HAL open science

Transformation de Hilbert et Bancs de Filtres

Gregory Beylkin, Bruno Torrésani

▶ **To cite this version:**

Gregory Beylkin, Bruno Torrésani. Transformation de Hilbert et Bancs de Filtres. Workshop Temps-Fréquence, Ondelettes et Multirésolution, 1994, Lyon, France. pp. 25.1-25.4. hal-01742123

HAL Id: hal-01742123

https://hal.science/hal-01742123v1

Submitted on 23 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TRANSFORMATION DE HILBERT ET BANCS DE FILTRES

G. Beylkin*, B. Torrésani

CPT, CNRS-Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France

Abstract

Nous décrivons une nouvelle méthode permettant de réaliser des opérateurs en termes de bancs de filtres. Nous nous concentrerons plus particulièrement sur la transformée de Hilbert, pour laquelle des filtres approchés (mais aussi précis que l'on veut) peuvent être construits, produisant des ondelettes "presque progressives". Nous montrerons aussi comment la méthode permet d'obtenir des représentations de signaux par superposition de composantes modulées en amplitude et fréquence.

I INTRODUCTION

Le but de cette note est de décrire une méthode (développée dans [2]) permettant une implémentation rapide et précise d'une certaine classe d'opérateurs, au moyen d'une analyse multirésolution et des bancs de filtres associés. Nous nous concentrerons sur le cas de la Transformation de Hilbert qui constitue un exemple illustrant les difficultés que l'on peut rencontrer, et est en outre d'une importance cruciale en traitement du signal.

La transformation de Hilbert est un opérateur qui peut être représenté efficacement en utilisant des ondelettes. Il est donc naturel d'utiliser la structure multirésolution sous-jacente, et les bancs de filtres associés [5], [4] pour en obtenir une représentation numérique efficace [1].

Nous décrivons ici une approche un peu différente, basée sur une approximation simple de la transformée de Hilbert d'une ondelette, et des filtres associés. La somme de l'ondelette et de i fois sa transformée de Hilbert (approchée) est alors une ondelette progressive, bien adaptée à l'analyse temps-fréquence.

II LA TRANSFORMEE DE HILBERT

II.1 Ondelettes "presque progressives"

Considérons pour simplifier une analyse multirésolution classique à support compact (voir e.g. [3], [1]),

$$\ldots \subset \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_{-2} \subset \ldots \subset L^2(I\!R) \tag{2.1}$$

*Adresse permanente: Program in Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80304, USA

de fonction d'échelle $\phi(x)$ et ondelette $\psi(x)$. On notera $\mathbf{W}_j$ le complement orthogonal de $\mathbf{V}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-1}$,

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j. \tag{2.2}$$

Soit M le nombre de moments nuls de $\psi(x)$, *c.à.d.*, $\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, .., M-1$. On notera aussi $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$ les polynômes trigonométriques 2π-périodiques tels que $\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ et $\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ et $H = \{h_\ell\}_{\ell=0}^{L-1}$ and $G = \{g_\ell\}_{\ell=0}^{L-1}$, leurs coefficients de Fourier. Alors

$$\sum_\ell \ell^m g_\ell = 0, \quad m = 0, 1, .., M-1. \tag{2.3}$$

Il est bien connu que la transformée de Hilbert de $\psi(x)$ est aussi une ondelette:

$$[\widehat{\mathcal{H} \cdot \psi}](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\psi}(\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\xi) m_1\left(\tfrac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\tfrac{\xi}{2}\right) \tag{2.4}$$

Soit maintenant la fonction 4π-périodique

$$m_2(\xi) = -\mathrm{i} \sum_k \mathrm{sgn}(\xi + 4\pi k) m_1(\xi + 4\pi k) \chi_{[-2\pi, 2\pi]}(\xi + 4\pi k). \tag{2.5}$$

Alors compte tenu de la décroissance de $\hat{\phi}(\xi)$ à l'infini, et bien que $-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\xi)m_1(\xi)$ ne soit pas périodique, le produit $-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\xi)m_1(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ peut être convenablement approximé par $m_2(\xi)\hat{\phi}(\xi)$.

Théorème 1 *1. Les coefficients de Fourier b_ℓ de $m_2(\xi)$ sont donnés par*

$$b_\ell = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{g_k}{k - \frac{\ell}{2}} & \forall \ell \text{ impair} \\ 0 & \forall \ell \text{ pair} \end{cases} \tag{2.6}$$

2. Les coefficients b_ℓ ont le comportement asymptotique suivant

$$b_{2\ell-1} \sim O((2\ell - 1)^{-M-1}) \tag{2.7}$$

*Preuve:*Les coefficients de Fourier de $m_2(\xi)$ sont aisément obtenus par un calcul direct. D'autre part, la décroissance de $b_{2\ell-1}$ est gouvernée par la regularité de $m_2(\xi)$ à l'origine, *c.a.d.* par le nombre de moments nuls de $\psi(x)$. Le comportement asymptotique (2.7) est obtenu à partir d'un développement de Taylor de (2.6), en utilisant les moments nuls du filtre $\{g_\ell\}$. $\diamond$

On dispose ainsi d'une expression approchée pour la transformée de Hilbert d'une ondelette, basée sur des bancs de filtres, et donc aisément implémentable. La précision de l'approximation est directement liée à la décroissance de $\hat{\phi}$, donc à la régularité de ϕ.

II.2 Transformée de Hilbert de signaux passe-bande

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas de signaux $f(x)$ qui sont correctement décrits par leur projection sur $\mathbf{V}_{j_0}$, par exemple tels que $S_{j_0} f(k) = f(k) + O(2^{j_0 M'})$ (ceci peut être obtenu $\forall f \in C^r(\mathbb{R})$, $r > M'$ par un choix approprié d'ondelette, i.e. en utilisant des fonctions

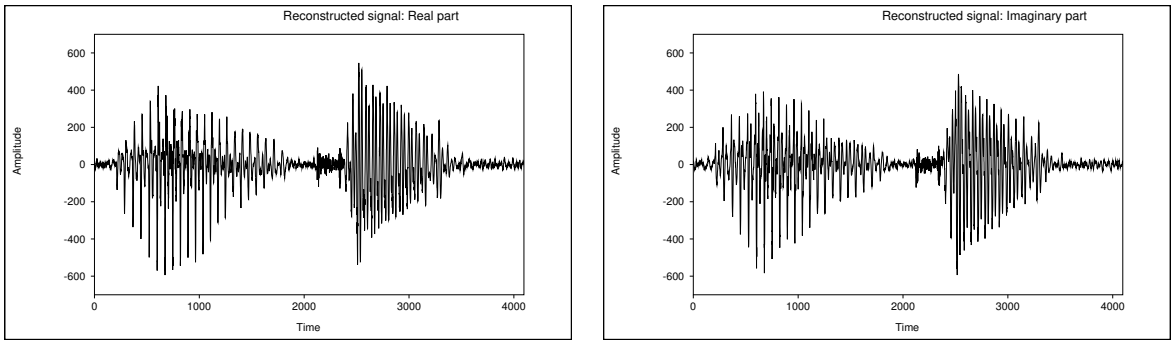

Figure 1: Un exemple de transformée de Hilbert de signal de parole (ici /un-deux/)

d'échelle possédant M' moments nuls). Alors, si l'on note $\psi_{jk}(x) = 2^{-j}\psi(2^{-j}(x-k))$, $\phi_{jk}(x) = 2^{-j}\phi(2^{-j}(x-k))$, et $\forall f \in L^2(I\!R)$, $T_j f(k) = \langle f, \psi_{jk}\rangle$, $S_j f(k) = \langle f, \phi_{jk}\rangle$

$$f(k) = S_J f(k) + \sum_{j=j_0+1}^{J} T_j f(k) + O(2^{j_0 M'}) \tag{2.8}$$

Mais $T_j[\mathcal{H}\cdot f](k) = \langle \mathcal{H}\cdot f, \psi_{jk}\rangle = -\langle f, [\mathcal{H}\cdot\psi]_{jk}\rangle$ de sorte que pour j_0 assez grand, et avec des hypothèses similaires sur $\mathcal{H}\cdot f$,

$$[\mathcal{H}\cdot f](k) \approx S_J[\mathcal{H}\cdot f](k) - \sum_{j=j_0+1}^{J} W_j f(k) \tag{2.9}$$

où

$$W_j f(k) = \sum_{\ell} b_{2\ell-1} S_j f(k - 2^{j-2}(2\ell-1)) \tag{2.10}$$

On a donc

Théorème 2 *Soit $f \in C^r(I\!R)$ telle que $\mathcal{H}\cdot f \in C^{r'}(I\!R)$, avec $r, r' > M'$. Alors, si $\phi(x)$ est telle que $S_{j_0} f(k) = f(k) + O(2^{j_0 M'})$,*

$$[\mathcal{H}\cdot f](n) = S_J[\mathcal{H}\cdot f](n) - \sum W_j f(n) + O((1+2\pi)^{-\alpha M}) \tag{2.11}$$

(α étant l'exposant de Hölder de ϕ).

Ainsi, tant que pour un J assez grand, la composante $S_J f(k)$ du signal $f(k)$ peut être négligée, l'algorithme (2.9) fournit une bonne approximation de la transformée de Hilbert de f.

Ceci est illustré en figure 1, où sont représentés le signal de parole /un-deux/, ainsi que sa transformée de Hilbert, calculée par la méthode développée ici.

III REPRESENTATION DE SIGNAUX PAR AMPLITUDE ET PHASE LOCALES

Tout signal peut être représenté sous forme d'amplitude et phase locales, utilisant sa représentation canonique. Plus précisément, $Z_f(x) = f(x) + i[\mathcal{H}\cdot f](x)$ est appelé le signal analytique

de $f(x)$, auquel l'on peut associer la paire canonique $A_f(x) = |Z_f(x)|$,$\omega_f(x) = \arg Z_f(x)$. La frequence instantanée est alors définie comme $\nu_f(x) = \frac{1}{2\pi}\omega'(x)$.

Néanmoins, il est facile de voir sur la figure 1 qu'une telle représentation n'est que rarement pertinente, à cause des fortes oscillations qui sont présentes sur l'amplitude, causées par interférence de plusieurs composantes contenues dans le signal. Pour mener à bien ce programme, on a donc besoin dans un premier temps de séparer ces composantes, avant de rechercher des amplitudes et fréquences locales.

Revenons à notre approche discrète, pour remarquer que la méthode décrite plus haut produit aussi directement une représentation des signaux sous forme de superposition de composantes définies par une amplitude et une fréquence locales:

$$f(n) = \mathcal{R}e \sum_j Z_j f(n) = \sum_j \mathcal{R}e \left[T_j f(n) + iW_j f(n)\right] \tag{3.12}$$

Z_j peut être vue comme une "sous-bande analytique discrète" du signal. De nouveau, il est facile d'obtenir à partir de cette "sous-bande analytique discrète" les amplitudes et fréquences locales des sous-bandes:

$$A_j f(n) = |Z_j f(n)| \tag{3.13}$$

$$\nu_j f(n) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{T_j f(n) W_j f'(n) - T_j f'(n) W_j f(n)}{A_j f(n)^2}\right) \tag{3.14}$$

Des exemples de telles décompositions sont décrits dans [2]. L'un des buts recherchés est d'arriver à obtenir des modèles de sons (par exemple), à travers des algorithmes efficaces. Ce programme est en cours de développement.

References

[1] G. Beylkin, R. R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 44:141–183, 1991. Yale University Technical Report YALEU/DCS/RR-696, August 1989.

[2] G. Beylkin and B. Torrésani. Implementation of operators via filter banks; Autocorrelation shell and Hardy wavelets. 1994.

[3] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.

[4] S. Mallat. Multiresolution approximation and wavelets. Technical report, GRASP Lab, Dept. of Computer and Information Science, University of Pennsylvania.

[5] M. J. Smith and T. P. Barnwell. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Transactions on ASSP*, 34:434–441, 1986.