}$$

avec $N_j^F(s) = \frac{(1 - \xi_j)(1 - \eta_j + 2\eta_j s)}{4}$ en tenant compte du changement de variable $\eta = -1 + 2s$ introduit pour réaliser le couplage conforme entre l'élément poutre et l'élément fluide et faire coïncider les variables locales des deux éléments couplés suivant z . La matrice élémentaire \mathbf{r} est donnée explicitement par [PES 01] :

$$\mathbf{r}_n = \pi R \begin{bmatrix} \frac{7l_n}{20} & 0 & 0 & \frac{3l_n}{20} \\ \frac{l_n^2}{20} & 0 & 0 & \frac{l_n^2}{30} \\ \frac{3l_n}{20} & 0 & 0 & \frac{7l_n}{20} \\ \frac{-l_n^2}{30} & 0 & 0 & \frac{-l_n^2}{20} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

L'assemblage des matrices élémentaires \mathbf{r}_n permet d'obtenir la matrice d'interaction fluide/structure pour le problème couplé ; cette matrice est notée \mathbf{R} . Les termes de couplage se calculent à partir de cette matrice comme :

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} p|_{r=R} \delta v R \cos \theta d\theta dz = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{P}$$

et :

$$\rho_F \omega^2 \int_0^H \int_0^{2\pi} v \delta p|_{r=R} R \cos \theta d\theta dz = \rho_F \omega^2 \delta \mathbf{P}^T \mathbf{R}^T \mathbf{V}$$

Ainsi, on écrit le problème discret :

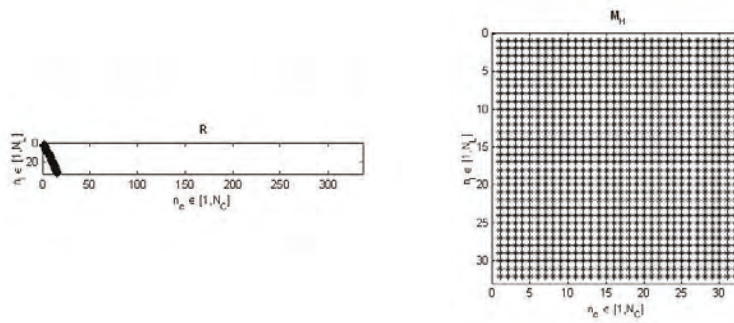
$$\mathbf{K}_S \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{V} = -\mathbf{R} \mathbf{P} \quad \mathbf{K}_F \mathbf{P} = -\rho_F \omega^2 \mathbf{R} \mathbf{V}$$

soit, après élimination de \mathbf{P} :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) - \omega^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{0} \quad (1.62)$$

avec $\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T$ est la matrice de masse ajoutée.

La structure des matrices \mathbf{R} et \mathbf{M}_H pour le problème étudié est donnée par la FIG. 1.26. La matrice \mathbf{M}_H est une matrice pleine qui a les dimensions du problème structure ; la matrice \mathbf{R} est une matrice avec des composantes non nulles correspondant aux numéros des noeuds situés sur l'interface fluide/structure. Les composantes non nulles de \mathbf{R} correspondent au couplage des degrés de liberté en pression du problème fluide avec les degrés de liberté en déplacement du problème structure. La matrice \mathbf{R} est une matrice rectangulaire avec un nombre de ligne égal à la taille du problème structure et un nombre de colonnes égal à la taille du problème fluide.



Matrice de couplage

Matrice de masse ajoutée

Figure 1.26. Structure de la matrice de couplage \mathbf{R} et de la matrice de masse ajoutée \mathbf{M}_H en couplage éléments finis/éléments finis

La matrice de couplage \mathbf{R} est obtenue à partir de la matrice de couplage globale, dont on a retiré les *colonnes* qui correspondent aux degrés de liberté (u, θ) du noeud structure à l'encastrement en $z = 0$ et les *lignes* qui correspondent aux degrés de liberté p des noeuds fluide au niveau de la surface libre en $z = H$. Avec le maillage de la poutre à N éléments finis structure (deux noeuds, deux degrés de liberté par noeud) et le maillage du fluide avec $M \times N_o$ éléments finis fluide (quatre noeuds, un degré de liberté par noeud) comme représenté par la FIG. 1.24, la taille du problème structure est $2 \times N$ et la taille du problème fluide est $(M + 1) \times N_o$.

La matrice de raideur \mathbf{K}_F est obtenue à partir de la matrice de raideur globale, dont on a retiré les lignes et les colonnes qui correspondent aux degrés de liberté p des noeuds fluide au niveau de la surface libre. La matrice de masse ajoutée \mathbf{M}_H est construite avec les matrices \mathbf{R} et \mathbf{K}_F prenant en compte les conditions aux limites.

1.4.5.4. Calcul des modes propres et des fréquences propres

Le TAB. 1.6 donne une comparaison des premières fréquences propres de la poutre couplée avec le fluide, calculées avec l'approche analytique et numérique, pour deux hauteurs de remplissage.

$\lambda = 100\%$			
Fréquence	Solution analytique	Calcul numérique	
f_1	8.54 Hz	8.53 Hz	-0.12 %
f_2	53.95 Hz	53.45 Hz	-0.93 %
f_3	155.90 Hz	152.95 Hz	-1.89 %
f_4	315.40 Hz	306.88 Hz	-2.70 %
$\lambda = 75\%$			
Fréquence	Solution analytique	Calcul numérique	
f_1	9.60 Hz	9.53 Hz	-0.73 %
f_2	54.93 Hz	54.68 Hz	-0.46 %
f_3	159.70 Hz	156.94 Hz	-1.73 %
f_4	321.50 Hz	314.40 Hz	-2.21 %

Tableau 1.6. Premières fréquences de la poutre couplée avec le fluide avec condition de surface libre $p|_{z=H} = 0$. Comparaison des calculs analytiques et numériques par couplage éléments/éléments finis

La FIG. 1.27 donne une représentation des deux premiers modes propres de la poutre couplée avec le fluide pour un remplissage $\lambda = 75\%$. Les figures superposent également le champ de pression dans le fluide, engendré par les déformations de la structure et calculé comme $\mathbf{P}(\omega) = \rho_F \omega^2 \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{V}(\omega)$.

Avec les valeurs numériques caractérisant le problème, les effets de couplage de modes sont peu importants : les déformées modales de la structure avec fluide sont très similaires aux déformées modales sans fluide (voir FIG. 1.10).

REMARQUE.— *Caractérisation de l'effet inertiel.* Dans le cas étudié, l'effet de couplage avec le fluide est caractérisé par le seul effet de masse ajoutée ; la baisse de fréquence due à la masse ajoutée, dépend ici des nombres $\mu = \frac{\rho_F}{\rho_S}$ (nombre de masse, rapport des masses volumiques fluide et structure) et $\epsilon = \frac{e}{R}$ (ratio d'épaisseur). De façon générale, ces nombres caractérisent la baisse en fréquence de la structure immergée dans un fluide incompressible [LAN 01]. Dans le cas d'un problème non confiné,

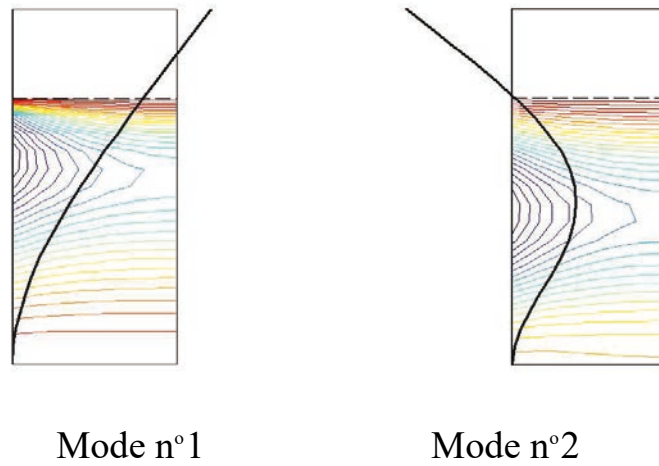


Figure 1.27. Modes propres de flexion de la poutre couplée avec un fluide incompressible

avec remplissage partiel de la cavité fluide, l'effet de masse ajoutée dépend aussi de λ . On note β le rapport entre la première fréquence propre de flexion de la poutre couplée et non couplée avec le fluide ; les FIG. 1.28 et 1.29 donnent l'évolution de β pour différentes valeurs de μ et ϵ en fonction de λ : l'effet de masse ajoutée est d'autant plus marqué que le remplissage est important, que le fluide est dense et que la structure est fine.

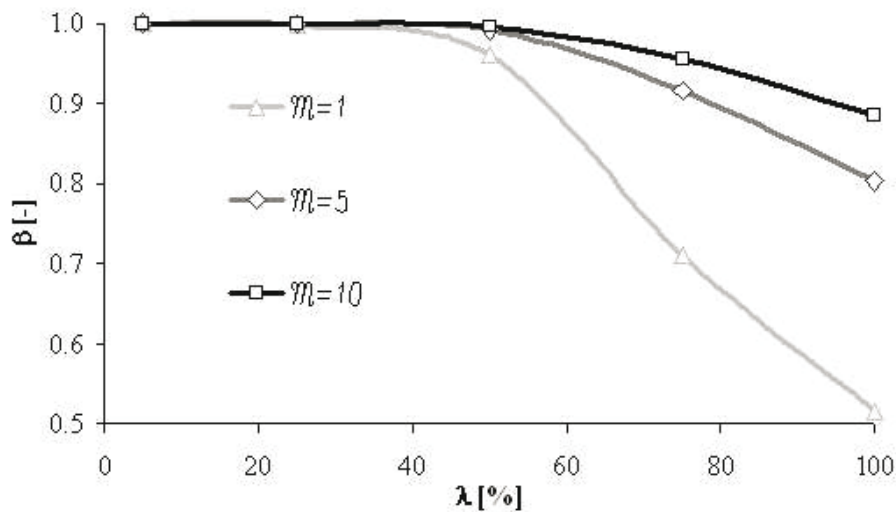


Figure 1.28. Baisse en fréquence pour le premier mode de poutre immergée en fonction de μ et λ

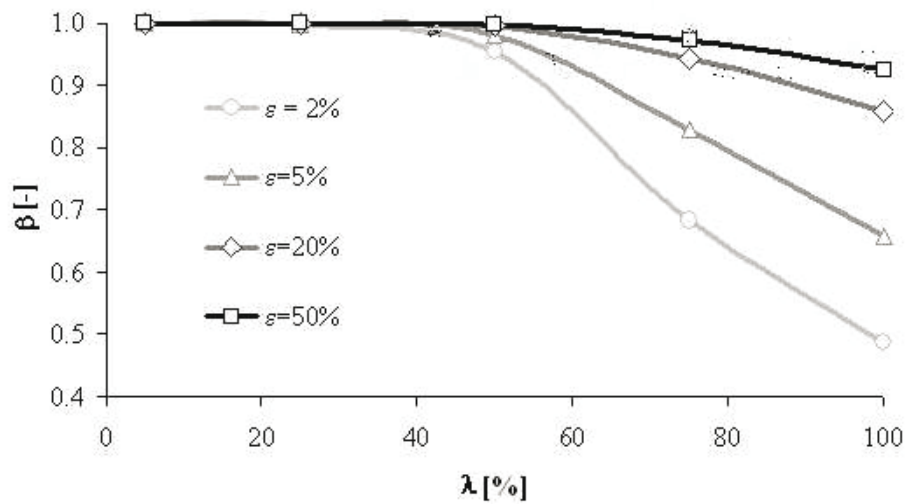


Figure 1.29. Baisse en fréquence pour le premier mode de poutre immergée en fonction de ϵ et λ

1.5. Couplage éléments finis-éléments finis pour l'étude vibratoire d'un système couplé fluide-structure

Ce paragraphe traite de la dynamique vibratoire d'un système couplé fluide/structure dans deux cas génériques :

- problème couplé *élasto-acoustique* : il s'agit de décrire le comportement d'une structure élastique linéaire couplée avec un fluide compressible ;
- problème couplé *hydro-élastique* : on s'intéresse à la dynamique d'une structure élastique linéaire couplée avec un fluide incompressible avec une surface libre, en prenant en compte les effets de ballonnement.

Par rapport à la situation étudiée dans le paragraphe précédent, on prend donc en compte les phénomènes vibratoire du fluide (en hautes fréquences : phénomènes acoustiques, en basse fréquence : phénomène de ballonnement).

La modélisation du problème couplé peut être faite en ayant recours à différentes formulations qui conduisent à un problème caractérisé par des opérateurs de masse symétrique ou non symétrique. Ces formulations sont exposées pour les deux problèmes génériques étudiés, et des exemples d'application sont proposés afin d'illustrer les phénomènes de couplage de modes.

1.5.1. Contexte d'étude et hypothèses générales

Le cadre général est celui des paragraphes précédents, on reprend les hypothèses générales faites dans les paragraphes 1.2 pour la structure et 1.3 pour le fluide. Les notations sont celles adoptées dans le paragraphe 1.4 pour la représentation du problème couplé (voir FIG. 1.21).

On rappelle les équations qui permettent de décrire le problème avec une formulation symétrique et non symétrique :

– le cas élasto-acoustique peut être formulé en *pression/déplacement* (formulation \mathbf{u}, p) qui conduit à un problème non-symétrique ou en *déplacement/pression, potentiel des déplacements* (formulation \mathbf{u}, p, φ) qui conduit à un problème symétrique ;

– le cas hydro-élastique peut être formulé en *pression/déplacement* (problème non symétrique) ou en *déplacement/potential des déplacements, élévation* (formulation $\mathbf{u}, \varphi, \eta$) qui permet d’obtenir un problème symétrique.

Les équations continues et les formulations variationnelles correspondantes sont exposées, la discrétisation du problème est conduite avec une technique éléments finis utilisant les principes exposés au paragraphe précédents.

La prise en compte de la dynamique modale du fluide dans le problème couplé est illustrée du point de vue du phénomène de *couplage de modes*, dont l’importance est évaluée dans le domaine haute et basse fréquences par des nombres sans dimensions permettant d’évaluer l’importance du couplage.

1.5.2. Formulation couplée fluide/structure non symétrique

1.5.2.1. Couplage élasto-acoustique

Un problème couplé fluide acoustique/structure élastique est décrit par les équations suivantes (voir paragraphes précédents et [MOR 95] pour une présentation plus détaillée de la formulation) :

$$-\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } \Omega_S \quad u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = p n_i \text{ sur } \Gamma$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} p - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega_F \quad p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_o}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \quad \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = \omega^2 \rho_F u_j n_j \text{ sur } \Gamma$$

La formulation variationnelle du problème est obtenue en écrivant pour tout champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ et tout champ de pression virtuelle δp admissibles ; elle s’écrit :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i dV + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) dV = \int_{\Gamma} p n_i \delta u_i dS \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1.63)$$

pour le problème structure, et :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \delta p d\mathcal{V} + \int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} d\mathcal{V} = \omega^2 \rho_F \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p d\mathcal{S} \quad \forall \delta p \quad (1.64)$$

pour le problème fluide.

La discrétisation de la formulation faible du problème peut être réalisée avec les opérateurs \mathbf{M}_S , \mathbf{K}_S , \mathbf{K}_F et \mathbf{R} , ainsi que l'opérateur de masse \mathbf{M}_F défini sur le domaine fluide Ω_F par :

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \delta p d\mathcal{V} \rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{M}_F \mathbf{P}$$

On obtient alors le problème matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{R}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.65)$$

1.5.2.2. Couplage hydro-élastique

Les équations du problème de couplage *hydro-élastique* avec ballonnement de la surface libre fluide⁹ en formulation (\mathbf{u}, p) sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} &= 0 \text{ dans } \Omega_S & u_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o} \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} & \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S &= p n_i \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} &= 0 \text{ dans } \Omega_F & \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F &= \omega^2 \frac{1}{g} p \text{ sur } \partial\Omega_{F_o} \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} & \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j &= \omega^2 \rho_F u_j n_j \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

Dans la formulation du problème fluide, la normale \mathbf{n}_F au niveau de la surface libre $\partial\Omega_{F_o}$ est verticale ascendante, de façon à écrire le champ de gravité $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}_F$.

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i d\mathcal{V} + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V} = \int_{\Gamma} p n_i \delta u_i d\mathcal{S} \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1.66)$$

9. Le problème ne prend en compte qu'une formulation au *premier ordre* du problème de ballonnement fluide. Une formulation plus complète des effets de gravité peut être néanmoins utilisée pour décrire le problème couplé [SCH 01].

pour le problème structure, et :

$$-\omega^2 \int_{\partial\Omega_{F_o}} \frac{1}{g} p \delta p dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} dV = \omega^2 \rho_F \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p dS \quad \forall \delta p \quad (1.67)$$

pour le problème fluide.

La discrétisation de la formulation faible du problème peut être réalisée avec les opérateurs \mathbf{M}_S , \mathbf{K}_S , \mathbf{K}_F et \mathbf{R} , ainsi que l'opérateur de masse \mathbf{M}'_F défini sur la surface libre $\partial\Omega_{F_o}$ par :

$$\int_{\partial\Omega_{F_o}} \frac{1}{g} p \delta p dV \rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{M}'_F \mathbf{P}$$

On obtient alors le problème matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{R}^T & \mathbf{M}'_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix}$$

En distinguant les degrés de liberté en pression pour les noeuds de la surface libre et pour les noeuds du reste du domaine fluide, on écrit l'équation précédente sous la forme suivante (voir paragraphe 1.3, paragraphe 1.3.3.2) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{R}_o & -\tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o & \tilde{\mathbf{K}}_F^o \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{R}_o^T & \mathbf{M}_F^o & \mathbf{0} \\ \rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix}$$

En éliminant les degrés de liberté $\tilde{\mathbf{P}}$ on écrit la formulation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -(\mathbf{R}_o - \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} \\ \rho_F (\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T) & \mathbf{M}_F^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.68)$$

Cette formulation fait apparaître deux sous-problèmes aux valeurs propres caractérisant respectivement :

– les modes de structure couplée avec le fluide incompressible sans ballonnement de la surface libre (voir paragraphe 1.4, formulation 1.55), obtenus par la résolution du problème

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) = \omega^2 (\mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T) \mathbf{U}(\omega) \quad (1.69)$$

– les modes fluide de ballonnement, sans prise en compte du couplage avec la structure (voir paragraphe 1.3, formulation 1.26), obtenus par la résolution du problème

$$(\mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}) \mathbf{P}_o(\omega) = \omega^2 \mathbf{M}_F^o \mathbf{P}_o(\omega) \quad (1.70)$$

La formulation (1.68) précédente montre aussi que la prise en compte des effets de surface libre dans le problème couplé fluide/structure est caractérisée par un couplage entre les modes de ballotement du fluide et les modes hydro-élastiques de la structure. La matrice de couplage des deux sous-problèmes est l'opérateur $\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T$; le système matriciel couplé prend la forme caractéristique d'un problème en formulation (\mathbf{u}, p) .

1.5.3. Formulation couplée fluide/structure symétrique

La modélisation du problème couplé avec la formulation pression/déplacement conduit on l'a vu à l'écriture d'un problème non-symétrique. Le calcul des modes propres nécessite donc le recours à des algorithmes adaptés pour ce genre de problèmes [RAJ 26], avec des temps de calcul importants. D'autre part, l'analyse dynamique du système couplé basée sur des technique de décomposition modale (voir paragraphe suivant) ne peut pas être conduite simplement avec ce type de formulation.

Le recours à une formulation symétrique permet de traiter le problème couplé avec les outils classiques de l'analyse vibratoire des structures. Morand et Ohayon ont ainsi proposé des formulation symétriques pour les problèmes élasto-acoustique et hydro-élastique [MOR 95].

1.5.3.1. Couplage élasto-acoustique

Une forme symétrique du problème élasto-acoustique peut être obtenue en utilisant une formulation couplée, basée sur une représentation du problème structure en terme de déplacement \mathbf{u} et le problème fluide en terme de pression p et *potentiel des déplacements* φ [BOU 84] [BOU 87] [OHA 83]. Par rapport à la formulation (\mathbf{u}, p) présentée au paragraphe 1.5.2.1, la formulation (\mathbf{u}, p, φ) introduit une variable supplémentaire (donc des degrés de liberté supplémentaires pour le problème discret), mais permet d'obtenir un problème discret écrit avec des matrices de masse et de raideur *symétriques*. Le potentiel des déplacements φ est relié à la pression selon¹⁰ :

$$p = \rho_F \omega^2 \varphi$$

Les équations du problème couplé sont alors les suivantes [MOR 95] :

$$-\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } \Omega_S$$

10. Le modèle linéaire de fluide adopté dans le cadre général de ce paragraphe permet en effet de définir un potentiel des déplacements selon la relation $\boldsymbol{\xi} = \nabla \varphi$ où $\boldsymbol{\xi}$ est le champ de déplacement dans le fluide. Compte tenu de la relation $\nabla p = i\omega \rho_F \mathbf{v}$ (voir paragraphe 1.3), avec par définition $\mathbf{v} = i\omega \boldsymbol{\xi}$, on retrouve bien la relation entre pression et potentiel des déplacements.

$$u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad (1.71)$$

pour la structure, et :

$$\begin{aligned} \frac{p}{c^2} + \rho_F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 \quad \frac{p}{\rho_F c^2} - \omega^2 \frac{1}{c^2} \varphi = 0 \text{ dans } \Omega_F \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_o} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j^F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \end{aligned} \quad (1.72)$$

pour le fluide, avec les conditions de couplage :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j^S = \omega^2 \rho_F \varphi n_i \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j = u_j n_j \text{ sur } \Gamma \quad (1.73)$$

qui expriment la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes et de la composante normale du déplacement à l'interface fluide/structure.

La formulation variationnelle du problème est alors obtenue en multipliant la première relation dans (1.71) par un champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ et la première et deuxième relation dans (1.72) respectivement par un champ de potentiel de déplacement virtuel $\delta \varphi$ et par un champ de pression virtuelle δp . Après intégration par parties sur les domaines Ω_S et Ω_F et prise en compte des termes de conditions aux limites on écrit les formes intégrales suivantes :

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i d\mathcal{V} + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \rho_F \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} n_i \delta u_i d\mathcal{S} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1.74)$$

pour le problème structure, et :

$$-\rho_F \int_{\Omega_F} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} d\mathcal{V} + \int_{\Omega_F} \frac{p \delta \varphi}{c^2} d\mathcal{V} + \rho_F \int_{\Gamma} u_i n_i \delta \varphi d\mathcal{S} = 0 \quad \forall \delta \varphi \quad (1.75)$$

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \frac{p \delta p}{c^2} d\mathcal{V} + \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta p = 0 \quad \forall \delta p \quad (1.76)$$

pour le problème fluide.

La discrétisation des termes de masse et de raideur des problèmes fluide et structure avec la méthode des éléments finis permet de calculer les matrices \mathbf{M}_S , \mathbf{M}_F , \mathbf{K}_S et \mathbf{K}_F .

Les formulations (1.75) et (1.76) font apparaître des termes supplémentaires qui peuvent être discrétisés avec les opérateurs définis précédemment :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} d\mathcal{V} \rightarrow \delta \Phi^T \mathbf{K}_F \Phi$$

$$\int_{\Omega_F} \frac{p\delta\varphi}{c^2} d\mathcal{V} \rightarrow \delta\Phi^T \mathbf{M}_F \mathbf{P} \quad \int_{\Omega_F} \frac{\varphi\delta p}{c^2} d\mathcal{V} \rightarrow \delta\mathbf{P}^T \mathbf{M}_F \Phi$$

$$\int_{\Gamma} \varphi n_i \delta u_i d\mathcal{S} \rightarrow \delta\mathbf{U}^T \mathbf{R} \Phi \quad \int_{\Gamma} u_i n_i \delta\varphi d\mathcal{S} \rightarrow \delta\Phi^T \mathbf{R}^T \mathbf{U}$$

La discrétisation de la formulation variationnelle du problème couplé conduit ainsi à l'écriture des équations suivantes :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \delta\mathbf{U}^T \mathbf{M}_S \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{U} + \rho_F \delta\mathbf{U}^T \mathbf{R} \Phi &= 0 \\ 1/\rho_F \delta\mathbf{P}^T \mathbf{M}_F \mathbf{P} - \omega^2 \delta\Phi^T \mathbf{M}_F \Phi &= 0 \\ -\rho_F \delta\Phi^T \mathbf{K}_F \Phi + \delta\Phi^T \mathbf{M}_F \mathbf{P} + \rho_F \delta\Phi^T \mathbf{R}^T \mathbf{U} &= 0 \end{aligned}$$

Les équations précédentes sont valables pour tout $\delta\mathbf{U}$, $\delta\mathbf{P}$ et $\delta\Phi$. En multipliant la dernière équation par $-\omega^2$, on obtient le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/\rho_F \mathbf{M}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} =$$

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \rho_F \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_F \\ \rho_F \mathbf{R}^T & \mathbf{M}_F & -\rho_F \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.77)$$

On peut éliminer la variable Φ à partir de la dernière ligne de (1.77) et écrire :

$$\Phi = 1/\rho_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \mathbf{P} + \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{U}$$

En reportant cette expression dans les deux premières lignes de (1.77), on obtient le problème d'évolution en temps formulé avec les inconnues pression et déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/\rho_F \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} =$$

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T & \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \\ \mathbf{M}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T & 1/\rho_F \mathbf{M}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.78)$$

Les formulations précédentes font intervenir des matrices de masse et de raideur *symétriques*, écrites uniquement en fonction des opérateurs utilisés pour la formulation non-symétrique. Dans la formulation (1.77), la taille du problème fluide est doublée par rapport à la formulation (1.78), mais les matrices sont symétriques et creuses.

Dans la formulation (1.78), les matrices sont symétriques mais pleines ; cette formulation nécessite également une opération d'inversion matricielle : la qualité du calcul des valeurs propres dépend donc du conditionnement de la matrice \mathbf{K}_F [SIG 05]¹¹.

1.5.3.2. Couplage hydro-élastique

Une formulation symétrique pour le problème de couplage structure élastique/fluide incompressible avec ballottement de surface libre peut être obtenue en utilisant une description du fluide en *élévation* et potentiel des déplacements. L'élévation η caractérise le déplacement normal du niveau de fluide sur la surface libre (voir paragraphe 1.3). On formule alors le problème couplé de la façon suivante [MOR 95] :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} &= 0 \text{ dans } \Omega_S \\ u_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S_o} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \end{aligned} \quad (1.79)$$

pour la structure, et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &= 0 \text{ dans } \Omega_F \quad \rho_F g \eta - \omega^2 \rho_F \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j^F &= \eta \text{ sur } \partial\Omega_{F_o} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j^F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \end{aligned} \quad (1.80)$$

pour le fluide, avec les conditions de couplage :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = \omega^2 \rho_F \varphi n_i \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j = u_j n_j \text{ sur } \Gamma \quad (1.81)$$

et la contrainte de conservation du volume pour un fluide incompressible¹² :

$$\int_{\Gamma} u_i n_i d\mathcal{S} + \int_{\partial\Omega_{F_o}} \eta d\mathcal{S} = 0 \quad (1.82)$$

11. Dans la pratique les codes de calcul mettant en oeuvre la formulation symétrique (\mathbf{u}, p, φ) utilisent les matrices données par (1.77). Dans l'exemple présenté au paragraphe 1.5.4, on utilisera la forme condensée (1.78).

12. Cette contrainte peut être traitée en introduisant un multiplicateur de Lagrange π , les équations du problème couplé peuvent être écrites en introduisant cette variable dans la relation $\rho_F \omega^2 \varphi + \pi = \rho_F g \eta$. [MOR 95] expose dans le détail le traitement de cette contrainte pour la résolution du problème couplé. Dans l'exemple proposé au paragraphe 1.5.5, on étudiera un problème couplé en géométrie à symétrie axiale et utilisant une représentation des inconnues du problème en série de Fourier : dans ce cas, la condition (1.82) est vérifiée de façon intrinsèque pour les modes symétriques ($s \geq 1$) ou anti-symétriques ($a \geq 1$).

On écrit la formulation variationnelle du problème couplé sous la forme suivante, en introduisant les champs virtuels de déplacement, potentiel des déplacements et élévation (respectivement $\delta \mathbf{u}$, $\delta \varphi$ et $\delta \eta$). Elle s'écrit :

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) dV = -\rho_F \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} n_i \delta u_i dV \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1.83)$$

pour le problème structure, et :

$$\int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \eta dS + \int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F g \eta \delta \eta dS = 0 \quad \forall \delta \eta \quad (1.84)$$

$$\int_{\Omega_F} \rho_F \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i} dV - \int_{\Gamma} \rho_F u_i n_i \delta \varphi dS - \int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F \eta \delta \varphi dS = 0 \quad \forall \delta \varphi \quad (1.85)$$

pour le problème fluide.

La discrétisation de la forme variationnelle précédente avec une technique éléments finis conduit à la définition des opérateurs de masse et de raideur suivants, calculés sur la surface libre $\partial\Omega_{F_o}$ avec les degrés de liberté en élévation :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F g \eta \delta \eta dS &\rightarrow \delta \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{K}}_F \mathbf{H} \\ \int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F \eta \delta \varphi dS &\rightarrow \delta \Phi^T \tilde{\mathbf{M}}_F \mathbf{H} \\ \int_{\partial\Omega_{F_o}} \rho_F \varphi \delta \eta dS &\rightarrow \delta \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{M}}_F^T \Phi \end{aligned}$$

Le problème est alors écrit sous la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{H}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} = \\ \omega^2 &\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \rho_F \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_F \\ \rho_F \mathbf{R}^T & \tilde{\mathbf{M}}_F^T & -\rho_F \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{H}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Après élimination de la variable Φ , on obtient le problème symétrique suivant :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{H}(\omega) \end{Bmatrix} = \\ \omega^2 &\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T & \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_F^T \\ \tilde{\mathbf{M}}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T & 1/\rho_F \tilde{\mathbf{M}}_F \mathbf{K}_F^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_F^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{H}(\omega) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Cette expression fait apparaître les deux sous-problèmes aux valeurs propres suivants :

– modes propres de la structure couplée avec un fluide incompressible sans effets de surface libre, obtenus par résolution du problème

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}(\omega) = \omega^2 (\mathbf{M}_S + \rho_F \mathbf{R} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}^T) \mathbf{U}(\omega)$$

– modes fluide de ballonnement (sans couplage avec la structure), obtenus par résolution du problème aux valeurs propres formulé en *élévation* de la surface libre

$$\tilde{\mathbf{K}}_F \mathbf{H}(\omega) = \omega^2 / \rho_F \tilde{\mathbf{M}}_F \mathbf{K}_F^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_F^T \mathbf{H}(\omega) \quad (1.88)$$

La formulation couplée (1.87) montre, comme la formulation non symétrique (1.68), que les modes propres du système résultent d'un couplage entre ces deux types de modes.

Comme dans le cas élasto-acoustique, on peut formuler le problème couplé avec des opérateurs de masse et de raideur symétriques, sous forme condensée ou non. La formulation condensée permet de réduire la taille du problème, mais peut être numériquement instable. Dans la pratique, les codes de calcul utilisant la formulation $(\mathbf{u}, \eta, \varphi)$ se basent sur la forme non condensée (1.86)¹³.

1.5.4. Exemple n°5 : poutre élastique couplée avec un fluide compressible contenu dans une cavité cylindrique sans surface libre

On propose dans ce paragraphe un exemple de mise en oeuvre des formulations symétriques et non symétriques pour l'étude d'un problème couplé élasto-acoustique. Le cas étudié est représenté par la FIG. 1.30 : il s'agit du cas générique proposé au paragraphe 1.4, pour lequel on suppose que le fluide est compressible et qu'il occupe toute la cavité fluide, confinée par une paroi rigide.

Les caractéristiques géométriques et physiques du problème étudié sont les suivantes : $R = 0.1$ m, $e = 0.02$ m, $L = 1$ m, $\rho_S = 7800$ kg/m³, $E = 6.04 \times 10^9$ Pa, $\alpha = 2$, $c = 1500$ m/s, $\rho_F = 1000$ kg/m³.

Les formulations symétriques et non symétriques sont obtenues à partir des équations générales présentées dans les paragraphes 1.5.2.1 et 1.5.3.1, spécialisées au cas de la poutre élastique (voir paragraphe 1.2.5) couplée avec un fluide compressible (voir paragraphe 1.3.5).

On utilise la méthode de résolution numérique par couplage éléments finis/éléments finis, telle que détaillée dans le paragraphe 1.4.5. On écrit alors le problème aux valeurs propres en fonction des degrés de liberté (\mathbf{u}, p) avec la formulation non symétrique (les matrices sont creuses et non-symétriques, voir FIG. 1.31) et la formulation

13. Dans l'exemple proposé au paragraphe 1.5.5, on utilisera la formulation condensée.

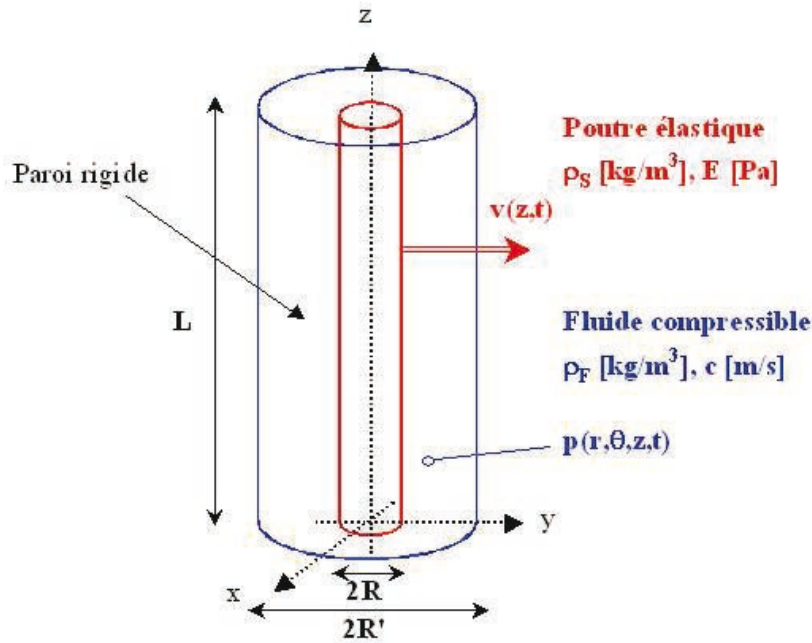


Figure 1.30. Poutre élastique couplée avec un fluide compressible sans surface libre

symétrique condensée (les matrices masse et raideur sont pleines et symétriques, voir FIG. 1.32).

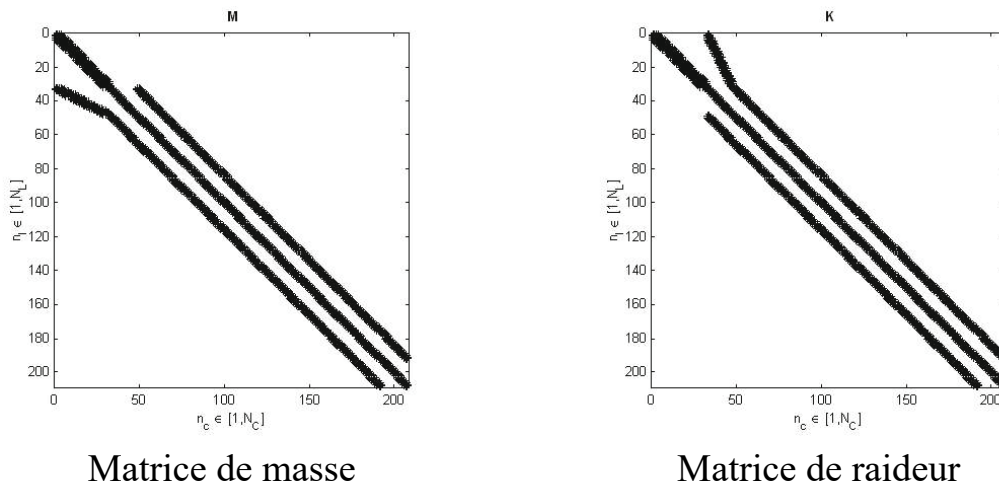


Figure 1.31. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème couplé poutre/fluide compressible sans surface libre en formulation (\mathbf{u}, p)

Le TAB. 1.7 donne une comparaison des fréquences propres des quatre premiers modes propres couplés, obtenus avec la formulation symétrique et non symétrique, et la FIG. 1.33 donne une représentation des modes propres du système couplé, en déplacement pour la structure (déformées modales de flexion de la poutre) et en pression pour le fluide (iso-valeurs du champ de pression dans le plan $(r, \theta = 0, z)$).

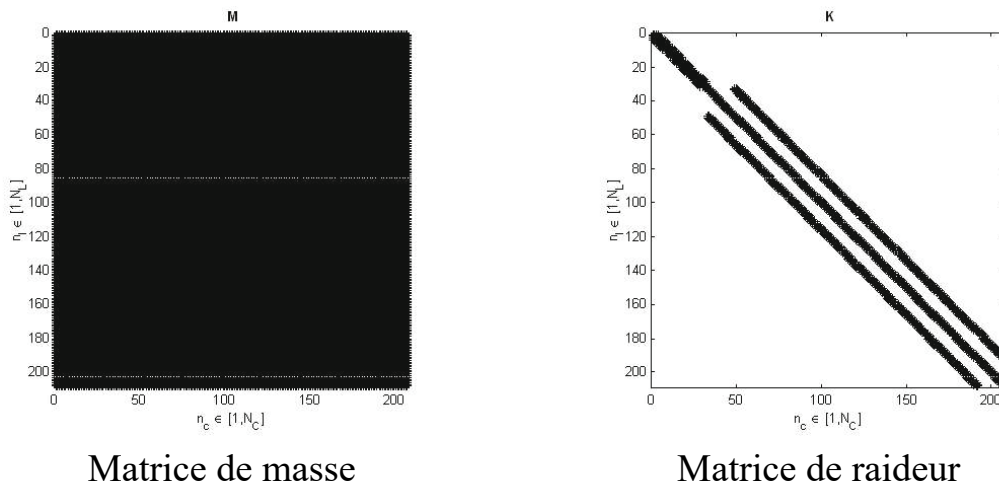


Figure 1.32. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème couplé poutre/fluide compressible sans surface libre en formulation (\mathbf{u}, p, φ) avec condensation de Φ

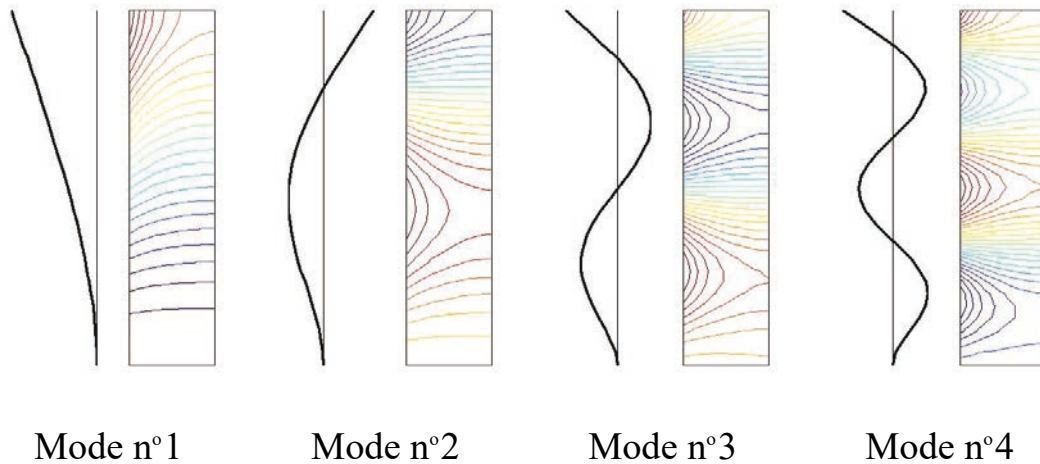


Figure 1.33. Modes propres couplés élasto-acoustiques en flexion v et pression p

1.5.5. Exemple n°6 : poutre élastique couplée avec un fluide incompressible contenu dans une cavité cylindrique avec surface libre

On s'intéresse maintenant à l'étude d'un problème couplé hydro-élastique. Le cas étudié est défini par la FIG. 1.34 ci-dessous. Les caractéristiques du problème sont les suivantes : $R = 0.1$ m, $e = 0.02$ m, $L = 1$ m, $\rho_S = 7800$ kg/m³, $E = 6.04 \times 10^9$ Pa, $\alpha = 2$, $H = 0.75$ m, $\rho_F = 1000$ kg/m³, $g = 9.81$ m/s².

Les équations du problème en formulation symétrique et non symétrique sont écrites à partir des expressions générales présentées dans les paragraphes 1.5.2.2 et

Fréquence	Formulation (\mathbf{u}, p)	Formulation (\mathbf{u}, p, φ)
f_1	7.9849 Hz	7.9814 Hz
f_2	52.242 Hz	52.236 Hz
f_3	151.50 Hz	151.57 Hz
f_4	305.42 Hz	305.77 Hz

Tableau 1.7. Fréquences propres du problème élasto-acoustique en formulations symétrique et non symétrique

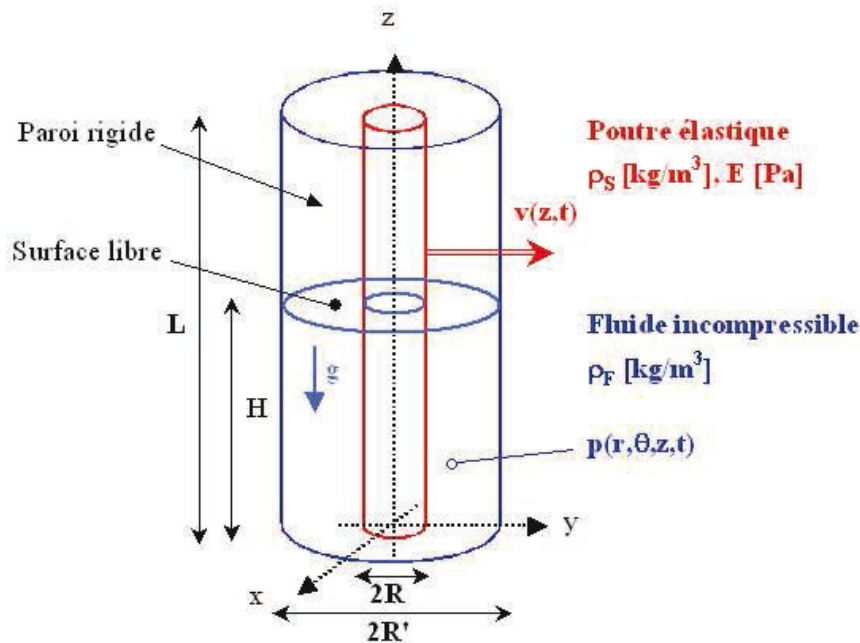


Figure 1.34. Poutre élastique couplée avec un fluide incompressible avec surface libre

1.5.3.2, spécialisées au cas de la poutre élastique (voir paragraphe 1.2.5) couplée avec un fluide incompressible (voir paragraphe 1.3.6).

On utilise la méthode de résolution numérique par couplage éléments finis/éléments finis, telle que détaillée dans le paragraphe 1.4.5. Le problème aux valeurs propres est écrit en fonction des degrés de liberté (\mathbf{u}, p) pour la formulation non symétrique (les matrices sont creuses et non-symétriques, voir FIG. 1.35) et en fonction des inconnues (\mathbf{u}, η) pour la formulation symétrique condensée (les matrices masse et raideur sont pleines et symétriques, voir FIG. 1.36).

Avec la formulation (1.88), on peut calculer les modes propres de ballonnement du fluide. Le TAB. 1.8 compare les premières fréquences propres calculés avec la

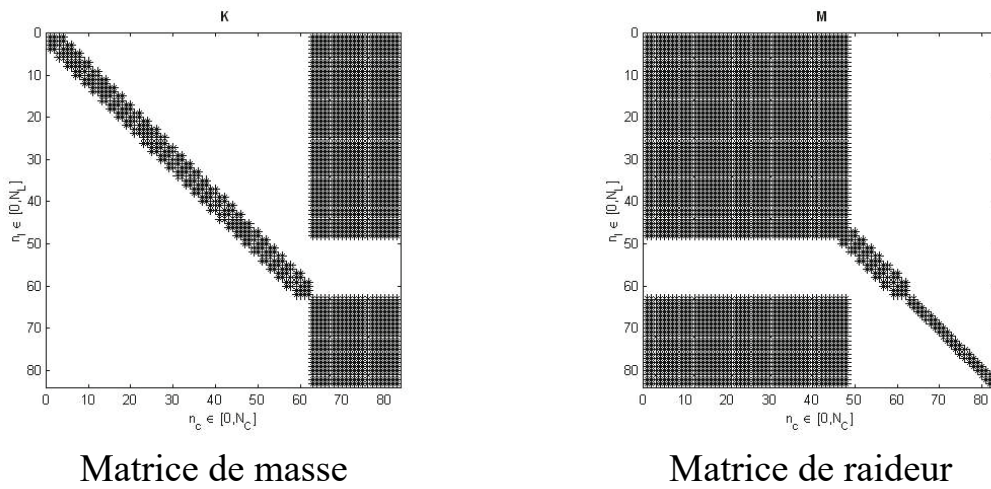


Figure 1.35. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème couplé poutre/fluide incompressible avec surface libre en formulation (\mathbf{u}, p)

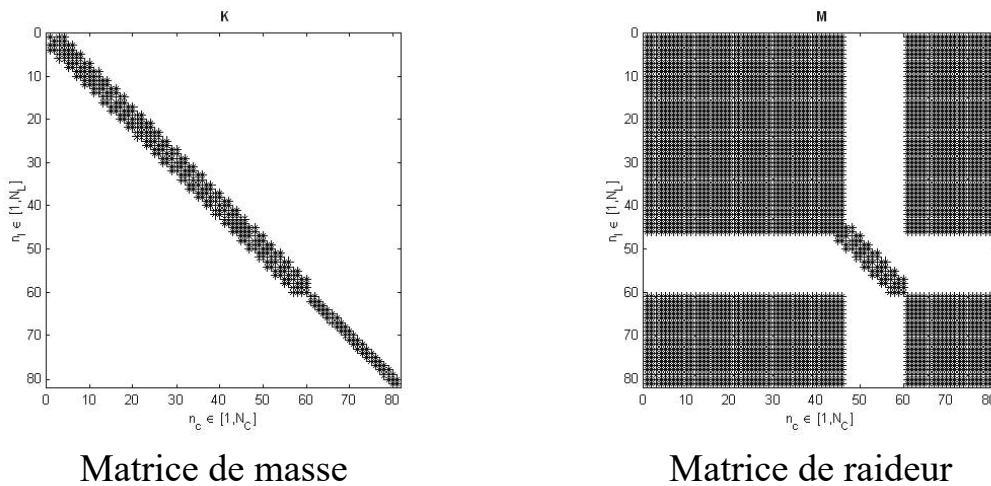


Figure 1.36. Structure des matrices de masse et de raideur pour le problème couplé poutre/fluide incompressible avec surface libre en formulation $(\mathbf{u}, \eta, \varphi)$ avec condensation de Φ

formulation en élévation et la formulation en pression : les deux modélisations donnent des résultats similaires.

La FIG. 1.37 donne une représentation des modes propres de ballonnement en élévation dans le plan $(r, \theta = 0, z)$; cette représentation est à comparer avec les formes modales obtenues avec une représentation en pression (voir paragraphe 1.3, FIG. 1.20).

La représentation en élévation permet une interprétation plus immédiate des modes puisqu'elle correspond à une grandeur directement observable (niveau de la surface

Fréquence	Formulation en pression p (1.70)	Formulation en élévation η (1.88)
f_1	1.2978 Hz	1.2978 Hz
f_2	2.8822 Hz	2.8819 Hz
f_3	4.1066 Hz	4.1048 Hz
f_4	5.1980 Hz	5.1922 Hz

Tableau 1.8. Fréquences propres de ballonnement fluide en formulation p (pression) et η (élévation)

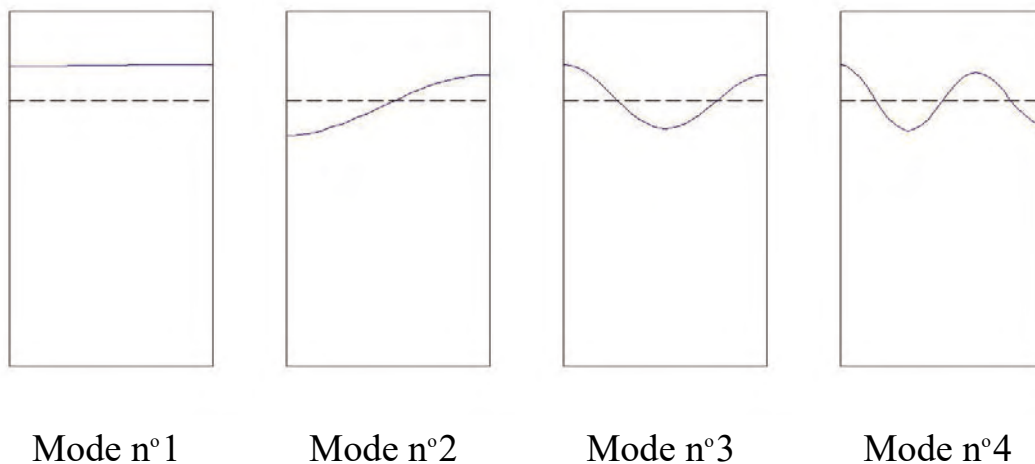


Figure 1.37. Modes propres de ballonnement avec formulation en élévation η

libre), alors que la représentation en pression est liée au *gradient* du champ de déplacement dans le fluide, qui est une grandeur plus délicate à appréhender.

Le TAB. 1.9 donne une comparaison des fréquences propres de la structure couplée avec le fluide avec les formulations symétriques et non symétriques ; les résultats de calcul sont équivalents et très proches des valeurs obtenues en considérant un fluide incompressible avec une surface libre représentée par la condition $p = 0$ (voir paragraphe 1.4, TAB. 1.6).

Les modes propres de ballonnement du fluide sont éloignés des premiers modes propres de flexion de la poutre couplé avec le fluide (sans effets de surface libre). Dans ce cas, une analyse découplée des deux phénomènes est donc possible [CHO 01].

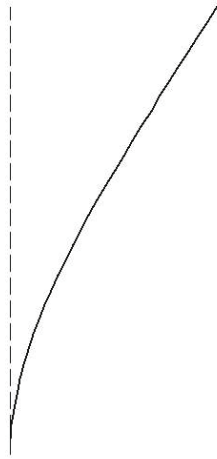
REMARQUE.— *Effets de couplage hydro-élastique* Des effets de couplage hydro-élastiques peuvent apparaître lorsque les fréquences de la structure se rapprochent [LIU 82]. La

Fréquence	Formulation (u, p)	Formulation (u, η)
f_1	9.54 Hz	9.55 Hz
f_2	54.69 Hz	52.70 Hz
f_3	152.95 Hz	152.96 Hz

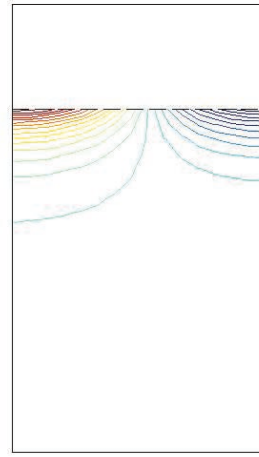
Tableau 1.9. *Fréquences propres du problème hydro-élastique en formulations symétrique et non symétrique*

FIG. 1.38 illustre le phénomène de couplage de modes à basse fréquence¹⁴ pour le cas générique étudié [SIG 04b]. Le module d'Young de la poutre est ajusté à une valeur faible, afin d'obtenir des fréquences propres de la structure proches de celles du fluide : le premier mode de flexion de la poutre sans fluide se situe à 3.47 Hz ; le second mode de ballonnement du fluide se situe à 2.87 Hz. Le mode de flexion de la poutre couplée avec le fluide, calculé sans prise en compte des effets de surface libre est à 2.72 Hz, la forme modale correspondante est représentée par la FIG. 1.38. Le mode couplé de flexion/ballonnement est calculé à 3.13 Hz, à une valeur nettement supérieure à celle calculé sans prise en compte du ballonnement (tout en restant bien évidemment inférieure à la valeur calculé sans couplage avec le fluide). La FIG. 1.38 montre que la forme de ce mode couplé hérite des formes modales des modes découplés.

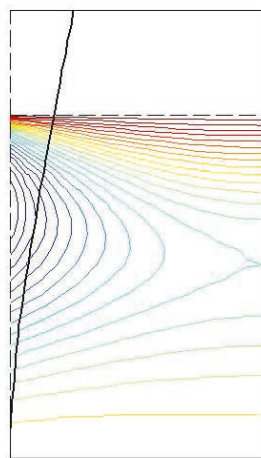
14. L'exemple proposé se limite à l'étude des termes du premier ordre pour le ballonnement. Morand et Ohayon ont proposé une formulation plus complète capable de représenter sans hypothèse simplificatrice l'ensemble des phénomènes de couplage en basse fréquence entre une structure et un fluide [MOR 95].



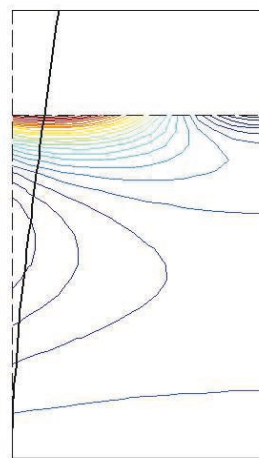
Structure seule (3.4705 Hz)



Fluide seul (2.8761 Hz)



Structure couplée avec le fluide,
sans ballonnement fluide (2.7297 Hz)



Structure couplée avec le fluide,
avec ballonnement fluide (3.1352 Hz)

Figure 1.38. Illustration du phénomène de couplage de modes en basse fréquence

1.6. Bibliographie

- [AXI 01] AXISA F., *Modélisation des systèmes mécaniques. Interactions fluide structure*, Hermès, 2001.
- [BAT 82] BATHE K., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [BER 98] BERMUDEZ A., DURAN R., RODRIGUEZ R., « Finite Element Analysis of Compressible and Incompressible Fluid-Solid System. », *Mathematics of Computation*, vol. 67, n°21, p. 111-136, 1998.
- [BIS 02] BISWAL K., BHATTACHARYYA S., SINHA P., « Dynamic Response of Liquid Filled Composite Cylindrical Tanks with Baffles », *International Mechanical Engineering*

Congress and Exposition, New Orleans, November 2002, ASME, 2002.

- [BLE 84] BLEVINS R., *Formulas for Frequency and Mode Shape*, Robert. E. Kreieger Publishing Compagny, 1984.
- [BOU 84] BOUJOT J., « Interaction fluide/structure en régime transitoire », *La Recherche Aérospatiale*, vol. 3, p. 203-209, 1984.
- [BOU 87] BOUJOT J., « Mathematical Formulation of Fluid-Structure Interaction Problems. », *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, vol. 21, p. 239-260, 1987.
- [CHO 01] CHO J., SONG J., « Assessment of Classical Numerical Models for the Separate Fluid Structure Modal Analysis », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 239, n°5, p. 995-1012, 2001.
- [CIA 78] CIARLET P., *he Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.
- [CIA 86] CIARLET P., *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, 1986.
- [CON 94] CONCA C., PLANCHARD J., THOMAS B., VANNINATHAN M., *Problèmes mathématiques en couplage fluide/structure*, Eyrolles, 1994.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [DUV 90] DUVAUT G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [FRI 72] FRITZ R., « The Effect of Liquids on the Dynamic Motion of Immersed Solids », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 61, p. 167-173, 1972.
- [GIB 86] GIBERT R., *Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*, Eyrolles, 1986.
- [HAM 78] HAMDY M., OUSSET Y., VERCHERY G., « A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 13, p. 139-150, 1978.
- [LAN 01] DE LANGRE E., *Fluides et Solides*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- [LIU 82] LIU W., MA D., « Coupling Effect Between Liquid Sloshing and Flexible Fluid-Filled Systems », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 72, p. 345-357, 1982.
- [MAR 78] MARCUS M., « A Finite Element Method Applied to the Vibration of Submersed Plates », *Journal of Ship Research*, vol. 22, p. 94-99, 1978.
- [MOK 97] MOKHTARI M., MESBAH A., *Apprendre et maîtriser Matlab*, Springer Verlag, 1997.
- [MOR 95] MORAND H. J., OHAYON R., *Fluid-Structure Interaction*, Wiley & Sons, 1995.
- [NEF 82] NEFSKE D., WOLF J., HOWELL L., « Structural Acoustic Finite Element Analysis of the Automobile Passenger Compartment : a Review of Current Practice. », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 80, p. 247-266, 1982.
- [OHA 83] OHAYON R., VALID R., « True Symmetric Formulation for Fluid-Structure Interaction in Bounded Domains. Finite Element Results. », *Numerical Methods in Coupled Systems*, p. 293-325, 1983.

- [PES 98] PESEUX B., PIARD A., « Dynamic Response of Submersed Structures in Bounded Domain with Gravity Waves », *Pressure Vessel and Piping*, Vancouver, August 1998, ASME, 1998.
- [PES 01] PESEUX B., Contribution à l'étude de structures partiellement ou totalement immergée en matériau homogène ou en composite, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 2001.
- [RAJ 26] RAJAKUMAR C., ROGERS C., « The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, page 1991, 1009-1026.
- [RAV 83] RAVIART P., THOMAS J., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
- [SAL 02] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [SAN 88] SANDBERG G., GÖRANSSON P., « A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 123, n°3, p. 507-515, 1988.
- [SCH 81] SCHMIDT E., *Properties of Water and Steam in SI-Units. 0-800 °C, 0-1000 bar*, Springer-Verlag, 1981.
- [SCH 01] SCHOTTÉ J., Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible, Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2001.
- [SIG 04a] SIGRIST J., Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire. Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Ecole centrale de Nantes, 2004.
- [SIG 04b] SIGRIST J., LAINÉ C., PESEUX B., « Dynamic Analysis of a Coupled Fluid-Structure Problem with Fluid Sloshing », *Pressure Vessel and Piping*, San Diego, July 2004, ASME, 2004.
- [SIG 05] SIGRIST J., LAINÉ C., PESEUX B., « Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure », *Mécanique & Industries*, vol. 6, n°5, p. 553-563, 2005.
- [SIG 07] SIGRIST J., GARREAU S., « Dynamic Analysis of Fluid-Structure Interaction Problems with Spectral Method Using Pressure-Based Finite Elements », *Finite Element Analysis in Design*, vol. 43, n°4, p. 287-300, 2007.
- [SIG 08] SIGRIST J., Introduction aux méthodes numériques de résolution de problèmes d'interaction fluide/structure, Ecole Centrale de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2005-2008.
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R., *The Finite Element Method. Basic Formulation and Linear Problems (4th edition)*, Mac-Graw Hill, 1989.