



HAL
open science

DIOPHANTE ET L'ALGÈBRE

Nicolas Farès

► **To cite this version:**

Nicolas Farès. DIOPHANTE ET L'ALGÈBRE. Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth., , 2017, ISBN: 978-614-432-848-4. hal-01741649

HAL Id: hal-01741649

<https://hal.science/hal-01741649>

Submitted on 23 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DIOPHANTE ET L'ALGÈBRE

Par Nicolas Farès : nfares55@hotmail.com
(22-1-2018)

Équipe d'Études et de Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe
Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes

La présente étude est extraite du chapitre II du livre de l'auteur du présent article, intitulé : *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth.

1. Introduction.

Depuis le début de sa fondation dans le livre d'al-Khwārizmī, l'algèbre demeure la discipline qui s'occupe de la résolution des équations (ou des systèmes d'équations) algébriques, et du calcul polynomial. Par équation algébrique, nous entendons une équation dont les deux membres sont des expressions polynomiales. Depuis le XVI^e siècle, notamment avec Descartes (1596-1650) et l'utilisation généralisée des nombres négatifs, l'équation algébrique prend la forme d'une expression polynomiale égalant 0.¹

L'algèbre est née avec le mot « chose », c'est-à-dire depuis l'introduction de ce mot dans le dictionnaire mathématique, et l'application des opérations de l'arithmétique (produit, somme, ...) aux choses et aux polynômes^(*). Le transport (ou plutôt, l'extension) de ces opérations du domaine des nombre au domaine plus large qui

¹ c. à. d, dans le cas d'une seule inconnue x , l'équation prend la forme :

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i = 0, \text{ où les coefficients } a_i \text{ appartiennent à un certain anneau.}$$

^(*) Le mot « chose » a été introduit, pour la première fois dans le dictionnaire mathématique, par al-Khwārizmī (Mohamed ibk Mūsā) dans son livre : « *al-jabr wa al-muqābala* » composé à Bagdad sous le règne du Calife Al-Ma'mūn (813-833). Ce mot, choisi délibérément parce qu'il ne désigne pas un objet déterminé, se note, communément, depuis le XVI^e siècle, x . Cette lettre de l'alphabet latin désignait (souvent) jusqu'au XX^e siècle l'inconnue de l'équation mais aussi l'indéterminée du polynôme ; actuellement on désigne (souvent) cette dernière par X , pour la distinguer de l'inconnue.

est celui des « choses » est l'acte génial d'al-Khwārizmī qui a marqué la naissance de la nouvelle discipline : l'algèbre.

La suite de cet article a pour objet de montrer que la qualification des *Arithmétiques* de Diophante, comme étant un travail en algèbre, est un abus qui attribue à cette œuvre un domaine étranger à la mathématique Diophantienne. Dans un autre endroit ([Farès, 2017, pp. 41-49]), nous avons montré que, de même, les propositions des *Éléments* d'Euclide que certains historiens des sciences ont traitées comme étant algébriques ou appartenant à l'algèbre géométrique, ne le sont pas effectivement. Cela s'accorde avec les vues de R. Rashed sur ce sujet. Ce dernier a déjà montré que la mathématique indienne ancienne ne contient pas de l'algèbre et qu'elle ne constitue pas une source de l'algèbre d'al-Khwārizmī [Rashed, 2007, pp. 64-79].

2. “Commencement” de l'algèbre – Problème des sources du livre d'al-Khwārizmī : des vues non assez claires.

Les discussions des historiens des mathématiques reflétaient, au moins jusqu'au dernier quart du siècle dernier, une certaine incertitude, voire des controverses, sur la question des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī, donc sur celle du “*commencement*” de l'algèbre, ces deux questions étant étroitement liées.

A. Anbouba décrit cette incertitude en écrivant, à propos de l'algèbre d'al-Khwārizmī: “*pour les spectateurs lointains que nous sommes, l'histoire de l'algèbre chez les arabes s'ouvre sur un coup de théâtre...*” [Anbouba, 1978, p. 66]. Vers la fin du 20^e siècle, R. Rashed est encore plus explicite sur ce sujet, en se demandant: “*... pourquoi, nouvelle-née, cette discipline n'en est pas moins adulte et, pour quelle raison cette contribution dont plusieurs aspects suggèrent qu'elle couronne une activité passée, se présente cependant comme un commencement radical*” [Rashed, 1984 (1), p. 19].

Nous pensons qu'A. P. Youschkévitch a exprimé une opinion partagée par les historiens des mathématiques quand il a écrit, dans les années 60 du 20^e siècle: “*le problème des sources d'al-Khwārizmī demeure encore entier*” ; et, en comparant l'algèbre d'al-Khwārizmī avec la mathématique indienne, il a poursuivi: “*Mais son algèbre (i.e.*

celle d'al-Khwārizmī) présente une série de particularités. On ne trouve dans l'algèbre indienne aucune explication géométrique des règles de résolution des équations du second degré, ni des opérations utilisant des grandeurs algébriques, alors qu'elles tiennent chez al-Khwārizmī une place prépondérante". Après avoir comparé le style du livre d'al-Khwārizmī avec celui des *Eléments* d'Euclide (notamment dans le livre II), il conclut que "le style des explications et des démonstrations est, chez ces deux auteurs, fondamentalement différent. Si l'algèbre géométrique des anciens a exercé une influence sur al-Khwārizmī, cela n'a pu se faire que sous une forme profondément transformée et adaptée aux besoins de l'algèbre numérique"; et, semble-t-il pour rappeler que le problème de la parenté de cette algèbre n'est toujours pas tranché, il ajoute: "Mais c'est là une hypothèse qui, bien entendu, ne repose jusqu'à présent sur aucune justification historique". D'autre part, Youschkévitch ne croit pas à une éventuelle influence diophantienne sur l'algèbre d'al-Khwārizmī, rappelant qu'« aussi loin que l'on puisse remonter, les premières traductions arabes de Diophante, furent faites à Bagdad par le savant chrétien Qustā ibn Lūqā al-Ba'albakkī, originaire de Baalbek (Héliopolis) au Liban, mort en 912 en Arménie, et plus tard par Abu-l-Wafā' » [Yousckévitch, 1976, pp. 42-43].

A. Anbouba résume clairement les idées, encore en cours, à propos de l'influence de l'une ou l'autre des mathématiques indienne et grecque sur l'algèbre d'al-Khwārizmī: « Dès le début du XIX^e siècle, les discussions opposent les tenants d'une ascendance grecque aux partisans de l'origine indienne et n'aboutissent pas à une conclusion probante » [Anbouba, 1978, p. 73].

Par ailleurs, bien que le style d'al-Khwārizmī rappelle les travaux indiens en ce qui concerne les algorithmes de résolution des équations du second degré, il rappelle aussi, par ses démonstrations géométriques, le style du livre II des *Eléments* d'Euclide. Cependant, les deux mathématiques, indienne et grecque, ne sont pas les seules sources probables d'al-Khwārizmī. Ce mathématicien a en effet vécu dans une région du monde où l'important héritage et les traditions scientifiques de la Babylonie auraient une grande chance de survivre

et de se faire sentir, sous une forme ou une autre, même dans la vie quotidienne; l'influence babylonienne n'est donc pas à écarter. A ce propos, A. Anbouba écrit: *“Ce n'est que vers 1930, avec le déchiffrement plus large des tablettes babyloniennes que les origines de l'algèbre arabe (et de la géométrie grecque) commencent à recevoir un éclaircissement plus satisfaisant...”* ; il va encore plus loin, soupçonnant une influence babylonienne sur les *Arithmétiques* de Diophante, sur le livre II des *Eléments* et sur l'algèbre d'al-Khwārizmī : *“Les propositions d'algèbre géométrique des Eléments d'Euclide dont la nature et l'objet sont si éloignés de l'idéal mathématique grec et des objectifs du livre prennent alors leur véritable signification d'apport étranger. De même se trouve éclairée l'étrange physionomie d'Héron d'Alexandrie et de Diophante. L'algèbre d'al-Khwārizmī ne serait alors qu'une résurgence de ce vieux courant babylonien dont l'évolution et la transmission au cours des siècles restent cependant très obscures”* [Anbouba, 1978, pp. 73-74].

Nous pensons que la cause principale de cette incertitude sur la question des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī, réside dans le manque de données historiques. En effet, al-Khwārizmī ne fait allusion à aucune de ces sources, tandis que dans son livre d'arithmétique, il exprime explicitement le fait qu'il s'y appuie sur des modèles indiens². Ce manque a donné lieu à des conjectures dont certaines étaient admises comme si c'étaient des axiomes, vu la notoriété scientifique des historiens qui les ont énoncées et leur reprise, sans discussion, par les disciples et les successeurs de ces historiens. En l'absence de références précises, il était naturel de voir surgir des contradictions entre certaines de ces conjectures ainsi qu'une sorte de confusion entre la question des “sources” du livre d'al-Khwārizmī et celle des “origines” de l'algèbre. Il était admis par

² Le traité d'arithmétique d'al-Khwārizmī ne nous est parvenu que dans une traduction latine. Dans les premières lignes de ce livre il écrit: = « ... nous avons décidé d'exposer la manière de compter des Indiens à l'aide des IX caractères... » [Yousckévitch, 1976, p. 16]. D'autres œuvres d'al-Khwārizmī évoquent l'Inde, d'une façon ou d'une autre.

exemple que *Les Arithmétiques* de Diophante est un livre d'algèbre ou, au moins, qu'il constitue une des origines de l'algèbre³. De même, le livre II des *Eléments* d'Euclide était considéré comme le début de l'algèbre géométrique⁴. On avait aussi parlé de travaux algébriques dans la mathématique babylonienne⁵ et, depuis le début du XX^e siècle, les idées qui voyaient dans certains travaux indiens du VI^e ou VII^e siècle des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī ont acquis une large audience.

En 2007, R. Rashed a publié un livre sur l'algèbre d'al-Khwārizmī visant, d'après son titre et son contenu, à trancher la question du « commencement de l'algèbre ». Il a étudié le problème des sources cette algèbre dans un paragraphe intitulé « les lectures mathématiques d'al-Khwārizmī » [Rashed, 2007, pp. 31-79]. Cette étude prouve qu'al-Khwārizmī a eu connaissance des *Eléments* d'Euclide et en particulier du livre II de cette œuvre. Elle prouve aussi qu'il a connu, de près, des travaux géométriques d'Héron d'Alexandrie dont il a utilisé certains problèmes. D'un autre côté, cette étude infirme l'idée considérant *Les Arithmétiques* de Diophante comme une source du livre d'al-Khwārizmī ou comme un travail algébrique qui lui est antérieur. De plus, elle écarte la possibilité de considérer les travaux indiens (ceux de Brahmagupta et d'Āryabhata, en particulier) comme des sources du livre d'al-Khwārizmī. Pour

³ Dans [Rashed, 2007 p. 61], on trouve cités plusieurs ouvrages modernes qui adoptent une telle opinion. Dans un ouvrage antérieur [Rashed, 1984 (1) p. 60], l'auteur rappelle que Paul Tannery considère que l'algèbre arabe “ne s'élève d'ailleurs nullement au dessus du niveau atteint par Diophante”. Voir aussi [Bellosta, 2010] qui se réfère au livre de P. Tannery : *La géométrie grecque* p. 6 ; on peut aussi consulter [Taton, 1957, pp. 343-344].

⁴ A partir de P. Tannery, d'après [Dahan-Delmico, Peiffer, 1986, p. 76].

⁵ Certains grands historiens des sciences sont allés jusqu'à considérer les babyloniens comme étant “les inventeurs de l'algèbre et l'on peut penser que Diophante s'est inspiré directement de leurs méthodes” [Taton, 1957, p. 116]. Les titres de certains ouvrages contribuent, d'une façon ou d'une autre, à augmenter la confusion autour du commencement de l'algèbre, comme par exemple “4000 ans d'algèbre” : 4000 Jahre Algebra, Geschichte, Kulturen, Menschen. H. W. Alen; A. Djafari Naini; M. Folkerts; H. Schlosser; K.H.Schlote; H.Wussing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

arriver à ces conclusions, R. Rashed s'est basé sur l'analyse de chacun de ces travaux anciens ; la plupart des résultats de son étude ont été évoqués dans des publications antérieures à celle de son livre sur al-Khwārizmī ([Rashed, 1984 (2), 1984 (3), 1994]), ainsi que dans des interventions non publiées. Une contribution récente ([Farès, 2017, ch. I, II, III]), confirme la naissance de l'algèbre, en tant que discipline mathématique, dans le livre algébrique d'al-Khwārizmī et jamais avant la parution de ce livre. Un article qui l'a précédée ([Farès, 2015]) montre que ce livre d'al-Khwārizmī contient une première forme d'une axiomatique de l'algèbre.

3. Diophante et l'algèbre.

Si l'hypothèse selon laquelle certains livres des *Éléments* d'Euclide contiennent des propositions algébriques est facilement réfutable⁶, il n'en est pas de même pour le livre de Diophante intitulé *Les Arithmétiques*. Jusqu'à nos jours, une grande proportion d'articles consacrés à l'enseignement ou à la culture générale, qualifient ce savant grec alexandrin de « *père de l'algèbre* ». Une telle qualification n'est pas sans fondement ; elle reprend des idées avancées par des mathématiciens de taille depuis le XVI^e siècle, et admises et répétées jusqu'à nos jours.

3. 1. Diversité des idées sur la mathématique du livre de Diophante.

En fait, les commentaires et évaluations concernant la nature de la mathématique de cette œuvre diffèrent d'un historien des mathématiques à un autre. Ces évaluations sont souvent marquées par leur style imprécis et semblent éviter de prononcer un jugement décisif. Nous croyons que cette situation est causée par le fait que ce livre n'est pas un livre arithmétique au sens euclidien qui est notre conception actuelle de l'arithmétique. Cela veut dire qu'il n'est pas un livre qui s'occupe des propriétés du nombre naturel conformément au modèle donné dans les Livres VII, VIII et IX des *Éléments*. Il n'est pas, non plus, un livre d'arithmétique pratique s'intéressant aux

⁶ Voir [Farès, 2017, ch. II].

opérations arithmétiques sur les nombres. De même, comme on le verra, il n'est pas un livre d'algèbre. En fait, le contenu de ce livre peut être lu de différentes façons, ce qui fait que chaque mathématicien ou historien des mathématiques peut le lire selon son point de vue ou sa propre position : certains l'ont considéré comme un livre d'arithmétique, d'autres l'ont vu comme un livre algébrique, d'autres encore y trouvent des liens avec la géométrie algébrique⁷, ...

Il n'y a pas lieu de s'étendre, ici, sur les autres raisons qui ont favorisé ces divergences d'opinion et qui ne dépendent pas du contenu du livre. Notons, néanmoins, qu'une de ces raisons réside dans l'insuffisance d'informations sur les mathématiques écrites en arabe, insuffisance qui a duré jusqu'au milieu du XX^e siècle.

Or, pour pouvoir évaluer l'exploit algébrique d'al-Khwārizmī et le développement de l'algèbre à sa suite, on doit avoir un aperçu de la mathématique du livre de Diophante. Cela permettra, aussi, de former une idée claire (dans la limite du possible) de la situation de ce livre vis-à-vis du commencement de l'algèbre en tant que discipline. Concernant ce point, il nous semble préférable de commencer par énoncer le résultat suivant, auquel nous sommes arrivés à la suite d'une lecture de cette œuvre et de certains commentaires qui s'y rapportent :

« Le livre de Diophante ne constitue pas un commencement de l'algèbre ; son objet n'est pas l'introduction de l'algèbre et il ne figure pas parmi les sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī. En revanche, il contient un grand nombre d'outils, de moyens et de règles que l'on peut qualifier d'*algébriques*. De tels moyens ont, en effet, été utilisés depuis le IX^e siècle, à partir d'al-Khwārizmī, dans l'édification et le développement de l'algèbre ».

Nous pensons que la présence de tels moyens est la raison pour laquelle les *Arithmétiques* étaient considérées comme un ouvrage algébrique. C'est pour cette raison aussi qu'on ne doit pas s'étonner du fait que ce livre ait été traduit en arabe (vers la fin du IX^e siècle⁸, un demi-siècle après al-Khwārizmī) sous le titre *L'art de l'algèbre* et

⁷ Voir [Rashed et Houzel, 2013, p. 20].

⁸ faite par Qustā ibn Lūqā (fin du 9^e s.).

que ses propositions aient été transcrites dans le langage de l'algèbre d'al-Khwārizmī. De ce fait, comme le dit bien R. Rashed, Diophante (qui a vécu probablement au III^e siècle de notre ère) fait figure de successeur du mathématicien arabe, bien qu'il soit chronologiquement son prédécesseur [Rashed, 2007, p. 61, et Rashed et Houzel. 2013, p. 20].

Notons à ce propos que les historiens des sciences s'accordent sur le fait que le livre de Diophante n'était pas une des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī ; ils s'entendent aussi sur le fait qu'il n'était pas parmi les sources d'Abū-Kāmil (vers la fin du IX^e siècle) bien que celui-ci ait introduit dans son livre algébrique de nombreux problèmes indéterminés, dans le style diophantien [Anbouba, 1979, p. 135, Rashed, 2003 et Sésiano, 1982, p. 9]. Aucune trace de ce livre ne se trouve dans l'algèbre arabe précédant sa traduction en cette langue. Pourtant, son influence est remarquable et remarquée depuis le 10^e siècle dans certains travaux d'Abū-al-Wafā (m. vers 997), puis notamment dans l'importante œuvre algébrique d'al-Karajī (XI^e s.) intitulée *al-fakhrī*, où plusieurs problèmes indéterminés sont empruntés aux *Arithmétiques* et traités algébriquement⁹.

De retour à l'expression « *père de l'algèbre* », on voit bien qu'elle manque de précision. En effet, elle pourrait signifier que le livre de Diophante était le premier livre d'algèbre, ou qu'il a été une des références d'al-Khwārizmī ou, enfin, qu'il constitue une des sources de l'algèbre. Ainsi, parler de la paternité de l'algèbre sans en clarifier le sens, pourrait conduire à des confusions : on risque alors de faire perdre de vue la question du commencement de l'algèbre en faisant l'amalgame entre « commencement » et « sources ». Celles-ci pourraient, dans un certain sens, remonter aux mathématiques égyptienne ou babylonienne, du fait que ces deux mathématiques comprenaient des pratiques « *algébriques* » (manipulations

⁹ Pour plus de détails sur ce sujet, voir les livres suivants qui nous ont bien aidé dans la rédaction de ce paragraphe : [Rashed et Houzel. 2013, et notamment l'introduction, pp. 1-46], [Ver Eecke, 1926], les deux livres de R. Rashed [Rashed, 1984 et, 1975] et [Sésiano, 1982].

d'inconnues et d'équations)¹⁰. Nous pensons que cela a appelé C. Houzel et R. Rashed à écrire : « *Après une analyse philologique et philosophique maîtrisée, Klein finit par dire que Diophante correspond au « primitive stage of algebra ».* Il reste que cette démarche phénoménologique intéressante lorsque c'est Klein qui est à l'origine (même si le texte révèle une représentation gauche de l'histoire des mathématiques) s'est récemment révélée néfaste entre des mains moins expertes » [Rashed et Houzel. 2013, p. 21].

3. 2. Aperçu rapide du contenu du livre de Diophante.

La période dans laquelle le savant Alexandrin avait vécu et écrit (en grec) les *Arithmétiques*, n'est pas connue avec précision. Il est probable qu'elle se situe entre le III^e et le IV^e siècle de notre ère. Cette œuvre comprend, d'après son auteur lui-même, treize livres (ou grands chapitres). Jusqu'à une date récente, on croyait que seuls six de ces treize livres avaient été conservés. Ces six livres, écrits en leur langue originale, ont été découverts par l'astronome Régiomontus, (1436-1476) ; mais leur contenu restait inconnu en Europe jusqu'à la traduction des cinq premiers par le mathématicien Raphaël Bombelli (1526-1572) en 1572, douze siècles environ après leur publication¹¹. A partir du VII^e siècle, plusieurs mathématiciens ont effectué des traductions plus précises de ces six livres en des langues européennes, avec parfois des éditions complètes ou partielles¹². Leur traduction

¹⁰ Voir par exemple [Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, pp. 72-76].

¹¹ Paul Ver Eecke dit que Bombelli avait mis dans son important ouvrage algébrique, 143 problèmes des cinq premiers livres, dans une traduction non assez fidèle aux textes. Il dit aussi qu'une première infiltration de quelques problèmes des *Arithmétiques* en Europe est détectée dans les œuvres de Léonard de Pise (Fibonacci) en 1202 et 1228 [Ver Eecke, 1926, p. LIX]. Mais R. Rashed clarifie cette question en montrant que les problèmes de style diophantien qui se trouvent chez Fibonacci ne sont pas empruntés au livre de Diophante : « *Notons aussi que les problèmes que Woepcke a cru avoir été empruntés par Fibonacci au mathématicien de la fin du X^e siècle, al-Karajî, ou à Diophante via ce dernier, se trouvent tous dans le livre d'Abū Kāmil. Or rien n'indique, contrairement à ce que croyait Woepcke, que Fibonacci connaissait le livre d'al-Karajî –al-Fakhrî– non plus que les Arithmétiques de Diophante* [Rashed, 2003].

¹² Pour plus de détails, voir [Ver Eecke, 1926, pp. LXII-LXVII].

française accompagnée de notes très importantes a été réalisée par Paul Ver Eeke (1867-1959) en 1926.

En 1971, R. Rashed a découvert quatre autres livres, à la ville de Meshhed en Iran¹³. Ces livres font partie de la traduction des *Arithmétiques* en arabe faite par Qustā ibn Lūqā. Ils ont été édités par R. Rashed en arabe en 1975, puis réédités, commentés et traduits en français, par lui en 1984 [Rashed, 1975 et 1984]. Entre temps, Jacques Sésiano les a édités accompagnés de notes historiques en 1982 [Sésiano, 1982].

La découverte de ces quatre livres a changé l'ordre supposé des livres des *Arithmétiques* : les Livres I, II et III de la version grecque ont gardé leur ordre initial. Les quatre livres de la version arabe se sont avérés être les livres IV, V, VI et VII ; les livres de la version grecque qui étaient numérotés 4, 5, et 6, viennent après le Livre VII. L'ensemble des dix livres contient 290 problèmes dont 189 sont dans les six livres de la version grecque. Cette découverte a surtout influé sur les évaluations que les historiens des sciences ont faites concernant le rôle des *Arithmétiques* dans le développement de la mathématique ultérieure.

Diophante commence son livre en s'adressant à une personne qui s'appelle Dionysius : « ... j'ai entrepris d'exposer **la nature et la puissance des nombres**, en commençant par les bases sur lesquelles les choses sont établies », puis il continue, quelques lignes plus loin : « Comme tu sais, entre autres choses, que tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités, il est clair que leur établissement s'étend à l'infini. Parmi les nombres, on rencontre notamment : les carrés, qui sont formés au moyen d'un nombre multiplié par lui-même, nombre qui est appelé le côté du carré ; d'autre part les cubes, qui sont formés au moyen des carrés multipliés par leurs côtés ; ensuite les bicarrés, qui sont formés au moyen des carrés multipliés par eux-mêmes ; puis encore les carré-cubes, qui sont formés au moyen des carrés multipliés par les cubes ayant même côté que ces carrés ; enfin les cubo-cubes, qui sont formés au moyen des cubes multipliés par eux-mêmes. Or, il se fait que la combinaison

¹³ Voir [Rashed, 1984 (2), p. v].

de beaucoup de problèmes arithmétiques résulte soit de la somme de ces nombres, soit de leur différence, soit de leur multiplication, soit du rapport qu'ils ont entre eux, ou qu'ils possèdent respectivement avec leurs propres racines ; et ces problèmes seront résolus si tu suis la voie qui sera indiquée ci-après » [Ver Eecke, 1926, p. 1-2].

Le sujet du livre est, donc, « le nombre » qui est la base de l'arithmétique. Diophante définit ici six types (ou espèces) de nombres¹⁴ et il dit que les problèmes arithmétiques se forment en combinant des nombres appartenant à certains de ces types, moyennant les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, etc.). Quand on reprend les problèmes du livre de Diophante (donnés, tous, sous forme de propositions), on trouve que leurs inconnues sont des nombres rationnels de l'un de ces types et leurs coefficients, des nombres rationnels. Ce qui donne raison à ce qu'avaient écrit C. Houzel et R. Rashed à ce propos : «*A partir de cette notion "d'espèce", il serait impropre de parler de polynôme et d'équation polynomiale dans les Arithmétiques au sens où l'entendent les algébristes, depuis al-Karagī au X^e siècle*» [Rashed et Houzel, 2013, p. 28].

Les problèmes des *Arithmétiques* (donnés dans les livres connus de nos jours), sont, dans leur majorité, indéterminés mais, à une certaine étape de leur résolution, Diophante transforme leurs équations en des équations déterminées en donnant des valeurs numériques à certain(e)s inconnues ou paramètres, de telle sorte qu'il arrive à une solution convenable du problème [Ver Eecke, 1926, p. XXIII].

L'inconnue est toujours un nombre (naturel ou rationnel, positif). En général, les problèmes comprennent plusieurs inconnues. Pour résoudre un problème, Diophante choisit l'une des inconnues et la pose comme inconnue principale (ou il choisit une inconnue supplémentaire, auxiliaire, comme inconnue principale), puis il exprime au cours de sa résolution, progressivement, les autres inconnues, en fonction de cette inconnue principale ; finalement

¹⁴ Les puissances du nombre arrivent, d'après ce paragraphe, à la sixième. Depuis la découverte des quatre livres de la version arabe, on sait que Diophante utilise des puissances qui vont jusqu'à la 9^e, sans la 7^e.

l'équation se trouve transformée en une équation où une seule inconnue (plus précisément une inconnue d'un type déterminé) occupe un des membres de l'équation¹⁵.

Cela veut dire que Diophante ne s'est jamais confronté au problème de résoudre des équations polynomiales pouvant contenir des puissances distinctes de la même inconnue. Ainsi, bien qu'il ait traité des problèmes qui reviennent à des équations trinômes du 2^e degré¹⁶, il ne les a pas résolues en passant explicitement par ce type d'équations : il a utilisé une inconnue auxiliaire t , et il les a transformées en des équations du type $t^2 = m$, où m est un entier rationnel positif¹⁷. De plus, le nombre élevé de problèmes qui se ramènent à des équations du premier degré à une inconnue, dans le Livre I, montre que, même ces équations ne constituaient pas pour lui un type d'équations qui a son propre algorithme de résolution.

Les méthodes de résolution ne suivent pas des règles déterminées constantes, mais résultent de manipulations ingénieuses qui diffèrent d'une équation à l'autre, ce qu'a exprimé Paul Ver Eeke en disant : « *A part les quelques règles indiquées dans le préambule, les résolutions des problèmes de Diophante ne connaissent guère des règles fixes telles que nous les comprenons aujourd'hui* » [Ver Eecke, 1926, p. XXIV].

C'est que, dans les *Arithmétiques*, Diophante n'avait pas pour but de donner, des algorithmes de résolution applicables à tel ou tel type d'équations mais, il visait, comme le remarquent R. Rashed et C. Houzel, un objectif pédagogique [Rashed et Houzel, 2013, p. 22]. Il

¹⁵ Cela veut dire que l'équation prendra à la fin la forme $x^n = m$, où x est l'inconnue principale, n est un entier naturel et m est un rationnel positif.

¹⁶ Il s'agit des problèmes 27, 28 et 30 du livre I, qui s'expriment, respectivement, en les équations : $x + y = a, x \cdot y = b$; $x + y = a, x^2 + y^2 = b$; $x - y = a, x \cdot y = b$; voir la résolution par Diophante de l'une d'elle reproduite le §3-4 dans plus bas.

¹⁷ Nous pensons qu'il les ramène à cette forme ($t^n = m$), conformément à sa méthode générale citée quelques lignes plus haut. C'est sans doute ce procédé qui est appelé, plus tard, par al-Karajī, *la méthode* ou *la voie de Diophante* (voir [Farès, 2017, ch. III, §3).

présente dans son livre un très grand nombre de problèmes numériques qu'il résout en utilisant les principes et les règles qu'il donne au début de son livre. Il exprime le fait que si le lecteur du livre considère ces problèmes comme étant des exercices, c'est-à-dire s'il s'applique à suivre attentivement et à assimiler leurs résolutions, il sera capable de résoudre d'autres problèmes en utilisant ces mêmes principes et règles. En effet, dans l'introduction de son livre, après avoir donné les définitions et les règles principales et avant de présenter les problèmes, il explique : « *Applique cela avec adresse aux données des propositions, et, autant que possible, jusqu'à ce qu'il reste une seule expression égale à une seule expression* » ; puis, il continue, quelques lignes plus loin : « *Maintenant que nous avons réuni une matière abondante sur ces expressions mêmes, entrons dans la voie des propositions. Comme ses propositions sont très nombreuses et d'une grande ampleur, et que de ce fait, elles sont lentement ratifiées par ceux qui les abordent, et qui ne sont pas secondés par leur mémoire, j'ai essayé de diviser celles qui sont susceptibles de l'être, et surtout de faire le départ de celles qui, au début, se rattachent aux éléments, en procédant, comme il convenait de le faire, des plus simples aux plus compliquées. Elles deviendront ainsi accessibles pour les commençants, et leur développement se fixera dans la mémoire. Leur élaboration sera réalisée en treize livres* » [Ver Eecke, 1926, p. 8-9]. Puis, il commence par donner les propositions des trois premiers livres.

Dans l'introduction du Livre IV, Diophante confirme le but pédagogique de son ouvrage. Parlant des problèmes qu'il avait mis dans les trois livres précédents, il explique :

« ... *Comme je les ai disposés selon des degrés que ceux qui apprennent puissent retenir et dont ils puissent saisir les significations, je trouve bon aussi, pour que rien ne t'échappe de ce qui peut être pratiqué de cet art, de te mettre par écrit –également dans ce qui suit– de nombreux problèmes de cette branche, ceux qui appartiennent à l'espèce du nombre appelé solide, aussi bien que ceux qui appartiennent à sa composition avec les deux premières espèces.*

J'y suivrai la même voie et t'amènerai ainsi à t'y élever degré par degré, et d'une branche à l'autre, pour que ceci devienne une coutume¹⁸ et une habitude. Une fois que tu as appris ce que j'ai inscrit, tu pourras résoudre de nombreux problèmes que je n'ai pas inscrits, puisque je t'aurai tracé la voie pour trouver la plupart des problèmes et que je t'aurai décrit un exemple de chaque espèce » [Rashed et Houzel. 2013, p. 22].

Ainsi, le sujet des *Arithmétiques* n'est pas la résolution d'équations polynomiales. Diophante y consigne une importante collection de problèmes dont les inconnues sont des nombres rationnels (positifs) de l'un(e) ou l'autre des espèces (ou types) qu'il définit au début du livre. Il transforme ces problèmes en des équations à plusieurs inconnues et les résout par des méthodes ingénieuses qui utilisent des moyens appelés de nos jours -après l'introduction de l'algèbre au IX^e siècle- algébriques : substitution, élimination, réduction d'une équation à une autre déjà résolue ... L'introduction de ces moyens est la raison principale pour laquelle plusieurs grands mathématiciens, à partir de Qustā ibn Lūqā, ont qualifié ce livre d'algébrique. Ce livre continue à jouer un rôle considérable dans la formation et l'inspiration des mathématiciens à travers l'histoire¹⁹, sans que cela ne change en rien sa nature²⁰. Il ne s'agit pas d'un livre en algèbre ou dont la publication a marqué le commencement de cette discipline, bien qu'il utilise des moyens que les mathématiciens, à partir du IX^e siècle, qualifient, à juste titre, d'algébriques et que les problèmes qui y soient posés et traités eussent profondément contribué, à partir de ce siècle, au développement de l'algèbre.

¹⁸ Ici le mot coutume traduit le mot arabe *دربة*, « *durba* ». Nous croyons qu'il est préférable de le remplacer par le mot « entraînement ».

¹⁹ Rappelons-nous que le *grand théorème de Fermat*, dont ce livre a été l'origine, n'a pu être résolu avant 1994. Voir le paragraphe 3. 4, plus bas (commentaire de la proposition II.8).

²⁰ D'après une analyse récente faite par R. Rashed et C. Houzel, il s'agit d'un livre plutôt arithmétique. Parlant de Diophante, ces deux chercheurs écrivent : « *Il est hors de doute que son livre est un livre arithmétique dont le domaine est celui des rationnels positifs* » [Rashed et Houzel. 2013, p. 29].

3. 3. Les moyens algébriques dans le livre de Diophante.

Après l'introduction des types de nombre au début de son livre²¹, Diophante continue : « *Il est convenu que chacun de ces nombres, après avoir reçu une désignation abrégée, constitue un élément de la théorie arithmétique* » [Ver Eecke, 1926, p. 2]. Puis il présente un symbole pour chacun de ces types. Le symbole d'un type est une lettre (ou une suite de lettres) qui est une abréviation du mot désignant ce type ; en plus il désigne l'unité par un symbole (qui est « M_0 »). Les historiens des sciences s'accordent sur le fait qu'il ne s'agit pas là de symbolisation algébrique ni même d'un début d'une telle symbolisation qui, elle, a commencé au XVI^e siècle²².

Ensuite, Diophante introduit un mot qui désigne l'inconnue : l'« *arithme* » ($\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$), qui signifie « *nombre* », et qu'il définit comme étant le nombre « *qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités* » ; il le désigne par la lettre ζ . Puis, il définit l'inverse de l'arithme et les inverses de ses puissances, jusqu'à la sixième, en prenant les parties aliquotes des nombres naturels comme modèle²³. Puis, il donne les règles de multiplication des puissances de l'arithme (*i.e.* d'un nombre quelconque) et des inverses de ses puissances, les unes par les autres, en remarquant que l'inverse de l'unité et ses puissances ou leurs produits sont, invariablement, l'unité²⁴. Il introduit la division d'une manière concise : « *Après t'avoir expliqué les multiplications des expressions que nous avons*

²¹ Les nombres carrés, cubes, ..., dans l'introduction du Livre I (voir le § 3. 2, plus haut).

²² P. Ver Eecke présente un aperçu des débuts de la symbolisation algébrique dans [Ver Eecke, 1926, p. 20].

²³ Par analogie avec les parties aliquotes d'un nombre, le tiers, le quart, ... : (n étant

un nombre, son inverse est $\frac{1}{n}$).

²⁴ Il donne les règles de la multiplication, de telle sorte que les puissances des facteurs ou des produits ne dépassent pas la 6^e : $n^i \times n^j = n^{i+j}$, où $(i + j \leq 6)$;

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n^i} = \frac{1}{n^{i+1}}$ où $(i \leq 5)$; $\frac{1}{n^i} \times n^j = \frac{1}{n^{i-j}}$ si $i \geq j$ ou $\frac{1}{n^i} \times n^j = n^{j-i}$ si $i \leq j$.

[Ver Eecke, 1926, p. 4-7].

exposées plus haut, leurs divisions sont claires » [Ver Eecke, 1926, p. 7]. L'introduction de ce nombre inconnu (ou indéterminé), l'« arithme », celle de ses puissances et de leurs inverses, et l'application de la multiplication et de la division à ces objets, constituent un des plus remarquables moyens algébriques du livre de Diophante.

Ensuite, Diophante passe à la multiplication des expressions arithmétiques formées par l'addition ou la soustraction, les unes par les autres, et donne ce que nous appelons la « règle des signes » : « *Ce qui est de manque multiplié par ce qui est de manque donne ce qui est positif ; tandis que ce qui est de manque multiplié par ce qui est positif donne ce qui est de manque. ...* » [Ver Eecke, 1926, p. 7]. On doit toutefois noter qu'il n'a pas considéré les nombres négatifs en tant que tels, mais il a manipulé des expressions arithmétiques de la forme $a - b$ où $a > b$. Il poursuit :

« Il est donc utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, à la soustraction et à la multiplication des expressions, ainsi qu'à la manière d'ajouter des expressions positives et négatives²⁵ non équipollentes²⁶ à d'autres expressions qui sont elles-mêmes positives, ou mêmes positives et négatives ; enfin à la manière de retrancher d'expressions positives et d'autres négatives, d'autres expressions soit positives, soit aussi positives et négatives ».

Il poursuit :

« Ensuite, s'il résulte d'un problème que certaines expressions sont égales à des expressions identiques mais non équipollentes, il faudra retrancher de part et d'autre les semblables des semblables, jusqu'à ce que l'on obtienne une seule expression égale à une seule expression. Si des expressions négatives se présentent de quelque manière, soit d'une part soit de part et d'autre, il faudra ajouter ces expressions négatives de part et d'autre, jusqu'à ce que les expressions deviennent positives de part et d'autre, puis retrancher de nouveau les semblables des semblables, jusqu'à ce que l'on obtienne

²⁵ C'est-à-dire qui contiennent des termes positifs et des termes négatifs.

²⁶ D'après, P. Ver Eecke, il s'agit d'expressions contenant des termes positifs et des termes négatifs affectés de coefficients différents.

une seule expression égale à une seule expression de part et d'autre ». Et, il reprend : « *Applique cela avec adresse aux données des propositions, et autant que possible, jusqu'à ce qu'il reste une seule expression égale à une seule expression ...* ».

3. 4. Exemples de propositions des Arithmétiques.

Dans ce paragraphe, nous reproduisons quelques propositions du Livre de Diophante, susceptibles de donner une idée (loin d'être suffisante) de sa façon de poser les problèmes et de les résoudre.

Proposition I.1 : « *Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée* ».

Proposition I.2 : « *Partager un nombre proposé en deux nombres qui soient dans un rapport donné* ».

Proposition I.3 : « *Partager un nombre proposé en deux nombres qui soient dans un rapport donné, à une différence donnée près* ». [Ver Eecke, 1926, p. 9-10]

Le style est le même dans ces problèmes : l'énoncé est général. Mais Diophante effectue la solution sur des données numériques qu'il choisit au cours de la résolution. À titre d'exemple, on peut énoncer la proposition I.1, dans un langage moderne, de la façon suivante : « *Trouver deux nombres (entiers) x et y tels que : $x + y = a$ et $x - y = b$* » (a étant le nombre donné et b la différence). Diophante la résout en prenant $a = 100$ et $b = 40$. Voici le texte de la solution :

« *Que le nombre donné soit 100 et que la différence soit 40 unités ; trouver les nombres*²⁷.

Posons que le plus petit nombre est un arithme ; donc, le plus grand nombre est 1 arithme plus 40 unités. En conséquence, la somme des deux nombres devient deux arithmes plus 40 unités. Or, les 100 unités données sont cette somme ; donc 100 unités sont égales à deux arithmes plus 40 unités. Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire 40 unités de 100 et, de même, 40 unités de 2 arithmes plus 40 unités. Les deux arithmes restants valent 60 unités, et chaque arithme devient 30 unités.

²⁷ Les nombres 100, 40, ..., sont écrits en notation grecque ancienne (alphabétique), mais nous les reproduisons comme ils étaient donnés par P. Ver Eecke.

Revenons à ce que nous avons proposé : le plus petit nombre sera 30 unités ; tandis que le plus grand sera 70 unités, et la preuve est évidente ».

Proposition II.8 : « Partager un carré proposé en deux carrés »

Voici le texte de la solution :

« Proposons donc de partager 16 en deux carrés.

Posons que le premier nombre est un carré d'arithme. Dès lors, l'autre nombre sera 16 unités moins un carré d'arithme. Il faut donc que 16 unités moins un carré d'arithme soient égaux à un carré.

Formons le carré d'une quantité quelconque d'arithmes diminuée d'autant d'unités qu'en possède la racine de 16 unités. Que ce soit le carré de 2 arithmes moins 4 unités. Ce carré sera donc 4 carrés d'arithme plus 16 unités moins 16 arithmes. Égalons-le à 16 unités moins un carré d'arithme ; ajoutons de part et d'autre les termes négatifs et retranchons les semblables des semblables. Il s'en suit que 5 carrés d'arithme sont égaux à 16 arithmes, et l'arithme devient

$\frac{16}{5}$.²⁸ Dès lors, l'un des nombres est $\frac{256}{25}$, et l'autre est $\frac{144}{25}$. Or, ces deux nombres additionnés forment $\frac{400}{25}$, c'est-à-dire 16 unités, et chacun d'eux est un carré » [Ver Eecke, 1926, pp. 53-54]²⁹.

²⁸ Diophante n'a pas utilisé les barres de fraction ; nous reproduisons ici le texte de P. Ver Eecke ; pour $\frac{16}{5}$, lire : "16 parties de 5".

²⁹ Il s'agit (en langage moderne) de résoudre, en nombres rationnels, l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, où a est donné. Diophante la met sous la forme (1) $y^2 = a^2 - x^2$ et, utilisant un procédé ingénieux, cherche les solutions de la forme $y = bx - a$. Il obtient $y^2 = b^2x^2 + a^2 - 2abx$. Alors l'équation (1) donne $b^2x^2 + a^2 - 2abx = a^2 - x^2$. En ajoutant $2abx + x^2$ aux deux membres et en leur retranchant a^2 , il obtient $(b^2 + 1)x^2 = 2abx$ d'où $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$. Alors

$$x^2 = \frac{4a^2b^2}{(b^2 + 1)^2}, y^2 = (bx - a)^2 = \frac{(ab^2 - a)^2}{(b^2 + 1)^2}.$$

A propos de ce problème : (résoudre en nombre rationnels positifs l'équation : $x^2 + y^2 = z^2$), on lit dans une note de Paul Ver Eecke (p. 53) : « *C'est ce problème de Diophante qui a donné lieu à une note célèbre que Fermat (Pierre Fermat, 1601-1665). avait écrite en marge de son exemplaire de l'édition gréco-latine de Diophante, donnée pour la première fois par Bachet de Meziriac en 1621. Cette note énonce de la manière suivante ce qu'on a appelé le grand théorème de Fermat : Par contre, il est impossible de partager un cube en deux cubes, ou un bicarré en deux bicarrés, ou, plus généralement, une puissance quelconque, hormis celle du carré, en deux puissances ayant même exposant. J'ai découvert une démonstration vraiment merveilleuse de la chose, mais la marge est trop petite pour la contenir* ».

« Équations du 2^e degré ».

Les problèmes revenant à des équations du 2^e degré sont donnés dans les propositions 27, 28 et 30 du livre I. On a déjà remarqué (voir § 3. 2, plus haut) que Diophante les résout sans passer explicitement par de telles équations.

Proposition I.27 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés* ».

Proposition I.28 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés* ».

Proposition I.30 : « *Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés* ». [Ver Eecke, 1926, pp. 36-40].

Voici la solution de la proposition I.27 (donnée par Diophante) : « *Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres³⁰ ; chose qui est d'ailleurs figurative³¹.*

³⁰ Cette condition de possibilité exprime que Diophante n'accepte que les solutions rationnelles : voir la fin de notre commentaire de cette solution, plus bas.

³¹ Il semble, d'après Paul Ver Eecke, que cette phrase (*chose qui est d'ailleurs figurative*) est étrangère au texte de Diophante et qu'elle a été ajoutée au texte par un

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est cent unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition » [Ver Eecke, 1926, pp. 36-38].

La proposition I. 27 revient à trouver deux nombres x et y tels que $x + y = a$ et $x \cdot y = b$, où a et b sont deux nombres rationnels. La solution donnée par Diophante pour $a = 20$, $b = 96$, revient à la

suivante : on pose $x - y = 2t$, alors $x = 10 + t (= \frac{a}{2} + t)$,

$y = 10 - t (= \frac{a}{2} - t)$; d'où $x \cdot y = \frac{a^2}{4} - t^2 = b$ et $t^2 = \frac{a^2}{4} - b$, (d'où

$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, $y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$); ainsi $t^2 = 100 - 96$, $t^2 = 4$,

$t = 2$, $x = 12$ et $y = 8$. Comme on a $\frac{a^2}{4} - b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = t^2$, la

des lecteurs à titre de commentaire. Elle veut dire que la condition est une proposition qui peut être traduite géométriquement et qu'elle est représentable par une figure géométrique. En fait elle découle de la proposition II.5 des *Éléments* d'Euclide.

condition posée par Diophante : (*il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres*) est vérifiée. Par le mot *carré*, dans l'expression « *excède d'un carré* » précédente, Diophante entend, un nombre carré Cette condition lui permet de trouver un x et un y rationnels.

Remarque. Considérer une inconnue auxiliaire, t , et prendre $x = \frac{a}{2} + t$, $y = \frac{a}{2} - t$ (dans le cas où $x + y = a$), est une méthode qui avait été déjà utilisée dans la mathématique babylonienne (1800 av. J.-C -300 ap. J.-C), dans la résolution de certains problèmes du genre des problèmes I.27, I.28, I.30 de Diophante [Dahan-Delmico et Peiffer, 1986, pp. 73-75]. Dans la mathématique babylonienne, on avait utilisé aussi un changement d'inconnue analogue : $x = s + \frac{a}{2}$, $x = s - \frac{a}{2}$, dans le cas où intervient l'équation $x - y = a$, ce qu'avait fait aussi Diophante lors de sa résolution du problème I. 30 ($x - y = a$ et $x \cdot y = b$). Notons qu'Abū-Kāmil (vers 830-900) avait utilisé la même méthode dans des occasions similaires³².

Bibliographie

- Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.
- Anbouba, A. 1979. "Un traité d'Abū Ja'far al-Khāzin sur les triangles rectangles numériques", *Journal for the history of Arabic Science*, vol. 3, n° 1, pp. 134 -156.
- Bellosta, H. 2010. "La réception de la science arabe en Europe", dans *Encyclopédie des relations sociales entre le monde islamique et l'Occident*, supervisée par Samir Sleimane, (Téhéran 2010). Publié aussi sur le site de l'Equipe d'Etude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe: www.histosc.com.

³² Voir [Farès, 2017, ch. IV, § 1, note supplémentaire 1. 3. 1.

- Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris.
- Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement axiomatique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.
- Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.
- Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.
- Rashed, R. 1984 (2). *Diophante : Les Arithmétiques, Tome III : Livre IV*. "Collection des Universités de France", Les Belles Lettres, Paris.
- Rashed, R. 1984 (3). *Diophante : Les Arithmétiques, Tome IV : Livres V, VI, VII*. "Collection des Universités de France", Les Belles Lettres, Paris.
- Rashed, R. 2003. "Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, Numero 2, Dicembre 2003, Pisa-Roma, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, MMV, pp. 55-73.
- Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.
- Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
- Sésiano, J. 1982. *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusta ibn Lūqā*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Taton, R. (sous la direction de), 1957. *Histoire générale des sciences*, vol. 1, "La science antique et médiévale", sous la direction de P.U.F, Paris..
- Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.
- Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècle)*, Vrin, Paris.