



**HAL**  
open science

# Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie

Christine Chambris

## ► To cite this version:

Christine Chambris. Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2010, 30, pp.317-366. hal-01741352

**HAL Id: hal-01741352**

**<https://hal.science/hal-01741352>**

Submitted on 23 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# RELATIONS ENTRE GRANDEURS, NOMBRES ET OPERATIONS DANS LES MATHEMATIQUES DE L'ECOLE PRIMAIRE AU 20<sup>e</sup> SIECLE : THEORIES ET ECOLOGIE

Christine Chambris\*

## RELATIONS BETWEEN QUANTITIES, NUMBERS, AND OPERATIONS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS IN THE 20<sup>TH</sup> CENTURY: THEORIES AND ECOLOGY

**Abstract** – The purpose of the study was to provide an overview of current relations between quantities, numbers, and operations in the French primary school and to consider other possibilities for the future. The profound changes that have occurred in academic mathematical knowledge, in the mathematics taught, and in everyday life over the past 150 years are at the heart of the study. Our theoretical framework is the anthropological theory of didactics.

The relations involving whole numbers have been much investigated. The methodologies use various data sources: the national curriculum, textbooks, mathematical texts, and a questionnaire given to fifth graders (10–11 years old). The study focused on two interacting aspects: the ecology of praxeologies and academic knowledge referenced at different times. The modern mathematics reform is seen as a key moment in regard to these two dimensions: breaks in ancient ‘food chains’, changes in the academic knowledge referenced and change in their nature. Indeed, we distinguish academic knowledge as first class (useful for producing the sphere of knowledge) or second class (useful for teaching).

**Key words:** ecology of knowledge, food chain, didactic transposition, quantities, numeration, operations, metric system, national curriculum, textbooks, modern mathematics reform, first-class and second-class mathematical knowledge.

## RELACIONES ENTRE CANTIDADES, NÚMEROS Y OPERACIONES EN LAS MATEMÁTICAS DE LA ESCUELA PRIMARIA DEL SIGLO XX: TEORÍAS Y ECOLOGÍA

**Resumen** – Se intenta ofrecer una visión general de las relaciones actuales entre cantidades, números y operaciones en la escuela primaria francesa y considerar otras posibilidades para el futuro. Los profundos cambios que han afectado a estas relaciones, tanto en el saber de las matemáticas como en las matemáticas que se enseñan, y en la vida cotidiana desde hace 150 años son el corazón del estudio. El marco teórico de referencia es la teoría antropológica de la didáctica. Se profundiza en el estudio de las relaciones implicando números enteros. Las metodologías se apoyan en diferentes corpus de datos : programas e instrucciones oficiales, libros de texto, libros de matemáticas, cuestionario propuesto a alumnos de 5o grado (10-11 años).

El estudio se centra en dos aspectos interactuantes : Ecología de praxeologías y saberes sabios de referencia a diferentes épocas. La reforma de las matemáticas modernas es vista como un momento clave en lo que respecta a estas dos dimensiones: rupturas de cadenas tróficas antiguas ; modificación de los saberes sabios de referencia y de su naturaleza. Una distinción entre los saberes sabios de primer orden (útil para la esfera productora de saberes) y de segundo orden (útil para la enseñanza) es en efecto introducida.

**Palabras-claves:** Ecología de saberes, Cadena trófica, Transposición didáctica, Cantidades, Numeración, Operaciones, Sistema métrico, Programas, Libros de texto, Reforma de las matemáticas modernas, Saberes sabios de primer y Segundo orden.

---

\*Laboratoire de Didactique André Revuz (DIDIREM – LDSP) et Université de Cergy Pontoise – christine.chambris@u-cergy.fr

## RESUME

Il s'agit de proposer un état des lieux des relations actuelles entre grandeurs, nombres et opérations à l'école primaire française et d'envisager d'autres possibles pour demain. Les bouleversements profonds qui ont affecté ces relations tant dans les mathématiques savantes, qu'enseignées, et dans la vie courante depuis 150 ans constituent le cœur de l'étude. Le cadre théorique de référence est la théorie anthropologique du didactique.

L'étude des relations impliquant les nombres entiers est approfondie. Les méthodologies s'appuient sur des corpus variés de données : programmes et instructions officiels, manuels scolaires, textes mathématiques, questionnaire auprès d'élèves du 5<sup>e</sup> grade (10–11 ans). L'étude se focalise sur deux aspects qui interagissent : écologie des praxéologies et savoirs savants de référence à différentes époques. La réforme des mathématiques modernes apparaît comme un moment clé eu égard à ces deux dimensions : ruptures de chaînes trophiques anciennes ; modification des savoirs savants de référence et de leur nature. Une distinction entre savoirs savants du premier ordre (utile pour la sphère productrice des savoirs) et du second ordre (utile pour l'enseignement) est en effet introduite.

**Mots-clefs :** écologie des savoirs, chaîne trophique, transposition didactique, grandeurs, numération, opérations, système métrique, programmes, manuels scolaires, réforme des mathématiques modernes, savoirs savants du premier et du second ordre.

## Introduction

Dans ce texte, nous cherchons d'abord à comprendre les relations entre grandeurs, nombres et opérations dans l'enseignement actuel des mathématiques à l'école primaire. Nous considérons qu'elles sont le produit de modifications qui concernent à la fois les mathématiques savantes, les pratiques de la vie courante pour le mesurage et l'école. Elles ont eu lieu tout au long du 20<sup>e</sup> siècle. Toutefois, nombre d'entre elles se sont cristallisées au moment de la réforme des mathématiques modernes (que nous désignerons par la suite par « la réforme »). Notre intention majeure consiste alors à mettre en évidence l'organisation curriculaire de l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations en primaire avant la réforme, les modifications que la réforme y a introduites et leurs effets, à long terme, sur l'enseignement et l'apprentissage. Cette étude de l'existant nous permet, ensuite, d'envisager d'autres possibles pour l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations aujourd'hui.

Dans une première partie, introductive, nous présentons le contexte de l'article, nos questions de départ, le cadre théorique retenu et la problématique qui en découle, puis nos hypothèses de recherche et la méthodologie générale. Suivent deux parties dans lesquelles nous précisons certains points de méthodologie. La première est consacrée à l'étude des programmes d'enseignement du 20<sup>e</sup> siècle tant sur le plan des savoirs savants de référence que des liens entre objets d'enseignement (grandeurs, nombres et opérations). La deuxième présente successivement une étude de manuels scolaires antérieurs à la réforme pour préciser l'étude précédente relative aux liens et des éléments sur ces liens dans l'enseignement actuel. Pour finir, nous tirons des conclusions et présentons des perspectives de recherche.

### 1. Contexte de l'article

Ce texte s'appuie sur notre thèse de doctorat (Chambris 2008) dirigée par Marie-Jeanne Perrin-Glorian. La plupart des résultats présentés dans cet article ont été établis dans ce travail. Pour l'étude détaillée des liens entre objets d'enseignement, nous avons retenu des exemples qui nous semblent à la fois significatifs de nos résultats et de notre méthodologie et qui constituent des objets sensibles en ce sens qu'ils peuvent contribuer à éclairer des débats sur l'enseignement primaire actuel en France.

### 2. Questions de départ et choix du cadre théorique

Il est commun d'entendre dire que la réforme des mathématiques modernes a renouvelé les savoirs de référence, qu'elle a fait quasiment disparaître les grandeurs et que les réformes qui ont suivi, à partir des années 80, ont timidement essayé de les réintroduire, avec des résultats relativement peu convaincants.

Nous restreignons le champ de notre étude à la contribution des grandeurs pour la connaissance des nombres et des opérations. Qu'est-ce qu'apportait l'enseignement des grandeurs avant la réforme, notamment l'enseignement du système métrique ? S'agissait-il seulement d'enseigner des pratiques de la vie courante pour elles-mêmes ou cet enseignement contribuait-il aussi à des apprentissages conceptuels sur les nombres et les opérations ? Nous voulons aussi mieux comprendre les réintroductions locales des grandeurs qu'on observe depuis les années 80 : ce qu'il en est des relations entre grandeurs et nombres dans

l'enseignement d'aujourd'hui et ce qui résulte de ces relations dans les connaissances des élèves. En particulier, sont-ils capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour étudier des situations ou bien leur manque-t-il quelque chose ? Dans quelle mesure ces éléments peuvent-ils être reliés à des modifications dans les savoirs savants de référence ?

Pour étudier ces questions nous utilisons le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard 1992a). La dimension écologique (Artaud 1997), un moteur essentiel de la TAD, paraît bien adaptée. En effet, l'écologie des savoirs permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils ? Avec qui vivent-ils ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ? Pour étudier les questions relatives aux savoirs savants, nous utilisons la transposition didactique, une autre dimension de la TAD.

Notre problématique consiste alors à étudier l'écologie des grandeurs et des nombres et l'incidence des savoirs savants de référence sur l'écologie. Il s'agit de comprendre la situation actuelle et d'envisager d'autres possibles. Notre objet est délimité par les mathématiques de l'école primaire, avant et après la réforme.

### 3. Précisions sur le cadre théorique

Revenons au cadre théorique avant de préciser nos questions en explicitant nos hypothèses de recherche.

#### *Ecologie des savoirs*

Nous faisons une présentation succincte d'éléments de la TAD que nous utilisons, en mettant en avant les aspects écologiques. Retenons déjà que l'écologie des savoirs permet d'étudier les conditions de vie des objets d'enseignement et qu'en règle générale plus un objet est relié à d'autres, mieux il vit !

Comme on va le voir, nous nous référons abondamment à la notion de *praxéologie* (ou *organisation*) (Chevallard 1997). Une praxéologie permet de décrire une pratique au moyen de quatre composantes complémentaires, à savoir un *type de tâches* c'est-à-dire un ensemble de problèmes qui se ressemblent en ce sens qu'ils peuvent être traités à l'aide d'un même *type de techniques*, la technique pouvant être justifiée à l'aide d'une *technologie*, discours justificatif qui est lui-même justifié par la *théorie*. La théorie n'apparaît parfois qu'à l'état de traces, dans un état *évanouissant*. Sauf précision contraire, nous étudions les praxéologies mathématiques et non didactiques.

Rajoson (1988) étudie la vie de certaines tâches dans certaines institutions. Nous retenons que les tâches *emblématiques* de l'institution peuvent vivre « isolément » alors que les autres doivent nécessairement prendre place dans des ensembles structurés. Sans cela elles meurent (ou ne naissent pas !). Par exemple, des tâches nouvelles peuvent être introduites par les programmes et ne pas être enseignées par les maîtres car elles ne sont pas suffisamment reliées à d'autres. Nous affirmons que, compte tenu de son caractère *fondamental*, l'enseignement des mathématiques en primaire regorge de tâches emblématiques, mesurer une longueur par exemple.

Nous utilisons aussi les notions de chaîne, besoins et réseau trophiques et de motivation d'un type de tâches. « Trophein » vient du grec nourrir. Une *chaîne trophique* est une sorte de chaîne alimentaire pour les objets d'enseignement. Chevallard (2007) indique que :

Selon une image empruntée à l'écologie biologique, se créent (...) des *chaînes trophiques*, où une praxéologie « se nourrit d'une autre » – et paradoxalement *la fait exister* dans l'institution qui lui sert d'habitat. (Op. cité, p.714)

Ainsi, pour un objet d'enseignement, le fait d'être utile à d'autres, d'être dans une *chaîne*, d'être mangé par d'autres est un bon moyen d'exister. A titre d'exemple, considérons la tâche du type *conversions* : soit à convertir 35 centaines en milliers et centaines. Savoir traiter cette tâche est nécessaire lorsque, dans l'institution, on décide de justifier la technique opératoire de la division par le partage successif des unités. Cette justification *se nourrit* alors du type de tâches conversions, elle peut constituer un moyen de *le faire exister*. On dit alors que la justification de la technique opératoire de la division  *motive*  le type de tâches conversions. Ensuite, pour vivre, un objet d'enseignement a des *besoins trophiques* : par exemple pour qu'une tâche vive dans une institution donnée, il peut être bon que sa technique puisse être justifiée dans cette institution. Ainsi, la justification de la technique opératoire de la division, évoquée précédemment, crée un besoin de conversion. Enfin, les chaînes peuvent être imbriquées en ayant des maillons communs –des objets d'enseignement– . L'ensemble des chaînes alimentaires d'un milieu constitue le réseau trophique du milieu.

Les praxéologies s'amalgament (Chevallard 1999). Une praxéologie est dite *ponctuelle* lorsqu'elle est relative à un unique type de tâches. Une organisation mathématique est dite *locale* lorsque des praxéologies ponctuelles sont agglomérées par une technologie commune. Une organisation mathématique est dite *régionale* lorsque des praxéologies locales sont agglomérées par une théorie commune. Des praxéologies régionales peuvent être agglomérées, on parle alors de praxéologie *globale*. Bosch, Fonseca et Gascon (2004) étudient les organisations mathématiques locales (OML), ils mettent en relation la qualité des apprentissages réalisés, en termes de rigidité ou de souplesse notamment, et le degré de *complétude* des OML. Le premier critère de complétude (Op. cité, p.218) est celui de l'intégration des types de tâches. En substance, les types de tâches qui vivent au sein d'une OML sont reliés entre eux soit par un discours technologique, soit par le développement successif des techniques. Ils y sont isolés lorsque les techniques qui permettent de les réaliser ne sont pas reliées par un élément technologique. Moins les types de tâches qui composent une OML sont isolés, plus l'OML est complète.

#### *Deux ordres de savoirs savants*

Outre l'écologie des praxéologies, les questions de transposition sont au cœur de notre étude. Neyret (1995) pointe le manque et donc le besoin d'un traité pour la formation des maîtres quant aux fractions et décimaux. Sa définition du traité nous amène à distinguer deux types de savoirs savants : le savoir savant utile à la sphère productrice des savoirs et le savoir savant, mathématiquement correct, mais adapté aux besoins de l'enseignement. Nous les appelons savoirs savants respectivement *du premier* et *du second ordre*. Ainsi, un traité devrait-il contenir nécessairement un savoir savant du second ordre.

Par exemple, dans les constructions savantes des rationnels, qu'on peut considérer comme étant des savoirs savants du premier ordre, un rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers ; dans (Rouche 1992) qui présente un savoir savant du second ordre et que nous considérons comme une tentative d'élaboration de traité, les rationnels sont construits à partir des grandeurs, en commençant par multiplier puis diviser une grandeur par un entier.

Le propre d'un savoir savant du second ordre est d'être adapté aux besoins pour l'enseignement. D'une certaine façon, avec un savoir savant du second ordre, le travail de transposition est largement entamé dans l'élaboration même de la théorie. En particulier, le travail d'interprétation de la théorie (qu'il soit conscient ou non) en termes de tâches et de techniques (pour traiter les tâches usuellement enseignées) est limité, car partiellement pris en charge par la théorie.

#### 4. Hypothèses de recherche

A l'école primaire, malgré des modifications, les grandeurs, nombres et opérations ont, depuis toujours, été objets d'enseignement. Aussi, la mise à jour d'organisations anciennes, outre son intérêt historique, peut-elle permettre d'une part de faire un 'pas de côté' dans l'étude des organisations actuelles, pour les *dénaturaliser* (il s'agit alors d'une contribution d'ordre méthodologique) ; d'autre part d'éclairer des choix pour les organisations mathématiques futures, tant sur le plan de l'écologie que des savoirs de référence. Nous désignons par *ancien* « tout » ce qui a précédé la réforme.<sup>1</sup>

Chevallard (1992b) caractérise ainsi les conséquences écologiques de la réforme pour le secondaire :

La Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en dérégulant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution longue et complexe, dont certains, aujourd'hui encore, n'ont pu être revitalisés. (Op. cité, p.19)

Peut-il en être allé autrement en primaire ? Or, des conditions écologiques dégradées sont susceptibles d'avoir un effet négatif sur les apprentissages.

Parouty (2005) étudie les connaissances des élèves actuels en numération. Elle s'intéresse notamment à leur capacité à résoudre des problèmes de numération de la 'vie courante', il s'agit par exemple de trouver le nombre de paquets de 100 carreaux qu'il faut acheter pour avoir 8564 carreaux. Au CE2 (9–10 ans, 3<sup>e</sup> grade), c'est-à-dire l'année pendant laquelle ce type de problèmes devrait être travaillé, elle constate que les élèves échouent massivement. Elle relève, avec des nombres plus grands, des résultats un peu meilleurs au CM2 (10-11 ans, 5<sup>e</sup> grade) car les élèves posent la division (ils ont appris à le faire). D'ailleurs, l'immense majorité des enseignants interrogés considère que ces problèmes relèvent du champ de la division et non de celui de la numération. Enfin, ces problèmes semblent peu travaillés. Or, quand elle demande aux enseignants d'enseigner la résolution de tels problèmes et qu'elle évalue ensuite les élèves, elle constate que ces derniers ont progressé globalement dans toute la numération et pas seulement dans la résolution de ces problèmes ce qui n'aurait rien de remarquable. Ainsi, même s'ils ne sont pas hors programme, ces problèmes de la 'vie

---

<sup>1</sup> Cette « période » n'est sans doute pas aussi uniforme que le laisse supposer le qualificatif retenu. En ce sens, notre étude n'est pas véritablement historique.

courante', utiles notamment pour des apprentissages conceptuels sur les nombres, peinent à vivre dans l'enseignement primaire actuel.

Il est connu que la réforme a modifié les strates théoriques des praxéologies. Le qualificatif même de la réforme, les « mathématiques modernes », porte la marque des savoirs savants du premier ordre qu'on a voulu enseigner. Il s'agissait notamment d'actualiser les savoirs de référence, les savoirs anciens étant considérés comme caduques, notamment les références aux grandeurs (pour une partie des réformateurs au moins). Un travail de transposition massif a été conduit à l'époque, travail d'autant plus complexe que les destinataires en étaient des enfants et que des savoirs savants du premier ordre élèvent *a priori* de façon brutale les besoins trophiques. Les techniques peuvent se trouver modifiées, par suite l'écologie des praxéologies aussi. L'enseignement actuel est en partie le produit de ces transpositions, d'autant plus que la question des savoirs savants de référence n'a plus été véritablement discutée depuis la fin de la réforme. Que sont devenus les savoirs savants de référence ? Quelle incidence les modifications du savoir savant de référence ont-elles (eu) sur l'écologie ?

Qu'en était-il des savoirs de référence avant la réforme ? L'existence même de savoirs *savants* de référence pour l'enseignement primaire n'est pas communément admise. Des pratiques de la vie courante pourraient suffire pour justifier certaines praxéologies et leur l'existence. Par exemple, Harlé (1984) n'envisage pas que des soubassements mathématiques théoriques puissent exister dans l'enseignement primaire du début du 20<sup>e</sup> siècle. Avant la réforme, peut-on mettre en relation les « écosystèmes mathématiques » évoqués par Chevallard et les savoirs de référence ?

Notre hypothèse centrale, qui organise notre travail pour établir l'état des lieux, va se décliner en quatre hypothèses secondaires, nous permettant de préciser notre objet de recherche.

#### *Hypothèse centrale*

Le savoir savant de référence détermine au moins en partie l'écologie des praxéologies. Par suite, à titre prospectif, des considérations écologiques peuvent éclairer des choix pour les savoirs savants de référence.

#### *Première hypothèse : des savoirs savants avant la réforme.*

Des savoirs savants ont fondé l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations en primaire avant la réforme.

Nous avons pour projet d'en mettre certains en évidence. Cette hypothèse n'exclut d'ailleurs pas que des pratiques de la vie courante soient enseignées : soit en se juxtaposant au « socle théorique », soit en le consolidant en un sens qu'il conviendra de préciser.

#### *Deuxième hypothèse : mutation du savoir savant du premier ordre*

Au moment de la réforme, les transpositions ont dénaturé de façon très substantielle les théories initialement transposées, à tel point que des discours mathématiques cohérents ont pu devenir difficiles à tenir. Par suite, sous la pression de l'organisation didactique, au moins certaines fois, émergent, plus ou moins rapidement, de nouveaux discours, plus cohérents. Ces discours peuvent être interprétés comme une nouvelle théorie mathématique, une théorie plus opérationnelle pour l'enseignement, différente de la théorie de référence initialement



transposée, il s'agit alors non plus d'un savoir savant du premier ordre mais du second ordre. Cette « nouvelle » théorie peut ne pas être complètement formulée, peut comporter des « trous », car elle n'est pas pensée comme une théorie. Cela définit ce que nous cherchons à mettre en évidence

À titre prospectif, des qualités souhaitables pour des savoirs savants susceptibles de servir de référence en primaire peuvent alors être mises en évidence.

#### *Troisième hypothèse : écologie des organisations anciennes*

L'enseignement des grandeurs, nombres et opérations, avant la réforme, en primaire, comportait des organisations praxéologiques « produits d'une évolution longue et complexe » (Chevallard 1992b).

Il nous importe de les mettre à jour : en particulier des chaînes trophiques particulièrement longues et des praxéologies relativement complètes.

#### *Quatrième hypothèse : chaînes trophiques actuelles*

Les conditions de vie des objets impliquant grandeurs, nombres ou opérations ont été dégradées au moment de la réforme ; depuis cette époque, leur vie est ainsi fragilisée malgré divers remaniements.

Cette hypothèse permet notamment d'expliquer certaines difficultés d'élèves actuels que nous avons évoquées en numération et sur d'autres thèmes que nous illustrons.

#### *Méthodologie générale*

Pour étudier nos hypothèses, nous mettons à jour différentes composantes des praxéologies en travaillant à différentes échelles, de plus en plus fines : programmes, sommaires de manuels scolaires, détails des leçons. Pour les savoirs savants, nous conduisons une étude de textes mathématiques. Pour mettre en relation praxéologies et savoirs savants, nous confrontons les différentes composantes des praxéologies et les propriétés ou axiomes des théories.

## **Étude globale des programmes : écologie, savoir savant**

Dans cette partie, pour 'débroussailler le terrain', nous nous plaçons à une échelle assez grosse : celle des programmes. Deux ordres de questions sont à l'étude : celles relatives aux savoirs savants de référence, celles relatives à l'écologie des praxéologies.

L'étude des textes des programmes successifs depuis le début de l'école obligatoire jusqu'à la réforme des années 70 permet-elle de repérer des savoirs savants transposés impliquant grandeurs, nombres et opérations ? Comment les réintroductions des grandeurs postérieures à la réforme s'interprètent-elles en termes de savoirs savants ? L'échelle des programmes permet-elle de repérer des éléments relatifs à l'écologie des praxéologies ?

### **1. Méthodologie et corpus de données**

Sauf pour la période la plus ancienne pour laquelle nous disposons déjà d'études, nous utilisons les textes officiels, programmes et instructions, pour conduire ce premier travail global sur les savoirs savants et l'écologie.

Nous identifions dans les textes officiels des bribes de praxéologies : en général, une praxéologie n'y est pas entièrement visible (si tant est qu'elle le soit quelque part) ; en revanche certaines composantes de certaines praxéologies le sont.

Parallèlement, nous étudions des textes mathématiques qui sont des savoirs savants du premier ou du second ordre. En effet, nous avons besoin d'un panorama sur les théories mathématiques des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure en général et aussi des nombres réels afin de confronter praxéologies et savoirs savants.

Pour les questions d'ordre écologique, nous étudions d'une part les déplacements d'objets d'un programme à l'autre. En effet, que ce soit au sein d'un habitat ou avec un changement d'habitat, un objet qui se déplace est susceptible de changer de niche. Par suite, l'identification de ces déplacements permet de faire des hypothèses, forcément assez grossières compte tenu de l'échelle, sur la modification des réseaux trophiques : création ou rupture de chaînes ; fragmentation ou amalgame de praxéologies. D'autre part, l'identification des savoirs savants de référence nous permet de faire quelques hypothèses relatives à l'écologie.

## 2. Rapports entre programmes et théories : théorie transposée

Nous voulons identifier ou caractériser les théories sous-jacentes dans les programmes à différentes époques. Pour cela nous utilisons deux méthodes. La première consiste à repérer les théories effectivement transposées, c'est-à-dire celles qui ont pu servir de référence 'officiellement'. Nous précisons la seconde ultérieurement. Nous présentons maintenant trois résultats.

### *Le numérique dans le programme de 1970*

L'étude du programme de 1970 permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite (Chambris 2008, pp.64–91). Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce<sup>2</sup>. En 1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu. Par exemple<sup>3</sup>, le programme propose une approche des décimaux, identique dans le « numérique » et « mesure », en mesurant les grandeurs (respectivement discrètes et continues) mais sans les fractionner. La « définition » est donnée avec la mesure des grandeurs discrètes :

Une ville compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. (Instructions officielles de 1970)

Elle est reprise dans le continu :

Prenons comme unité le carreau (...) aire  $A = 28$  (...). Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de  $A$  est le nombre 2,8. (Ibid.)

Cette construction n'est pas satisfaisante sur le plan mathématique, nous y reviendrons. On a essayé toutefois, par ce moyen, de créer une étude des nombres non entiers qui ne

<sup>2</sup> Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans l'« ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de l'« ancienne géométrie ».

<sup>3</sup> Pour une présentation exhaustive, se référer à (Chambris 2008, pp.64-73).

s'appuyait pas sur le fractionnement, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers. Cette scission du domaine « arithmétique » manifeste donc un changement de théorie de référence.

Précisons toutefois que le traitement de la proportionnalité échappe à la dichotomie discret / continu, mais il participe d'un autre ordre de modifications. En effet, une autre dimension fondamentale des changements de 1970 est la suivante. Jusqu'en 1970, les opérations, les fractions, les relations de proportionnalité impliquent de près ou de loin des opérations sur les grandeurs (même si cette affirmation mériterait d'être nuancée pour le programme de 1945). Citons par exemple les opérations sur les nombres concrets (qui sont des grandeurs), les fractions de grandeurs, le traitement de la proportionnalité avec la théorie des rapports et la multiplication externe d'une grandeur par un scalaire jusqu'en 1938 auxquels s'ajoute à partir de cette date l'utilisation des produits et quotients de grandeurs (Whitney 1968). Dans le programme de 1970, les opérations sur les grandeurs disparaissent, les relations de proportionnalité et les fractions sont considérées comme des opérateurs numériques agissant sur des séries de nombres et les quatre opérations s'appliquent exclusivement aux nombres. L'exclusion des opérations sur les grandeurs a été maintenue jusque très récemment.

En fait, c'est aujourd'hui encore « le numérique » qui gouverne l'enseignement des nombres, des opérations et de la proportionnalité ; le « numérique », c'est-à-dire, ici, une théorie des nombres non entiers fondée sur les entiers et une théorie des fonctions linéaires numériques. Il n'y a pas eu de changement de théorie de référence pour l'étude des nombres et des opérations après 1970.

#### *Le programme de 1945, le livre de Lebesgue*

Henri Lebesgue (1875-1941) publie la première partie (introduction, chapitres I et II) de *La mesure des grandeurs* en 1931 (Lebesgue 1975). Neyret (1995) a identifié à la fois dans le programme de 1945 et dans le livre de Lebesgue le rabattement des décimaux sur les entiers et la vision des fractions comme opérateurs sur des grandeurs. Il n'attribue pourtant pas cette modification du programme à la transposition du livre. Ces similitudes entre le programme de 1945 et ce livre (et d'autres éléments) constituent, selon nos analyses (Chambris 2008, pp.113–117), des indices sérieux en faveur d'une transposition. La première partie du livre semble avoir très largement inspiré les modifications du programme de 1945 concernant le rabattement des décimaux et les fractions comme opérateurs.

Toutefois, parce que Lebesgue semble cantonner les grandeurs au domaine de la métaphysique, on a parfois interprété la relégation des grandeurs en 1970 comme une sorte d'exécution posthume de sa volonté. Nous réfutons cette interprétation en proposant les arguments suivants. Tout d'abord, la première partie de *La mesure des grandeurs* propose une construction des réels qui s'appuie sur la mesure des segments géométriques et Lebesgue le revendique. Il ne s'agit donc en aucun cas d'exclure le continu ou la géométrie pour construire les nombres. De plus, c'est Lebesgue qui écrit :

Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m. 75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre. (Op. cité, chapitre II, §10)

Il ne s'agit donc pas non plus de nier les relations entre opérations et unités ou entre opérations et grandeurs.

Enfin, nous remettons dans le contexte de l'époque les éléments relatifs à la métaphysique généralement rapportés.

Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement. (Op. cité, chapitre III, §39)

Ce sont, plus probablement que les grandeurs, les définitions par abstraction que rejette Lebesgue. Cette discussion trouve apparemment sa source dans le paradoxe de Russel à l'origine de la « crise des fondements » (1902–1931). Et il est connu que Lebesgue n'est pas resté étranger à cette crise. Griesel (2007, p.33) indique en substance : si  $\sim$  est une relation d'équivalence, il est possible de procéder à cette abstraction que tous les éléments d'une classe ont en commun et d'agir mentalement avec cette propriété  $E(x)$  de l'élément  $x$  comme objet mathématique. Il est valide d'écrire :  $E(x) = E(y) \Leftrightarrow x \sim y$ . Cette réhabilitation, par les néo-fregéens, date de 1998. Ce qui pose problème 'métaphysiquement' est donc la possibilité de considérer la propriété commune à plusieurs objets comme un objet mathématique à part entière. La légitimation des définitions par abstraction permet donc, étant donnée par exemple la relation « avoir la même longueur que », de considérer la propriété de « longueur » et de parler de « la longueur de l'objet ».

Ainsi, nous semble-t-il donc plus probable que ce soit le programme de 1945 qui constitue une transposition de la première partie du livre de Lebesgue plutôt que celui de 1970. Ceci n'empêche pas que, dans la préparation de la réforme, la noosphère a peut-être retravaillé la construction des réels de Lebesgue (qui valorise les développements décimaux) pour en faire une construction des réels qui ne s'appuie pas sur la mesure des grandeurs. Par suite, il est bien possible que Lebesgue ait servi de caution morale à l'éviction des grandeurs, à son corps défendant.

#### *Avant 1945 : une théorie des grandeurs*

Bronner (2008) étudie le numérique dans le secondaire comme produit des transformations curriculaires depuis 1850. Il observe une grande stabilité jusqu'en 1947 : une théorie de la mesure des grandeurs fonde l'étude des nombres. Les manuels d'arithmétique commencent généralement ainsi :

Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. [...] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. (Guilmin 1855, cité par Bronner 2008, p.26)

Il est connu que les ordres d'enseignement primaire et secondaire étaient étanches avant 1945. Toutefois, les programmes pour les petites classes du secondaire et pour les niveaux correspondants de primaire sont communs depuis 1925. Il y a ainsi peu de raisons que, s'il en existe, des appuis mathématiques théoriques différents fondent l'enseignement des nombres des deux ordres.

Par ailleurs, Harlé (1984) étudie l'enseignement primaire au début du 20<sup>e</sup> siècle. Nous avons confronté (Op. cité, pp.27–36) ses données ainsi que celles de Bronner (1997) (des extraits de manuels scolaires) au texte du traité d'arithmétique de Reynaud (Bezout et

Reynaud 1821). Nous trouvons des similitudes dans les deux cas. Le traité de Reynaud commence d'ailleurs ainsi :

Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution se nomme *quantité*. Lorsqu'on réfléchit sur la nature des quantités, on sent qu'il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même espèce, si l'on ne choisissait pas parmi elles une certaine quantité qui pût leur servir de terme de comparaison ; cette quantité se nomme unité ; l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur compose un nombre. (Op. cité, p.1)

La théorie portée par le traité de Reynaud est une théorie des grandeurs du même type que celle que Bronner a identifiée. Elle sert aussi de référence à l'école primaire au début du 20<sup>e</sup> siècle. Ainsi, nombre d'occurrences des grandeurs qu'Harlé considère comme des marques d'un enseignement pratique et utilitaire sont en fait le signe de la présence « théorique » des grandeurs.

### 3. Savoir savant de référence et réseaux trophiques

Après cette mise en évidence de savoirs savants de référence, il s'agit de repérer, dans les programmes, des indices relatifs à l'écologie des praxéologies.

#### *Le programme de 1970 : ruptures et créations de chaînes*

Le programme de 1970 coupe l'arithmétique en deux en séparant le traitement du discret et du continu<sup>4</sup>. La proportionnalité, quant à elle, a droit à un autre traitement : ce thème autrefois réparti entre la géométrie pour les échelles et l'arithmétique pour les autres questions se retrouve intégralement dans le « numérique ». Le domaine « mesure » est créé.

La modification des savoirs de référence provoque ainsi une modification dans l'agencement des 'gros' domaines d'enseignement. Ces modifications sont susceptibles d'avoir engendré des bouleversements majeurs dans les réseaux trophiques existant auparavant. En particulier la scission de l'arithmétique en deux parties, numérique et mesure, a pu occasionner des ruptures de chaînes ; l'unification du traitement de la proportionnalité a pu en faire apparaître de nouvelles dans le numérique mais en rompre en géométrie. De nouvelles chaînes peuvent aussi apparaître au sein du domaine « mesures ».

#### *Le programme de 1923 : réorganisation des réseaux trophiques*

Nous tirons des travaux de Bronner (2008) et de Harlé (1984) qu'il n'y a pas de changement de théorie de référence avec le programme de 1923. C'est toujours une théorie des grandeurs qui pilote le numérique. Pourtant, le programme du primaire indique une réorganisation notable. Auparavant le système métrique est juxtaposé aux nombres (et au calcul) ; en 1923, il est mêlé à l'enseignement des nombres :

Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : « Numération décimale, le mètre, le gramme... ». Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.

L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. (Instructions officielles de 1923)

<sup>4</sup> Dans les programmes ultérieurs à 1970, la frontière entre numérique et mesure ne sera plus la séparation entre discret et continu.

Il s'agit d'une réorganisation de nature écologique, susceptible d'avoir des effets constructifs sur les réseaux trophiques : de produire de nouvelles chaînes ou d'en densifier un qui existerait déjà, un tel réseau intégrerait numération de position et système métrique. Nous reviendrons sur ce point.

Une théorie de la mesure des grandeurs pour fonder le numérique pourrait favoriser l'existence d'un tel réseau. En effet, avec une telle théorie, l'étude des nombres, c'est l'étude des mesures de grandeurs.

*Avant 1945 : un même habitat pour grandeurs, nombres, opérations ?*

Un habitat commun est sans doute davantage susceptible d'être le siège de réseaux trophiques impliquant plusieurs objets plutôt que plusieurs habitats séparés dans lesquels vivrait chacun des objets séparément.

L'existence d'une théorie des grandeurs pour asseoir l'étude des nombres et des opérations nous amène à supposer que jusqu'en 1945, et même jusqu'à la réforme, des grandeurs ont dû se trouver dans un habitat commun aux nombres et opérations, la création du domaine mesure devenant ainsi symptomatique de sa destruction.

### *Conclusions*

Nous avons mis en évidence des savoirs savants de référence pour l'enseignement des nombres et opérations, des théories de la mesure des grandeurs, avant la réforme et caractérisé les modifications de 1970.

Nous avons aussi précisé nos troisième et quatrième hypothèses relatives aux évolutions ou à l'existence des réseaux trophiques en utilisant les éléments suivants :

- l'existence d'une théorie mathématique commune à plusieurs praxéologies (ou de théories emboîtées) est une condition favorable, peut-être nécessaire, pour le développement des réseaux trophiques ;
- un déplacement d'objet alors qu'il y a une théorie unique peut permettre de créer ou renforcer un réseau trophique.

Il convient d'étudier plus avant ces hypothèses avec un matériau plus fin que les instructions officielles. Ce sera l'objet de la deuxième partie.

## **4. Rapports entre programmes et théories : théorie reconstituée**

Nous présentons maintenant une seconde méthode pour la mise en relation des programmes et théories. Nous allons notamment montrer la possibilité de reconstituer une strate théorique en utilisant les éléments du bloc praxis (types de tâches et techniques). Nous parlerons de *théorie reconstituée*.

### *Méthodologie et résultat*

Nous l'avons rappelé plus haut : depuis 1970, le « numérique » est le savoir savant de référence. Pourtant, en 2002, les instructions officielles présentent à propos de la proportionnalité, puis de la multiplication par un décimal, des « raisonnements personnels » du type suivant :

- « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ? », les raisonnements peuvent être du type :
- pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) (...). Pour

1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;  
 - la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).

Ces « raisonnements » constituent deux techniques pour la résolution des problèmes de proportionnalité : linéarité et coefficient. Pour bien les mettre en évidence, nous les écrivons formellement (ce qui n'est absolument pas attendu par les instructions et probablement pas souhaitable à l'école primaire).

Soit  $f$  la fonction linéaire qui, à la masse de fruits, associe la masse de sucre. Cette fonction n'est pas numérique : elle est définie de l'ensemble des masses vers lui-même.

La première méthode relève de la linéarité. Elle peut s'écrire comme suit :  $f(400 \text{ g}) = 80 \text{ g}$  et  $1000 \text{ g} = 2 \times 400 \text{ g} + \frac{400\text{g}}{2}$  donc  $f(2 \times 400 \text{ g} + \frac{400\text{g}}{2}) = 2 \times f(400\text{g}) + \frac{f(400\text{g})}{2}$ . La deuxième méthode fait intervenir le coefficient de proportionnalité entre les masses de sucre et de fruit. Elle peut s'écrire comme suit :  $f(400 \text{ g}) = 80 \text{ g}$  et  $\frac{400\text{g}}{5} = 80 \text{ g}$  donc  $f(x) = \frac{x}{5}$  ;  $f(1000 \text{ g}) = \frac{1000\text{g}}{5}$ .

Bien que le savoir savant de référence soit le « numérique », ces deux techniques font appel à des opérations sur les grandeurs (d'ailleurs, incomplètement formulées dans les instructions officielles, comme on le voit dans les extraits) : addition de grandeurs et multiplication (ou division) d'une grandeur par un scalaire.

En fait, en 1980, les instructions réintroduisent discrètement les grandeurs dans le numérique. Plus précisément, c'est le 'continu' qui est réintroduit pour étudier les décimaux et fractions. Il s'agit alors de proposer aux élèves des « situations » qui leur permettront de « prendre conscience de la nécessité de disposer de nouveaux nombres ». Cette approche est confirmée par les programmes suivants. Ce n'est cependant qu'en 2002 que les grandeurs apparaissent explicitement, plus précisément les longueurs et aires, par exemple :

[...] utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires, une unité de mesure étant choisie explicitement.

Ceci signifie que, depuis 1980, les instructions prescrivent l'étude des fractions par la mesure des grandeurs d'objets (des tâches) et, depuis 2002, des techniques de résolution pour la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs. Les formulations utilisées par les programmes (« raisonnements personnels », « situations », « prendre conscience de la nécessité ») permettent d'affirmer que les grandeurs sont réintroduites pour satisfaire les besoins de l'organisation didactique, à savoir la construction des savoirs par les élèves.

Or les grandeurs n'existent pas dans une théorie numérique des nombres et de la proportionnalité. La praxéologie apparaît alors 'coupée en deux' : du fait de la pression de l'organisation didactique, des grandeurs interviennent dans les composantes tâches et techniques ; du fait du savoir savant de référence, les grandeurs n'existent pas dans les composantes technologiques et théoriques. Il y a ainsi un paradoxe : le retour des grandeurs à partir des années 80, par le truchement de l'organisation didactique préconisée depuis 1970, entre en contradiction avec le choix théorique du « numérique » également fait en 1970. Heureusement, la théorie est, ici, *évanouissante*...

Nous cherchons alors à interpréter ces tâches et techniques impliquant des grandeurs dans une théorie mathématique. Pour ce faire, nous utilisons un savoir savant du second ordre, la théorie des grandeurs développée par Rouche (1992, 1994), que nous désignerons par la TGR.

Les tâches réintroduites pour étudier les fractions s'interprètent alors 'littéralement' dans la TGR. En effet, nous faisons notamment correspondre aux 'objets concrets à mesurer' des programmes des 'objets mathématiques à mesurer' de la TGR. Ajoutons d'ailleurs que, depuis 1970, les programmes demandent plus ou moins explicitement de réaliser des classes d'objets par comparaison et que la TGR définit effectivement les grandeurs comme des classes d'objets obtenues par comparaison.

Par ailleurs, dans la TGR, la proportionnalité est caractérisée par l'existence d'une application  $f$  entre les ensembles d'objets qui a deux propriétés :  $f$  conserve les classes et  $f$  est un morphisme additif (propriété de linéarité pour l'addition des objets :  $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ). Un théorème précise alors qu'elle a la propriété de linéarité pour la multiplication externe par un rationnel :  $f(ka)=f(kb)$  où  $k$  est rationnel. La TGR permet d'établir un autre théorème (Rouche l'évoque mais ne le fait pas) relatif au coefficient de proportionnalité dans deux circonstances : celle où les deux grandeurs en correspondance sont de la même espèce (il s'agit alors du même ensemble de grandeurs qui est donc doté d'une multiplication par un scalaire qui pourra faire office de coefficient), c'est notamment le cas des situations d'agrandissement à coefficient rationnel et des 'recettes' dans lesquelles on met en relation des masses de sucre et de fruits par exemple ; celle où on s'intéresse au rapport, s'il est rationnel, entre les mesures des grandeurs en correspondance (ce qui est possible même si les grandeurs ne sont pas de la même espèce), il s'agit alors de relation numérique. Pour établir le théorème, il faut ajouter une condition sur les ensembles de grandeurs : deux grandeurs de même espèce doivent être commensurables ce qui est toujours le cas quand on travaille avec des grandeurs mesurées par décimaux dans le système métrique.

Un texte officiel de 2005 pour l'articulation école – collège (DESCO 2005, pp. 90-91) précise que « le coefficient de proportionnalité est (...) utilisé, en particulier dans le cas où est mise en jeu une relation entre grandeurs de même nature (...) » ce qui n'exclut pas qu'on l'utilise dans d'autres situations mais le texte ne dit pas comment faire.

Il est alors particulièrement éclairant pour notre propos de juxtaposer les méthodes de résolution prescrites par les programmes et celles qui peuvent exister dans la TGR : linéarité additive et multiplicative (rapports internes rationnels), coefficient de proportionnalité numérique dans le cas où les grandeurs en relation sont de même espèce (rapport externe rationnel). Le programme n'évoque pas les rapports de mesure ; dans la TGR, comme les nombres sont tirés des grandeurs, ils sont seconds. Dans la TGR, les grandeurs quotients et produits n'interviennent pas. Dans le curriculum actuel, la résolution de problèmes à l'aide de ces dernières grandeurs est introduite après l'école primaire. La coïncidence est donc forte entre ce que permet la TGR et ce qui est prescrit pour l'école.

L'organisation didactique fait ainsi exister dans les praxéologies mathématiques des blocs praxis qui ne se traduisent pas littéralement dans le savoir savant de référence. Et tout se passe comme si la TGR proposait une formalisation mathématique des objets didactiques des programmes récents.



De cette façon, nous inventons des praxéologies (elles n'existent pas dans le curriculum). Ces praxéologies permettent d'associer au bloc praxis un bloc technologique où la théorie n'est plus évanouissante. Les quatre composantes de la praxéologie : tâches, techniques, technologie et théorie sont 'proches', en ce sens que les tâches et les techniques correspondent 'littéralement' à des axiomes ou à des propriétés de la théorie. Ceci constitue, pour nous, une seconde méthode pour caractériser une théorie sous-jacente dans les programmes.

#### *Propriétés potentielles*

Le 'nouveau' savoir savant est sans doute plus compatible avec les besoins trophiques d'élèves de primaire que le numérique : il devrait leur permettre de formuler des propriétés qui se traduisent littéralement dans la théorie. Dans une certaine mesure, la théorie permet de prédire les techniques de résolution compatibles avec des besoins trophiques donnés.

Cette construction a peut-être un autre avantage. Les praxéologies ponctuelles y seraient en effet susceptibles de s'agglomérer facilement en praxéologies locales relativement complètes, c'est probablement ce que montre la coïncidence entre les techniques de résolution des problèmes de proportionnalité prescrites par les programmes et les propriétés de la théorie. L'existence d'une théorie commune pour la construction des rationnels et de la proportionnalité permet aussi d'envisager une praxéologie globale.

#### *Un phénomène écologique*

Les réapparitions locales des grandeurs dans le numérique, plus précisément les reconfigurations successives des praxéologies qu'elles suscitent depuis la réforme, constituent un phénomène écologique remarquable.

Il faut retenir que l'organisation didactique pilotée par la construction de ses savoirs par l'élève fait apparaître des types de tâches et des techniques très éloignés du savoir savant de référence (le numérique) et qu'un savoir savant (qui n'est pas celui de référence) mais qui est adapté pour l'enseignement avant d'être transposé permet d'interpréter les quatre composantes des praxéologies dans la théorie. Ainsi, le savoir de référence lorsqu'il se transforme au fil des transpositions, sous la pression de l'organisation didactique principalement, semble-t-il plus ou moins disparaître en se reconstituant, à terme, de façon plus ou moins chaotique, en un savoir savant du second ordre différent du savoir savant originellement transposé.

#### *Une théorie minimale et naïve des grandeurs*

Pourquoi est-ce la TGR et non une autre théorie qui permet d'interpréter les évolutions récentes des programmes en primaire ? Nous proposons l'explication suivante.

Dans la mesure où l'on veut privilégier les raisonnements personnels des élèves, nous pensons qu'on les place dans la situation de réinventer les mathématiques les moins sophistiquées pour traiter la proportionnalité. Or, Rouche (1992) présente une étude épistémologique des grandeurs et des nombres rationnels, les références bibliographiques du livre mentionnent d'ailleurs des travaux de didactique. En quelque sorte, il propose une telle théorie mathématique. Par exemple, le coefficient de proportionnalité, en tant que rapport de grandeurs d'espèces différentes, relève d'un cadre mathématique plus sophistiqué, il est plus

difficile à interpréter de façon élémentaire, probablement plus difficile à faire intervenir dans un raisonnement personnel à l'école primaire.

La volonté, affichée depuis 1970, que les élèves construisent leur savoir conduit ainsi spontanément (au sens de non contrôlé) à l'émergence, à l'invention ou la réinvention de bribes de théories mathématiques élémentaires de l'arithmétique. La TGR est une théorie des grandeurs minimale (en ce sens qu'elle ne permet pas de multiplier des grandeurs entre elles) et naïve (en ce sens qu'elle ne permet pas de construire les réels). Une théorie numérique, pour des raisons épistémologiques, est beaucoup moins intuitive qu'une étude de l'arithmétique reposant sur les grandeurs d'une théorie minimale et naïve.

Est-ce à dire qu'on ne peut enseigner en primaire autre chose que des mathématiques s'appuyant sur une théorie minimale et naïve des grandeurs ? L'appui sur une théorie intermédiaire est-il possible ? Une première étude de cette question fera l'objet du point suivant.

### **5. Un traité pour l'enseignement actuel ?**

Notre horizon est constitué par la recherche de ce que pourrait être une 'bonne' théorie des grandeurs pour l'école primaire, pour l'enseignement actuel des grandeurs, nombres et opérations. Il ne s'agit d'ailleurs pas forcément d'identifier une théorie, mais éventuellement plusieurs qui se complèteraient (Chambris 2008, pp.123–141). Nous présentons ici des éléments pour la réflexion.

Nous considérons, et ce point est essentiel, que la composante technologique doit être accessible aux élèves de primaire et aussi, d'une façon qui reste à préciser, la composante théorique. En effet, il s'agit de permettre aux élèves de formuler des discours justificatifs compatibles avec la théorie de référence, pour qu'ils fassent des mathématiques, et pour permettre aux enseignants de relayer ces discours dans un cadre théorique bien identifié.

Nous cherchons donc une (ou des) théorie(s) qui permette(nt) de « coiffer »<sup>5</sup> les besoins mathématiques et didactiques relatifs aux grandeurs, nombres et opérations : c'est-à-dire, recouvrant notamment les tâches, techniques qu'on souhaite enseigner en primaire et qui pourrait aussi permettre de satisfaire les besoins pour le début du secondaire. D'ailleurs, dans le cadre d'un travail prospectif, une étude plus large incluant des *curricula* anciens ou étrangers permettrait d'affiner le catalogue des besoins.

#### *'Contenu' de la théorie*

La question des savoirs savants du second ordre a été posée et longuement étudiée dans les préparatifs de la réforme. Le projet de « L'enseignement de la géométrie » (Choquet 1964) est par exemple de proposer une axiomatique pour la géométrie au secondaire (il en propose en fait plusieurs) :

J'ai pensé que nos enfants avaient besoin d'un exposé de la géométrie qui parte, comme chez Euclide, de notions tirées du monde sensible, mais qui leur permette d'utiliser très vite les outils souples et féconds de l'algèbre. (Op. cité, Avertissement)

Nous retenons de cet extrait le point de départ de l'exposé : partir de notions tirées du monde sensible, mais qui permettent d'utiliser rapidement d'autres outils. Il s'agit pour nous

de partir des objets qui représentent les grandeurs et de pouvoir utiliser plus ou moins rapidement les nombres et les opérations sur les nombres.

Il existe une relative diversité des théories des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure. D'ailleurs, il ne s'agit pas toujours de savoirs savants du second ordre. Elles mettent en relation (ou non) des grandeurs avec des nombres, des opérations ou la proportionnalité. L'étude de théories existantes permet de comparer leurs présupposés et les objets qu'elles permettent de construire.

Cette étude permet ensuite de confronter théories et besoins de l'enseignement : telle théorie 'inclut'-elle telle praxéologie qu'on prévoit d'enseigner ? Dialectiquement, la confrontation des théories aux praxéologies envisagées permet notamment de repérer des tâches manquantes ou des techniques alternatives.

Ci-après, nous confrontons les théories à des exemples de besoins relatifs au bloc praxis des praxéologies.

Appuyer la construction des nombres non entiers sur les grandeurs exclut d'utiliser une théorie des grandeurs qui suppose les réels construits, plus encore, une caractérisation des grandeurs qui utilise l'additivité de leur mesure (fonction « mesure »). Toutes les théories des grandeurs qui n'utilisent pas les fonctions « mesure » pour caractériser les grandeurs relient l'addition et l'ordre des grandeurs en utilisant : soit l'axiome d'Archimède et la compatibilité de l'ordre de l'addition, soit un axiome plus faible (du type :  $a > b$  si et seulement si il existe  $c$  tel que  $b + c = a$ ) que nous appelons « axiome de l'addition qui agrandit et d'existence de la soustraction ». A notre connaissance, il n'y a pas de tâche qui corresponde à cet axiome qui soit habituellement enseignée. On pourrait en inventer. Qu'est-ce que cela apporterait aux élèves ?

Toutes les théories des grandeurs qui construisent des nombres non entiers disposent d'un axiome qui assure soit la divisibilité d'une grandeur par un entier, soit l'existence de très petits éléments (propriété à laquelle sont adjointes des propriétés de continuité qui assureront finalement la divisibilité d'une grandeur par un entier). Contrairement aux autres théories que nous avons étudiées, celle de Lebesgue (1975, chapitre II) propose un moyen de construire les réels à partir des grandeurs sans recourir à une construction préalable des fractions mais elle inclut un processus itératif de mesurage en nombres entiers (par fractionnements successifs de l'unité), processus à peine visible dans le programme de 1945.

La définition des décimaux du programme de 1970 est formellement peu différente de celle de 1945 mais elle n'est pas satisfaisante. En effet, en 1970, pour obtenir les décimaux, on mesure des grandeurs sans fractionner d'unité mais en en accolant (cf. §2. dans cette partie). Le nombre décimal est obtenu par une réécriture d'entier et non par un raffinement du mesurage. Les instructions ne proposent d'ailleurs à aucun moment la tâche suivante : étant donné un nombre (non entier) et une unité, déterminer un objet dont la mesure dans cette unité est ce nombre. Nous interprétons cette lacune comme la manifestation de l'impossibilité, avec la définition adoptée, de proposer une praxéologie pour cette tâche.

---

<sup>5</sup> Nous reprenons l'expression de Neyret.

Il faudrait adapter la définition du programme de 1970 de la façon suivante (qui n'est pas très différente de ce que propose Lebesgue) :

Soient  $U$  une unité et  $A$  un objet. Le millième de  $U$  constitue une nouvelle unité  $V$ . Si la mesure de  $A$  est 45 quand l'unité est  $V$ , alors la mesure de  $A$  est 0,045 lorsque l'unité est  $U$ .

Pour réaliser cette adaptation, il faut fractionner les grandeurs ce qui n'est pas compatible avec l'intention du programme de 1970 d'après nos analyses du §2.

Pour la proportionnalité, si on ne souhaite pas enseigner de technique impliquant les produits et quotients de grandeurs, une théorie élémentaire des grandeurs du type de la TGR (intégrant éventuellement la possibilité de construire les irrationnels) utilisant la multiplication d'une grandeur par un scalaire suffit.

Certaines théories peuvent susciter des besoins trophiques importants. Ils peuvent être difficiles à satisfaire avec des jeunes élèves (parce que conceptuellement complexes) mais aussi difficiles à satisfaire en termes d'écologie. Ce problème risque en effet de se présenter si les connaissances nécessaires pour satisfaire les besoins sont utilisables dans un trop petit nombre de praxéologies.

Il y donc des choix à faire concernant ce qui serait possible ou souhaitable d'enseigner et les théories qui accompagnent ces choix en prenant à la fois en compte des éléments relatifs aux composantes des praxéologies et à leur écologie.

L'élaboration d'un traité pour l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations en primaire reste à faire et nous avons commencé à identifier des types de conditions pour constituer le savoir savant du second ordre qu'il contiendrait. Il s'agit donc de proposer une axiomatique et des théorèmes. L'axiomatique assure la consistance de ce qui est enseigné. Les théorèmes (et les axiomes) peuvent se traduire en tâches ou techniques qu'on prévoit d'enseigner (ou qui sont susceptibles d'exister dans la théorie, sans prétendre bien sûr à l'exhaustivité, ce qui n'a pas de sens en mathématiques). Il faut aussi un texte d'accompagnement précisant peut-être notamment certaines limites de l'axiomatique (sur ce qui n'est pas susceptible d'exister par exemple).

#### *'Forme' de la théorie*

L'étude des textes qui ont eu pour intention de proposer des fondations pour l'enseignement des mathématiques élémentaires nous permet d'avancer quelques éléments sur la forme qu'un traité pourrait prendre.

Les textes que nous avons proposés des préambules qui peuvent correspondre à des raisons d'être de la théorie (Chevallard 1992a).

Malgré « l'avertissement » qu'il formule, Choquet ne met pas en relation l'axiomatique qu'il propose et le monde sensible.

Rouche propose deux formes différentes de textes. En 1994, il donne une théorie des grandeurs, en partant des objets, où chaque axiome est relié à l'expérience. Des expériences « physiques » sont proposées pour interpréter le choix de l'axiome, elles permettent aussi d'exposer un langage d'évocation. Quelques alternatives axiomatiques sont suggérées, sans être développées. Des commentaires relatifs à la psychologie du développement (travaux de Piaget) sont insérés pour évoquer des difficultés didactiques prévisibles et auxquelles répond la théorie. Rouche distingue les axiomes introduits pour faire écho à des propriétés de

l'univers familier et ceux introduits par nécessité « mathématique » (qui apparaissent comme des évidences expérimentales).

Dans (Rouche 1992), la formulation des axiomes n'est pas associée directement à l'expérience physique. Le texte et les axiomes ne se correspondent pas exactement. Les références aux travaux piagétien sont nombreuses. Certains développements du texte ne sont pas interprétés dans la théorie. Tel est le cas des éléments que nous avons précisés sur la proportionnalité, par exemple.

À notre disposition, nous avons aussi le traité de Reynaud qui est un exemple de traité qui a fonctionné. Il date d'une époque où les mathématiques savantes n'avaient pas encore adopté le formalisme actuellement en vigueur. Pour cette raison mais ce n'est sans doute pas la seule, il comporte de très nombreux discours pour accompagner les calculs. Il ne comporte pas explicitement d'éléments relatifs aux difficultés des élèves.

La place laissée à la langue naturelle est probablement déterminante dans une théorie pour l'école primaire. Rouche (1992, p.88-89 et 104-106) propose des développements sur la façon de *dire* les opérations sur les grandeurs. Dans les extraits des instructions de 2002, la langue naturelle précède le symbolisme arithmétique. Comment penser les relations entre symbolisme et langue naturelle ? L'étude de cette question ne va probablement pas sans poser des difficultés épistémologiques sans doute déjà rencontrées lors des crises qui ont conduit au formalisme.

## Chaînes trophiques

Dans cette partie, nous approfondissons l'étude des liens entre objets d'enseignement entreprise avec la lecture des programmes. Les questions qui nous préoccupent sont : dans l'enseignement ancien, en quoi les grandeurs et les nombres contribuent-ils à la connaissance du sens des opérations ? En quoi les grandeurs (dont le système métrique) contribuent-elles à la connaissance de la numération de position ? Qu'en est-il aujourd'hui ?

Le but de cette partie est d'identifier les réseaux trophiques avant la réforme pour poser des questions d'ordre écologique sur l'enseignement actuel.

### 1. Méthodologie

Les études précédentes ont permis de préciser la troisième hypothèse sur l'existence de réseaux trophiques anciens : imbriquant numération et système métrique d'après les programmes, impliquant les opérations au sein du bloc grandeurs, nombres, opérations d'après les théories. Pour mettre en évidence ces réseaux, une échelle plus fine que celle des programmes est nécessaire. Notre corpus est constitué par des manuels scolaires, ce qui semble adapté compte-tenu de l'époque que nous étudions.

Le premier niveau d'étude est assez grossier : les titres des leçons dans les sommaires des manuels sont utilisés pour identifier les grands axes des progressions. À un niveau plus fin, le contenu des leçons repérées dans les sommaires permet de connaître les praxéologies. Principalement parce que l'étude des programmes met en évidence un point apparemment crucial sur l'articulation entre numération des entiers et système métrique en 1923 au cours élémentaire (7-9 ans, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> grades), l'étude de manuels est centrée sur ce niveau de l'école

primaire tant pour les nombres que pour les opérations. Pour ce qui concerne les nombres entiers et leurs relations avec les grandeurs, elle s'étend du début du 20<sup>e</sup> siècle à la réforme ; pour le sens des opérations, des années 1930 à la réforme.

Dans un deuxième temps, nous interrogeons les conditions de vie de certains objets de ces réseaux anciens dans l'enseignement actuel. Une hypothèse de travail est que la qualité des réseaux trophiques se manifeste dans les connaissances des élèves. Plus précisément, d'une part, si deux tâches sont proches dans un réseau trophique (dans une même praxéologie locale, par exemple), alors elles sont traitées par des techniques proches ; d'autre part, si une tâche est très peu réussie, cela peut être parce qu'elle n'est pas travaillée mais aussi parce qu'elle est mal travaillée. Ce dernier cas peut se produire notamment si la tâche est travaillée isolément, c'est-à-dire si elle n'appartient pas à un bon réseau trophique.

Pour ce faire, à l'appui de notre connaissance empirique de l'école primaire française actuelle et après une première étude bibliographique sur les difficultés ou les connaissances des élèves s'appuyant notamment sur une étude des évaluations nationales à l'entrée en 6<sup>e</sup> (11-12 ans, 6<sup>e</sup> grade) (Chambris 2008, pp.245-278), nous formulons des hypothèses sur l'inexistence ou la faiblesse actuelles de certains réseaux trophiques identifiés dans l'enseignement ancien. Puis nous élaborons un questionnaire pour mieux identifier les connaissances des élèves. Nous le faisons passer à 277 élèves de fin de primaire (fin de 5<sup>e</sup> grade). Nous tirons de l'analyse que nous faisons des réponses des questions plus précises sur les réseaux trophiques dans l'enseignement actuel.

## **2. Écologie du sens des opérations**

### *Introduction*

Nous cherchons donc à repérer les chaînes trophiques impliquant les opérations dans les manuels anciens. Pour ce faire, nous identifions d'abord les praxéologies activant l'objet 'sens des opérations' dans au moins une de leurs composantes, puis les relations éventuelles entre praxéologies.

La recherche de telles chaînes trophiques se révèle alors complexe. Les opérations sont en effet nécessairement omniprésentes dans un manuel de primaire. Nous les avons repérées dans quatre habitats : l'étude explicite du sens des opérations ou celle des « problèmes », l'élaboration des techniques de calcul qui conduit notamment aux algorithmes des techniques opératoires, l'étude du système métrique, l'étude de la numération.

Deux chaînes trophiques impliquant les opérations semblent particulièrement intéressantes à présenter<sup>6</sup>. La première concerne le co-développement du sens des opérations et des grandeurs. C'est principalement dans l'étude du système métrique et dans des leçons spécifiques à certains sens des opérations qu'il s'observe. La seconde concerne la relation entre la progression dans les techniques de calcul pour une opération et la résolution des problèmes. Autrement dit, il s'agit de voir comment l'apprentissage des techniques de calcul d'une opération pour différents types de nombres contribue à l'apprentissage du sens de

---

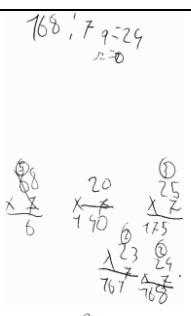
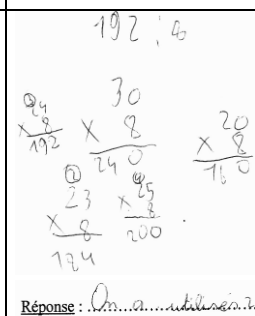
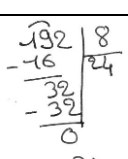
<sup>6</sup> Une analyse plus complète se trouve dans (Chambris 2008, pp.207-236).

l'opération. C'est plutôt dans les leçons sur la numération et sur les techniques de calcul que cela se joue.

À la lumière de ces deux études, nous donnons des éléments sur les connaissances des élèves actuels et posons des questions d'ordre écologique.

### Préambule sur le sens des opérations

Nous commençons par un préambule relatif au 'sens des opérations'. Nous considérons qu'une opération donnée a plusieurs sens et que connaître un sens d'une opération – par exemple un des sens de la division – consiste à reconnaître la possibilité d'utiliser cette opération dans un contexte donné.

	Claire a préparé des paquets de bonbons avec ses 168 bonbons. Elle a mis 7 bonbons dans chaque paquet. Combien Claire a-t-elle préparé de paquets ?	En mettant bout à bout des morceaux de papier de 8 cm de long, on a obtenu une ligne de 192 cm. Combien de morceaux de papier a-t-on utilisés ?
Ana	 <p>Réponse : 24</p>	 <p>Réponse : 24</p>
Bela	$7 \times \dots = 168$ $7 \times 2 = 14$ $7 \times 3 = 21$ $7 \times 4 = 28$ $7 \times 5 = 35$ $7 \times 6 = 42$ $7 \times 7 = 49$ $7 \times 8 = 56$ $7 \times 9 = 63$ $7 \times 10 = 70$ $7 \times 11 = 77$ $7 \times 12 = 84$ $7 \times 13 = 91$ $7 \times 14 = 98$ $7 \times 15 = 105$ $7 \times 16 = 112$ $7 \times 17 = 119$ $7 \times 18 = 126$ $7 \times 19 = 133$ $7 \times 20 = 140$ $7 \times 21 = 147$ $7 \times 22 = 154$ $7 \times 23 = 161$ $7 \times 24 = 168$ <p>Réponse : 24 paquets</p>	 <p>Réponse : 24 morceaux</p>

**Figure 1.** – Résolution de 2 problèmes de division par 2 élèves de fin de 5<sup>e</sup> primaire

Plus précisément, nous distinguons sens de l'opération et sens du problème. Nous disons qu'Ana et Bela (figure 1) *connaissent la division* (Chevallard 1999, p.91), cela se manifeste par l'utilisation d'un ostensif caractéristique de l'opération, la potence ou ':', dans la résolution d'un problème. Dans les deux cas, Bela identifie le *sens du problème* puisqu'il utilise une technique susceptible de conduire à la résolution de la tâche. Toutefois, pour résoudre le 1<sup>er</sup> problème, Bela écrit des multiplications, c'est-à-dire un ostensif qui *a priori* n'active pas nécessairement le non-ostensif 'notion de division' mais visiblement le non-ostensif 'notion de multiplication'. Nous disons qu'il reconnaît un *sens de la multiplication* dans le 1<sup>er</sup> cas et un *sens de la division* dans le 2<sup>e</sup>.

Ana reconnaît un *sens de la division* pour chaque problème. En effet, elle cherche explicitement à déterminer un quotient (et un reste dans le 1<sup>er</sup> problème) même si elle utilise des multiplications pour ce faire.

Sans qu'il soit nécessaire d'exhiber leurs productions, il est clair qu'il existe des élèves qui identifient le sens de problèmes de division sans 'connaître la division'. Des élèves de

maternelle qui résolvent des problèmes de partage et groupement sont probablement dans ce cas.

### *Chaîne trophique contenant les schémas cotés*

Pour montrer les relations entre grandeurs et opérations, nous prenons l'exemple de la longueur : d'abord parce que son étude est souvent plus développée que celle d'autres grandeurs ; ensuite parce que cette étude contribue à celle d'autres grandeurs comme nous allons le voir ; enfin, et ce n'est pas sans doute pas indépendant des deux raisons précédentes, parce que la longueur est une grandeur fondamentale pour l'étude des nombres en général, même pour la sphère mathématique savante.

Nous donnons le schéma général de la chaîne trophique pour l'étude de la longueur et l'illustrons par des références ou des extraits d'un manuel scolaire du cours élémentaire (Marijon CE 1947)<sup>7</sup>. Il a été publié pour la première fois au milieu des années 30. Nous l'avons choisi parce que la structure de la chaîne y apparaît particulièrement nettement.

Au début du CE1, après les collections discrètes, une ou deux unités de longueur sont étudiées : le mètre et/ou le centimètre. Cette étude comporte notamment des tâches d'estimation et de mesurage de longueur qui ont un petit nombre d'unités (entre un et dix mètres, resp. entre un et dix centimètres).

L'étude de l'addition (qui est une reprise du Cours Préparatoire, 1<sup>er</sup> grade, cours que nous n'avons pas étudié) est conduite aussi en début d'année : avec des tâches dans le discret, sur des longueurs, sur des nombres (figure 2). Le cas de la longueur est souvent présenté dans la leçon, dans une des unités étudiées. Il y a alors un dessin et un discours pour donner le lexique spécifique : en particulier l'expression « bout à bout ».

Des tâches d'évocation impliquant la longueur sont prescrites, avec ou sans dessin. Par exemple,

Jules creuse un fossé. Il en a creusé 9 mètres et il lui en reste 7 mètres à creuser. Quelle sera la longueur du fossé ? (Marijon CE1 1947, p.13, 3<sup>e</sup> leçon, Mesure des longueurs)

Des dessins de longueur peuvent être le support à des problèmes de longueurs, accompagnés ou non d'un texte. Le plus souvent, le dessin est à une certaine échelle (1 ou autre) (figures 2 et 3).

Des tâches mettant en relation calcul et mesurage sont prescrites dans les unités étudiées précédemment. Par exemple :

Dessinez une ligne droite de 5 cm. Prolongez-là de 35 mm. Par le calcul et la mesure trouvez la longueur totale. (Marijon CE1 1947, p.20, 7<sup>e</sup> leçon, L'écolier mesure ou dessine de petites longueurs<sup>8</sup>)

---

<sup>7</sup> Dans le corps de l'article, les manuels scolaires de l'école primaire sont désignés par le nom de leur premier auteur, suivi de l'abréviation du niveau de classe, suivi de l'année de publication. Certains manuels anciens sont pour le « cours élémentaire » sans distinction de niveau, toutefois il arrive qu'on y trouve deux parties : une pour le CE1, une autre pour le CE2 ; c'est le cas de (Marijon CE 1947).

<sup>8</sup> La 7<sup>e</sup> leçon est consacrée aux trois unités : dm, cm et mm.





**Figure 4.** – Extraits de (Marijon CE1 1947, p.47, 20<sup>e</sup> leçon, Problèmes d'addition et de soustraction.)

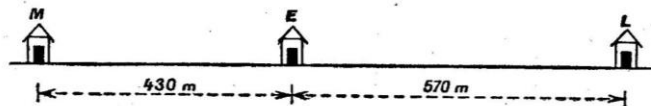
Contrairement aux exercices du type de l'exercice 6, ceux du type de l'exercice 10 sont rares.

Des problèmes de déplacements ou de positions relatives (notamment, problèmes de pancartes et de calcul de distance entre deux villes sur une ligne de train) sont ensuite prescrits. Selon les manuels, des schémas cotés sont ou non présents dans les énoncés. La 22<sup>e</sup> leçon (figure 5) de (Marijon CE1 1947) constitue même une progression pour l'apprentissage de la résolution des problèmes de déplacement en utilisant des schémas cotés : le dessin est fait, l'élève peut le recopier, puis on lui demande de le faire, puis il doit prendre l'initiative de le faire.

Vers la fin de l'année, intervient l'étude de la vitesse. Après les exercices simples d'application, des problèmes de déplacement avec vitesse sont proposés (figure 6). Les techniques élaborées pour la résolution des problèmes de déplacement sans vitesse sont ainsi réutilisées dans un contexte plus complexe (c'est ce suggère la référence à la 22<sup>e</sup> leçon dans la 36<sup>e</sup> leçon sur la figure 6).

5. Quittant leur école et marchant en sens contraire, Martin et Louis sont rentrés chez eux, en M et L, après avoir fait l'un 430 m et l'autre 570 m. Quelle distance sépare les maisons de ces deux élèves?

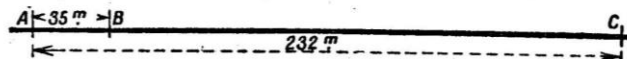
**Dessinez.**



6. Marcel et Louise ont quitté leur maison. Ils sont allés sur la même route et dans le même sens. Une heure plus tard, Marcel, qui est à pied, est arrivé à 4 km de cette maison, tandis que Louise, à bicyclette, en est à 15 km. A quelle distance sont-ils alors l'un de l'autre?

**Dessinez pour bien comprendre.**

7. Un cycliste et un automobiliste sont partis d'un même lieu pour se rendre à une ville V, distante de 131 km de leur point de départ. Lorsque l'automobiliste arrive à destination, le cycliste a parcouru 36 km. A quelle distance le cycliste est-il alors de l'automobiliste?



8. Pierre part de A, Jean part de B, distant de A de 35 m. Ils vont dans la même direction et Pierre rattrape Jules en C, à 232 m de A. Quel trajet a parcouru Jean?

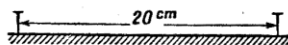
9. Louis et Claude, allant dans le même sens, partent de A et de B. Lorsqu'ils se rejoignent en C, Louis a parcouru 96 km et Claude en a parcouru 111. Quelle est la distance de A à B?

10. Calculez la distance de :

- Argentan à Domfront;
- Dreux à Versailles;
- Argentan à Dreux; etc.



11. Quelle sera la distance de ces deux clous si je les déplace : a) tous les deux vers la droite de 10 cm; b) tous les deux à gauche : A de 10 cm et B de 5 cm; c) A à gauche de 8 cm et B à droite de 2 cm; d) A à droite de 8 cm et B à gauche de 2 cm?



**Figure 5.** – 22<sup>e</sup> leçon : Problèmes sur l'addition et la soustraction. Extrait de (Marijon CE1 1947, pp.50–51)

**36<sup>e</sup> leçon.**  
(Voir 22<sup>e</sup> leçon)

**PROBLÈMES SUR LA MULTIPLICATION  
ET LA DIVISION**

**1<sup>er</sup> Problème.** — *Un cycliste faisant, en moyenne, 18 km à l'heure, a mis 4 heures pour aller de A à B. Quelle est la distance de A à B?*

SOLUTION : La distance de A à B est de :  $18 \text{ km} \times 4 = 72 \text{ km}$ .

**PROBLÈMES**

1. Un automobiliste fait 47 km, en moyenne, par heure et se rend à une ville distante de 250 km. Combien de km aura-t-il faits en 4 heures? Combien lui en restera-t-il à faire?

2. Un automobiliste qui se rend à une ville distante de 300 km n'est plus qu'à 20 km de cette ville après 4 heures de marche. Combien a-t-il fait de km, en moyenne, par heure?

3. En 5 heures, un automobiliste a parcouru 9 fois un circuit routier de 80 km de long. Combien a-t-il fait de km, en moyenne, par heure?

4. Paul et François partent l'un de A, l'autre de B. Ils marchent en sens contraire et se rencontrent en R. Au moment de la rencontre, Paul a fait 8 km et François a marché pendant 2 heures, faisant 4.500 m à l'heure. Quelle est la distance de A à B. **R. : •• km.**

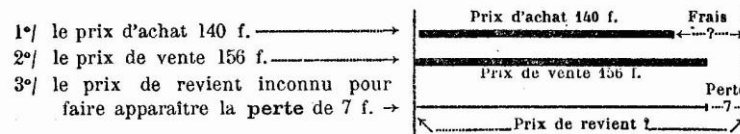
**Figure 6.** — Extraits de (Marijon CE1 1947, p.78 et p.79, 36<sup>e</sup> leçon, Problèmes sur la multiplication et la division.).

La fin de la chaîne (que nous n'avons pas étudiée) est probablement constituée par les célèbres 'problèmes de train' du certificat d'étude.

Après l'introduction des schémas cotés pour étudier la longueur, une bifurcation apparaît dans la chaîne. Ces schémas sont en effet réutilisés pour représenter d'autres grandeurs. En particulier, ils apparaissent, plus ou moins fréquemment, dans les leçons des manuels pour l'étude des pratiques économiques : économies et dettes, perte et bénéfice, vente avec et sans frais, etc. (figure 7)

**1. Problème.** — Un marchand avait acheté un fût de vin 140 f. Par suite d'une baisse, il est obligé de le vendre 156 f, en faisant une perte de 7 f. On demande : 1° le prix de revient du fût; 2° le montant des frais.

Par des morceaux de droite disposés avec ordre, représentons :



L'observation attentive du dessin fait voir que :

- 1° Le prix de revient est :  $156 \text{ f} + 7 \text{ f} = 163 \text{ f}$  ;
- 2° Les frais s'élèvent à :  $163 \text{ f} - 140 \text{ f} = 23 \text{ f}$ .

**2. Conseil.** — Prenons l'habitude de faire des dessins, des graphiques.

Ils illustrent les énoncés et nous aident à les comprendre ; ils nous font voir par quelles opérations nous passerons de ce qui est donné à ce qu'il faut calculer.

**3. Applications.** — Complétez les graphiques ci-dessous en calculant le bénéfice et le prix de vente.



Figure 7. — Extrait de (Marijon CE2 1947 p.108, 13<sup>e</sup> leçon, Achats et ventes avec frais).

### Conclusion

Les unités de longueur et les problèmes impliquant la longueur sont étudiés dans des contextes variés mais identiques. Des dessins de longueur sont utilisés dans des techniques ou des tâches impliquant des opérations. Puis le schéma coté est introduit. Il est d'abord considéré comme une longueur, puis comme un moyen de représenter une longueur (par une longueur) puis n'importe quelle grandeur (par une longueur). L'utilisation de schémas cotés pour résoudre des problèmes d'autres grandeurs est donc postérieure à son utilisation pour résoudre des problèmes de longueur.

Ainsi, ce qui est appris dans la résolution d'une tâche est-il réutilisé dans la mise en œuvre d'une technique ultérieure, c'est-à-dire apparaît comme sous-tâche dans la technique d'une tâche plus complexe. Il y a une chaîne dans laquelle les types de tâches se motivent successivement.

Il est tout à fait intéressant de remarquer que des problèmes impliquant des unités qui ne sont pas étudiées spécifiquement peuvent être proposés très tôt dans l'année, c'est le cas des problèmes d'âge formulés en années par exemple. Si l'unité fait l'objet d'une leçon spécifique, on attendra de l'avoir étudiée pour proposer des problèmes dans cette unité.

Les contextes pour les problèmes impliquant la longueur sont variés : longueurs d'objets, distances puis positions relatives sur une ligne incluant progressivement la vitesse. Les problèmes de monnaie sont relatifs aux pratiques économiques : perte et bénéfice, achats et ventes avec frais, par exemple. Nous n'en avons pas observé au cours élémentaire mais les 'problèmes de robinet' s'inscrivent probablement dans l'étude de la grandeur capacité. Il

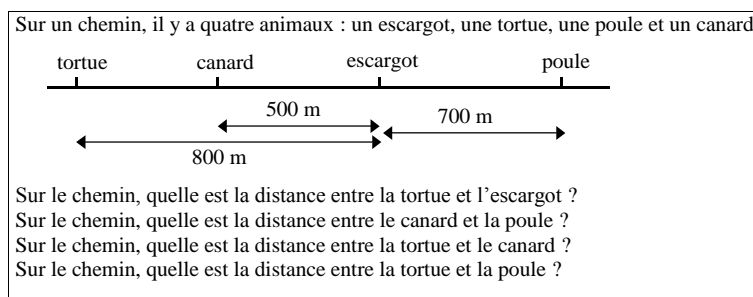
s'agit de 'pratiques de la vie courante'. Elles sont caractéristiques de la grandeur en jeu : elles enrichissent son sens. En effet, comme l'utilisation des ostensifs active les non-ostensifs, nous affirmons que lorsqu'on étudie un 'problème de longueur', on utilise et on apprend quelque chose sur la longueur.

Ainsi, existe-t-il une dialectique entre la construction du sens des opérations et celui du sens de la grandeur. Par ailleurs, l'existence de la chaîne incluant longueur et schéma coté nous semble caractéristique de la présence d'une théorie des grandeurs pour soutenir les opérations.

#### *Connaissances des élèves actuels sur les schémas cotés*

À notre connaissance, cette chaîne trophique n'existe plus dans l'enseignement actuel, en tout cas nous ne l'avons pas reconnue en consultant plusieurs collections de manuels scolaires de primaire d'aujourd'hui. Est-ce à dire que les schémas cotés ne sont pas enseignés ? Non car, depuis plusieurs années, des schémas cotés sont régulièrement présents dans certains énoncés des exercices proposés aux évaluations nationales d'entrée en 6<sup>e</sup> (11-12 ans, 6<sup>e</sup> grade), certaines erreurs sont récurrentes et bien identifiées, nous y reviendrons. Amra (1994) montre aussi que l'utilisation de tels schémas (il s'agit d'en produire pour les utiliser) est problématique pour des élèves de 2<sup>nd</sup>e (15-16 ans, 10<sup>e</sup> grade). Nous avons proposé à des élèves de CM2 (10-11 ans, 5<sup>e</sup> grade) des exercices comportant des schémas cotés, nous en présentons deux. Précisons que les élèves n'avaient pas de règle graduée lorsqu'ils les ont traités.

Voici le premier (figure 8).



**Figure 8.** – Questionnaire élève : exercice « Sur un chemin »

Les quatre animaux sont représentés sur une ligne droite. Certaines distances sont indiquées à l'aide de flèches cotées. Les proportions sont visiblement fausses sur le dessin. Il y a quatre tâches à effectuer.

Trois de ces tâches sont réussies à plus de 75%. Pour déterminer la distance entre la tortue et l'escargot, il faut lire la distance sur le schéma, 800 (R = 85%)<sup>9</sup>. Pour la distance entre le canard et la poule, il faut additionner deux longueurs : 500 et 700 (R = 75%). Pour la distance entre la tortue et la poule, il faut additionner 800 et 700 (R = 75%).

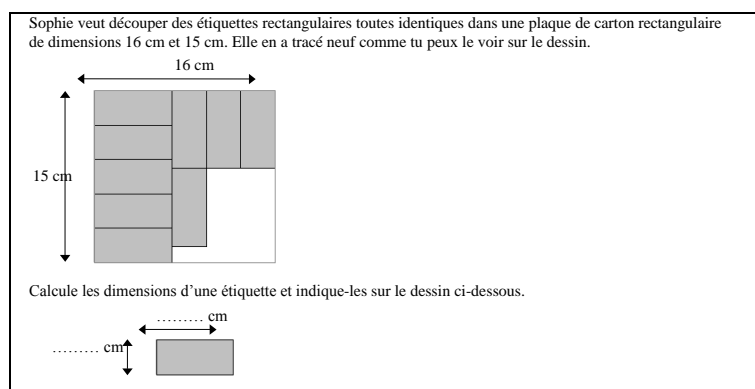
L'autre tâche consiste à déterminer la distance entre la tortue et le canard. Elle mobilise une soustraction : 800-500. Elle est beaucoup moins bien réussie que les autres mais en fait il y a trois réponses majoritaires : 300 (35%), 500 (31%), 400 (20%). Les réponses 400 et 500

<sup>9</sup> R désigne le taux de réussite. La référence est le nombre total d'élèves.

sont probablement dues au fait que le canard semble être représenté « au milieu » entre la tortue et l'escargot, 400 est probablement obtenu par le calcul '800 : 2' et 500 par comparaison de la distance entre la tortue et le canard à la distance entre le canard et l'escargot. Ces deux réponses montrent une interprétation du schéma en termes de proportionnalité, plus ou moins grossière.

Pour cette dernière question, nous observons, par ailleurs, qu'environ 5% des élèves rayent une première réponse : 400 ou 500 puis donnent la bonne réponse 300. Ceci est probablement le signe d'un renoncement à la proportionnalité et la manifestation d'un conflit cognitif entre la valeur 800 qui se lit sur le dessin et ce qui s'obtient par un calcul additif très simple impliquant les proportions du dessin (400 + 500 ou 500 + 500).

Voici maintenant un autre exercice qui implique des schémas cotés (figure 9). Il est directement inspiré des évaluations d'entrée en 6<sup>e</sup>. Nous avons modifié un peu les valeurs numériques.



**Figure 9.** – Questionnaire élèves : exercice « Les étiquettes »

Une erreur prégnante consiste à donner, malgré l'absence de règle graduée, les dimensions du dessin (les élèves répondent alors 1 cm - 2 cm ou 1 cm - 3 cm). Environ 10% des élèves fournissent une telle réponse. Toutefois, cette erreur est très minorée par rapport à ce qu'on observe dans les évaluations d'entrée en 6<sup>e</sup> où la moitié des élèves mesurent avec la règle. Parallèlement, on observe une réussite beaucoup plus forte dans notre questionnaire qu'aux évaluations nationales : 40% contre 13%. Nous attribuons ce progrès à la suppression de la règle graduée. Cette suppression semble provoquer un changement de contrat didactique qui encourage les élèves à chercher autre chose que la simple mesure avec la règle.

Pour résumer, nous retrouvons deux types d'erreurs sur l'apprentissage des schémas cotés bien référencées dans les évaluations d'entrée en 6<sup>e</sup> : celui où les élèves considèrent que les dimensions de la réalité sont celles du schéma, un autre où ils utilisent avec raison les dimensions indiquées mais à tort les proportions du schéma. Nous pensons que nous mettons en évidence des conditions pour les faire apparaître et peut-être disparaître : la suppression de la règle graduée pour modifier le contrat didactique, des proportions fausses et des calculs simples pour favoriser la compréhension des schémas en créant un conflit cognitif. Ces éléments, en particulier la mise en évidence de conditions pour faire émerger un conflit cognitif relatif à l'objet à apprendre, constituent une piste pour concevoir des situations d'apprentissage pour cet objet.

Comment les schémas cotés sont-ils traités dans l'enseignement d'aujourd'hui ? Apparemment, le réseau trophique que nous avons mis en évidence avec la longueur n'existe plus. A-t-il été remplacé ? Le cas échéant, par quoi ? Les difficultés des élèves sont-elles à attribuer à des difficultés conceptuelles liées à cet objet complexe ou au fait que cette notion n'est pas travaillée correctement en primaire ? En particulier, on peut supposer qu'elle est peut-être travaillée isolément : sans être dans un bon réseau trophique.

### Relations entre opérations et nombres : exemple de la division

Nous en venons aux relations entre opérations et nombres. Nous prenons le cas de la division pour deux raisons. D'une part, comme son enseignement est en général réparti dans le temps du cours élémentaire, l'étude des manuels permet de mettre en évidence des moments distincts. D'autre part, il fait régulièrement l'objet de débats.

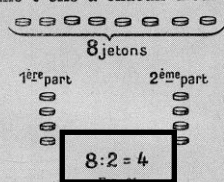
Dans les livres à partir des années 30, le symbolisme des deux points pour la division est introduit assez tôt, dans la leçon « Division » (figure 10), toujours après la multiplication.

**15<sup>e</sup> LEÇON**  
**DIVISION**

**75. 1<sup>er</sup> cas. — Valeur d'une part.**

OPÉRATION CONCRÈTE. — Jeanne partage également 8 jetons entre 2 enfants. Combien en donne-t-elle à chacun d'eux ?

Pour faire ce partage, Jeanne peut donner d'abord un jeton à chaque enfant. Elle aura ainsi distribué 2 jetons.  
Elle donnera de nouveau un jeton à chaque enfant; elle aura alors distribué 2 fois 2 jetons ou 4 jetons.  
Elle pourra faire 4 distributions semblables (fig. 34).  
Chaque enfant aura donc 4 jetons.



76. Jeanne a fait le partage des jetons par soustractions successives, en retirant 2 jetons de son tas de jetons autant de fois qu'elle a pu le faire.  
Elle peut faire ce partage plus rapidement en s'appuyant sur la table de multiplication.  
Elle dira : En 8, combien de fois 2 ? 4 fois, car  $2 \times 4 = 8$ .  
Elle écrira :  $8 : 2 = 4$ ; ou bien  $\frac{8}{2} = 4$ . Cette opération est une division.

77. Pour partager un nombre en parties égales, on fait une division,

$\begin{array}{r l} 8 & 2 \\ \hline & 4 \end{array}$	<p>le nombre 8, que l'on partage, est le <b>dividende</b>; le nombre 2, qui indique le nombre de parts, est le <b>diviseur</b>; le nombre 4, qui indique la valeur de chaque part, est le <b>quotient</b>.</p>
--	--

Le signe de la division est : que l'on énonce **divisé par**.  
Dans la pratique, on dispose l'opération comme ci-contre.

78. 2<sup>e</sup> cas. — **Nombre de parts.**  
Jeanne a 8 jetons qu'elle veut mettre par piles de 2. Combien peut-elle former de piles ?


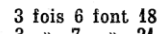

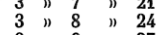

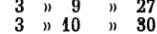

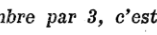

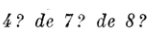
Figure 10. — 15<sup>e</sup> leçon : Division (extrait) (Boucheny CE 1930, p.38)

On étudie ensuite en parallèle des techniques de calcul et des problèmes de division. Une première technique de calcul de division est constituée par l'apprentissage des tables de multiplication, qu'on apprend, souvent mais pas toujours, simultanément pour multiplier et diviser (figure 11).

### CALCUL MENTAL

#### Multiplier et diviser par 3.

1. Apprendre par cœur la table suivante (fig. 41) :

	3 fois 1 font 3		
	3 » 2 » 6		
	3 » 3 » 9		
	3 » 4 » 12		
	3 » 5 » 15		

2. Multiplier un nombre par 3, c'est le tripler.

Quel est le triple de 4? de 7? de 8?

3. Diviser un nombre par 3, c'est en prendre le tiers.

Quel est le tiers de 6? de 12? de 24?  
de 15? de 30?

Fig. 41.

4. Combien a-t-on de cerises si l'on en a :

2 groupes de 3? 3 groupes de 2? 3 groupes de 3?

3 paniers de 20? de 30? de 200? de 300?

5. Un jardinier met des navets par bottes de 3. Combien fera-t-il de bottes avec 9 navets? avec 18? avec 12? avec 24? avec 15? avec 30? avec 21? avec 27?

**Figure 11.** – 19<sup>e</sup> leçon : Entre deux centaines consécutives (extrait).<sup>10</sup>  
(Boucheny CE 1930, p.50)

Une autre technique est reliée à la numération. Pour diviser 800 par 2, on divise 8 centaines par 2 et donc 8 par 2, ce qui permet d'ailleurs de consolider les tables de multiplication (figure 12).

82. **Opérations sur les centaines.** — Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :

$$2 \text{ centaines} + 3 \text{ centaines} = 5 \text{ centaines de jetons,}$$

$$\text{ou } 200 + 300 = 500.$$

On a de même :

$$5 \text{ centaines} - 3 \text{ centaines} = 2 \text{ centaines ou } 500 - 300 = 200.$$

$$3 \text{ centaines} \times 2 = 6 \text{ centaines ou } 300 \times 2 = 600.$$

$$8 \text{ centaines} : 2 = 4 \text{ centaines ou } 800 : 2 = 400.$$

**Figure 12.** – 17<sup>e</sup> leçon : Centaines (extrait) (Boucheny CE 1930, p.43)

D'autres techniques sont encore institutionnalisées lors de l'élaboration de l'algorithme : avec les divisions par les premières puissances de 10 puis par les nombres d'un chiffre suivi de zéros (figures 13 et 14). Ces techniques sont complétées par d'autres qui permettent d'aboutir à un algorithme « complet » : division par un nombre d'un chiffre, division par un nombre de plusieurs chiffres, cas des zéros au quotient, notamment.

**VITESSE MOYENNE. — Problème.** — Une voiture automobile parcourt, sur une piste, 72 km. en 50 minutes. Combien a-t-elle parcouru, en moyenne, par minute?

$t_1$

---

On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute.

$t_{\theta_1}$

---

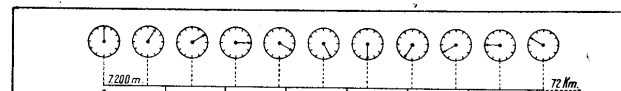
50 mn., c'est 10 fois 5 mn. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 mn. :

$$72.000 \text{ m.} : 10 = 7.200 \text{ m.} ; \text{ reste } 0.$$

En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 mn. :

$$7.200 \text{ m.} : 5 = 1.440 \text{ m. par mn.} ; \text{ reste } 0.$$

$t_1$



**Solution.** — L'automobile parcourt en moyenne :  
 $72.000 \text{ m.} : 50. = 1.440 \text{ m. par mn.}, \text{ reste } 0.$

<sup>10</sup> On remarque que la leçon 19 est déconnectée du calcul mental. L'apprentissage des différentes tables (d'addition et de multiplication) apparaît dans la rubrique « calcul mental » dans les leçons successives pendant plusieurs mois, plus ou moins indépendamment du thème de la leçon.



**Figure 13.** – 72<sup>e</sup> leçon : Division par plusieurs dizaines  
(Châtelet CE2 1932, p.178)

**RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE.**

$  \begin{array}{r}  7200 \mid 0 \quad   \quad 5 \mid 0 \\  \underline{22} \phantom{00} \\  20 \phantom{0} \\  \underline{00} \\  00  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  228 \mid 3 \quad   \quad 7 \mid 0 \\  \underline{18} \phantom{0} \\  43  \end{array}  $
$\tau_2$	

*On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. A la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende.*

<i>Exemples : 72.000 à diviser par 50 ; on divise 7.200 par 5, quotient <b>1.440</b>, reste 0 ; reste définitif <b>0</b>.</i>	$t_2$
<i>2.283 à diviser par 70. On divise 228 par 7, quotient <b>32</b>, reste 4 ; reste définitif <b>43</b>.</i>	$t_2$

**Figure 14.** – 72<sup>e</sup> leçon : Division par plusieurs dizaines  
(Châtelet CE2 1932, p. 179)

Dans les livres anciens, les différentes techniques de calcul de division constituent donc à la fois des étapes dans l'apprentissage de la technique opératoire définitive mais aussi des méthodes de calcul définitives lorsque les nombres sont du type donné. Pour calculer  $12 : 3$ , on utilisera toujours les tables et pour diviser par 30 on divisera toujours par 10 puis par 3.

Sur les figures 13 et 14, deux praxéologies imbriquées sont mises en évidence. On a ainsi une tâche  $t_1$  : un problème de division à résoudre. Sa technique  $\tau_1$  est justifiée par la technologie  $\theta_1$ . Cette technique fournit une technologie  $\theta_2$  pour la technique  $\tau_2$  de calcul d'une division  $t_2$ .<sup>11</sup> Les tâches pour l'apprentissage d'une opération donnée sont ainsi réparties entre tâches de calcul pur et de résolution de problème. Sur la figure 2 (§3. Addition de nombres), on voit d'ailleurs comment la théorie permet de 'tirer' l'addition sur les nombres de l'addition des grandeurs. C'est le même processus qui fait émerger  $t_2$  à partir de  $t_1$ . Les technologies empruntent à la numération (celle de la division par cent est incomplète) et à la proportionnalité. D'autres propriétés, la commutativité de la multiplication des nombres notamment, peuvent aussi être explicitement sollicitées sans être nécessairement nommées.

L'organisation des leçons propose donc une succession de contextes pour mettre les élèves en position de résoudre des problèmes de division, ils travaillent ainsi le sens de la division puisqu'ils connaissent déjà l'opération. Quotient et reste sont déterminés par des techniques, souvent justifiées, qui évoluent en fonction des connaissances calculatoires des élèves : les tables, la numération de position, division par un nombre d'un chiffre, division par un nombre d'un chiffre suivi de zéros, etc.

Il existe ainsi une dialectique entre apprentissage du sens d'une opération et apprentissage du calcul de l'opération. Par ailleurs, chaque étape de l'élaboration de l'algorithme utilise une ou plusieurs des techniques élaborées précédemment. Cela constitue un cas typique de motivation d'un type de tâches.

<sup>11</sup> Dans l'exemple de la division par 70, le manuel étend la technique (la règle) sans commentaire, au cas du reste non nul qui est pourtant plus délicat à justifier.

### *Sur le sens de la division dans l'enseignement actuel*

Dans le curriculum actuel en France, l'accent est mis sur le sens du problème qu'on ne distingue pas toujours du sens de l'opération. En particulier, dans les instructions de 2002, si les élèves résolvent dès l'école maternelle des problèmes de partage et de groupement et commencent à apprendre les tables de multiplication au 2<sup>e</sup> grade, ce n'est qu'au 3<sup>e</sup> ou 4<sup>e</sup> grade que la division est explicitement évoquée. D'ailleurs, les instructions précisent que :

Ce qu'on appelle traditionnellement le « sens des opérations » doit être au centre des préoccupations. À la fin du cycle 3 [fin de 5<sup>e</sup> grade], les élèves doivent être capables de reconnaître quelle opération permet de résoudre la plupart des problèmes qui peuvent être traités à l'aide d'une seule opération. Certains problèmes à une opération ne sont cependant pas reconnus comme tels par tous les élèves et nécessitent le recours à des procédures personnelles : c'est par exemple le cas de certains problèmes de division euclidienne que les élèves vont résoudre par soustractions successives ou par essais de produits.

L'étude des connaissances des élèves (figure 1) nous a amenée à distinguer sens de l'opération et sens du problème. Cela nous amène maintenant à formuler la nécessité, pour l'enseignement actuel, de distinguer entre les deux. Toutefois, cette distinction ne peut probablement se faire qu'en introduisant de façon plus précoce un symbolisme –des ostensifs– pour la division : le mot division et un signe spécifique pour la désigner. D'après la figure 1, une distinction encore plus fine serait peut-être pertinente, incluant sens du problème et sens de l'opération, mais aussi un troisième objet relatif à la technique de calcul de l'opération lorsqu'il y a une opération.

Le choix du signe pour la division est un problème dont la complexité ne doit pas être sous-estimée. En effet, en 1970, au motif que la division euclidienne n'est pas une opération, il est interdit d'utiliser l'ostensif ' $34 : 5 = 6$  (reste 4)' pour la désigner. Les textes officiels actuels sont muets sur cette question. Cela explique peut-être qu'aujourd'hui, dans de nombreux manuels, aucun symbolisme spécifique n'est proposé pour la désigner. Les élèves doivent alors utiliser l'ostensif 'savant' de la division euclidienne ' $34 = (6 \times 5) + 4$ ' pour noter la nouvelle « opération ». Ils sont ainsi amenés à utiliser les signes  $\times$  et  $+$ . Tous les élèves n'activent probablement pas le non-ostensif 'notion de division' lorsqu'ils voient l'ostensif 'savant'. Certains manuels scolaires utilisent la puissance, d'autres la notation 'interdite', un autre a inventé une notation *ad hoc* :

$$34 : 5 ? \quad \begin{array}{l} q = 6 \\ r = 4 \end{array} \quad (\text{Brissiaud CE2 2003})$$

Proposer un symbolisme spécifique, le faire précocement devraient permettre de commencer à enseigner des sens de la division et d'institutionnaliser des techniques de calcul de division, avant que les élèves ne disposent de la technique classique complète.

### **3. Écologie du système métrique et de la numération**

#### *Réseaux trophiques avant la réforme*

Le programme de 1923 prescrit l'articulation du système métrique et de la numération, ce qui n'était pas le cas du programme antérieur de 1882. Comment cela se manifeste-t-il dans ce qui est enseigné aux élèves ?

En fait, dans les manuels, à partir des années 30, l'étude du système métrique se greffe sur celle de la numération. Pour présenter cette greffe, nous évoquons d'abord une tâche, tout à fait banale. Elle n'est pas présente au début du 20<sup>e</sup> siècle, elle apparaît dans les années 30, comme une conséquence de la modification du programme de 1923. Il s'agit de « trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et vérifier ».

Nous avons reconstitué les chaînes qui forment le réseau trophique dans lequel cette tâche se trouve. Nous allons montrer comment elle contribue à quatre domaines de savoirs, c'est-à-dire quatre habitats. Dans chacun d'eux, elle occupe une niche différente de celle qu'elle occupe dans les autres. Cette tâche peut d'abord être interprétée comme une tâche de comparaison de grandeurs, de la masse en l'occurrence. Elle contribue ainsi à la connaissance de la grandeur masse, à ce que c'est qu'être « plus lourd que ». Le fait qu'on compare à « un kilogramme », et non deux objets quelconques entre eux, permet de l'inscrire dans la connaissance du système métrique : on apprend ainsi « comment le kilogramme est lourd ». Le fait qu'on vérifie, probablement en utilisant une balance et une masse marquée, permet de l'inscrire dans une connaissance des pratiques de la vie courante : utiliser une balance (ici en l'occurrence, connaître le déséquilibre) et connaître (reconnaître) la masse marquée du kilogramme. Enfin, cette tâche ne se situe pas n'importe où dans les manuels antérieurs à la réforme : elle apparaît juste après l'étude du millier. Le kilogramme est ainsi vu comme le millier de grammes, et on a une « idée de mille », mille grammes alors qu'on avait donné avant, avec l'étude de l'hectogramme une « idée de cent », avec celle du décagramme une « idée de dix » et avec l'étude du gramme une « idée de un ». Cette tâche contribue alors à la connaissance de la numération. Les grandeurs et leur mesure apparaissent ainsi comme un matériel de numération.

Cet exemple est caractéristique de l'entrelacement des chaînes trophiques. Ainsi, l'étude des praxéologies dans les manuels montre que l'enseignement du système métrique contribue :

- à la connaissance sensible des grandeurs : comment elles s'apprennent par les sens, se comparent, s'ajoutent ;
- à la connaissance des unités métriques : comment elles sont « grandes », quelles relations les lient ;
- à la connaissance des pratiques de la vie courante de mesurage (les instruments et leur utilisation) et à d'autres qui impliquent des grandeurs (langage, commerce notamment).

L'étude du système métrique contribue à celle de la numération. Pour le préciser, nous poursuivons avec deux exemples de types de tâches.

Les tâches de mesurage dans le discret (grandes collections) sont rarement prescrites. En revanche, elles sont décrites. Toutefois, le mesurage dans le continu doit être considéré comme un travail de numération. En effet, comme le suggère l'exemple précédent, l'ordre de grandeur des objets à mesurer est choisi en fonction du domaine numérique étudié : un objet dont la masse est entre 1 kg et 10 kg sera pesé lors de l'étude des nombres de 4 chiffres de façon à associer à chacun des chiffres l'ordre de grandeur d'une unité métrique car 2345 g, c'est 2 kg (ou 2 milliers de g), 3 hg (ou 3 centaines de g), 4 dag (ou 4 dizaines de g) et 5 g.

« Les conversions » constituent un autre type de tâches qui traverse les deux domaines. Par exemple, à la tâche ‘convertir 34 hm en km et hm’ correspond la tâche ‘convertir 34 centaines en milliers et centaines’. À ces tâches formelles, en sont associées d’autres, dans des contextes variés : compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (matériel, métrique), combien de sachets de 100 g de graines de betteraves peut-on faire avec 1 kg ? (évoqué, métrique), Combien faut-il de billets de 100 f pour faire 2000 f ? (évoqué, numération)

Ainsi, la contribution de l’étude du système métrique à la numération est-elle majeure. Elle se manifeste notamment par :

- la mise en relation très stricte des unités du système métrique et de la numération (le plus souvent mètre, gramme, litre avec l’unité ; dam, dag, dal avec la dizaine ; etc.),
- la formulation de techniques ou de technologies pour l’étude du système métrique qui sollicitent explicitement la numération. Par exemple :

Dans l’écriture d’un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s’écrivent au rang des centaines. (Boucheny CE 1930, p.52)

- des types de tâches et techniques ‘à cheval’ sur les deux domaines.

#### *Liens dans les connaissances des élèves actuels*

Nous cherchons maintenant des liens dans les connaissances des élèves actuels : au sein de la numération, au sein du système métrique, dans les relations entre les deux. Nous avons déjà évoqué la difficulté des élèves actuels à résoudre le problème :

Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? (Parouty 2005, p.4)

Dans notre questionnaire, nous avons notamment proposé aux élèves des conversions. « Compléter  $8\text{kg} = \dots \text{hg}$  » (R = 71%). C’est une conversion « hors contexte », formelle. Nous avons aussi proposé : « Combien de paquets de 100 g de farine peut-on remplir avec 4 kg de farine ? » (R = 32%). Le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg peut être interprété comme une conversion d’hectogrammes en kilogrammes. Cet exercice était dans l’enseignement ancien un exercice de conversion, étudié avec le kilogramme et le nombre mille.

Pour identifier les liens que font les élèves entre les exercices, nous avons réalisé une analyse factorielle des réussites. Nous observons notamment que les réussites aux deux exercices sont statistiquement peu corrélées. Nous en déduisons que les élèves ne voient pas qu’une conversion qu’ils savent faire, formellement, peut leur être utile pour résoudre un problème, en contexte. Ils ne sont pas capables d’adapter la technique.

## **4. Conclusions**

### *Sur une dialectique entre besoins trophiques et théorie*

L’exemple du système métrique montre qu’on peut avoir une théorie unique et des domaines non articulés (numération et système métrique avant 1923). Il montre aussi qu’il est possible d’articuler.

À propos des opérations, on observe des réseaux trophiques assez denses. L’exemple des schémas cotés considérés comme des longueurs et celui de l’articulation entre sens des

problèmes et techniques de calcul nous semblent caractéristiques de ce qui peut exister avec une théorie des grandeurs pour étudier les opérations et les nombres.

Ainsi, l'existence d'une théorie qui intègre plusieurs objets apparaît-elle comme une condition favorable, peut-être nécessaire, pour l'articulation entre les objets mais certainement pas suffisante.

#### *Sur une dialectique entre apprentissages conceptuels et 'pratiques de la vie courante'*

Dans les années 30, les énoncés des problèmes relevant des quatre opérations font progresser dans la connaissance de la grandeur, tout en incluant l'étude des pratiques de la vie courante. Nous avons aussi dit que la tâche qui consiste à trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et à vérifier n'existe pas avant les années 30. Avec cette tâche, la connaissance de pratiques de la vie courante contribue à des apprentissages conceptuels sur les nombres.

Typiquement, au tout début du 20<sup>e</sup> siècle, des tâches de mesurage peuvent exister, on apprend alors à utiliser les instruments (une pratique de la vie courante) mais elles ne sont pas reliées à la numération (à des apprentissages conceptuels sur les nombres). Elles sont juxtaposées.

#### *Sur les chaînes trophiques*

Nos analyses (Chambris 2008, pp.145-238) montrent ainsi l'*existence* et l'*imbrication* de chaînes trophiques dans le bloc grandeurs, nombres, opérations. Ces réseaux constituent une propriété remarquable de l'enseignement de l'*'arithmétique'* des années 30 à la réforme.

Une raison de difficultés d'élèves actuels pourrait être la faible imbrication des notions dans l'enseignement actuel, faible imbrication qui aurait pour conséquence d'une part une faible transférabilité des techniques d'une tâche à l'autre car les types de tâches sont constitués en isolats et d'autre part l'impossibilité de travailler suffisamment certaines techniques car elles ne sont pas impliquées dans des chaînes trophiques suffisamment longues.

## **Conclusions et perspectives**

Avant de revenir à nos hypothèses, nous commençons par le constat que l'exclusion des grandeurs du numérique au moment de la réforme a provoqué en primaire un bouleversement curriculaire majeur au sein de l'étude des nombres et des opérations concernant à la fois les théories de référence et les réseaux trophiques et que la situation n'est toujours pas stabilisée.

Nous présentons maintenant des conclusions et des perspectives de recherche en didactique dont certaines ont une dimension historique ou épistémologique.

Nous avons mis en évidence des savoirs savants, dans l'enseignement antérieur à la réforme : il s'agit toujours de construire les nombres et les opérations à partir des grandeurs. Nous avons interprété les praxéologies, aujourd'hui prescrites, dans des savoirs savants du second ordre. D'une certaine façon, après le grand bouleversement de la réforme et l'introduction de « mathématiques modernes », le savoir qui apparaît dans les documents pour le maître se reconstitue, lentement, en un savoir savant du second ordre qui n'est pas le savoir savant de référence. Il s'agit d'une théorie des grandeurs.

Nous avons montré qu'il y a des choix possibles dans les savoirs savants du second ordre pouvant servir de référence pour un objet donné. Le but principal est d'assurer la possibilité de rendre interprétable dans la théorie choisie les discours des élèves et donc de proposer aux enseignants un cadre pour les interpréter. Une contrainte majeure pour choisir une théorie est de prendre en compte l'écologie, en particulier les besoins trophiques. La forme que pourrait prendre un traité pour le primaire reste à préciser. En particulier, quelle place donner à la langue naturelle ? Finalement, comment imposer les choix qui seraient faits ?

Dans l'enseignement actuel, les raisonnements sur les grandeurs sont portés par l'organisation didactique. Disposer d'une théorie des grandeurs comme référence permettrait-il de déplacer une partie des contraintes d'enseignement : de l'organisation didactique vers l'organisation mathématique ?

Sur le plan de l'épistémologie des mathématiques, le début des années 30 correspond à la fin de la crise des fondements. A cette époque, paraissent *La mesure des grandeurs* de Lebesgue et une collection de livres pour l'école primaire dirigée par le mathématicien Châtelet. Que sait-on du rôle de ces mathématiciens dans la conception et la mise en œuvre du programme de 1945 ? On sait qu'un peu plus tard des mathématiciens ont été particulièrement actifs au moment de la réforme pour l'enseignement secondaire. Qu'en est-il pour l'enseignement primaire ? Qui sont les inspirateurs des changements mathématiques ?

L'enseignement ancien, à partir des années 30, nous paraît être extrêmement dense du point de vue des réseaux trophiques. C'est tout le bloc grandeurs, nombres, opérations qui est impliqué avec des chaînes impliquant en particulier grandeurs et opérations (schémas cotés) et des praxéologies locales impliquant grandeurs et nombres (système métrique et numération), nombres et opérations (imbrication du calcul et du sens des opérations). Ces réseaux semblent être dépendants des savoirs savants de référence. Au moins certaines fois, les pratiques de la vie courante semblent être intégrées de façon à contribuer à des apprentissages conceptuels.

Beaucoup des chaînes que nous avons identifiées nous semblent être aujourd'hui perdues. Par suite, notre travail permet peut-être de mieux comprendre des effets souterrains de la rupture de la réforme.

Nous avons posé des questions d'ordre écologique sur l'enseignement actuel des grandeurs, nombres et opérations. Elles pourraient être affinées et étudiées. Que peut-on dire précisément des relations entre système métrique et numération ? Dans quels complexes praxéologiques les schémas cotés sont-ils impliqués ? Nos résultats sur l'enseignement ancien peuvent-ils nous être utiles à titre méthodologique pour analyser le présent ou au contraire risquent-ils de constituer un obstacle en ne laissant voir que des manques ?

Dans le but de renforcer les liens entre les connaissances des élèves, à quelles conditions pourrait-on 'transférer' dans l'enseignement d'aujourd'hui, ces chaînes trophiques et complexes praxéologiques que nous avons mis à jour ? Comment le faire ? La chaîne trophique incluant les schémas cotés existe parce que les lignes cotées sont considérées comme des longueurs et qu'on peut les additionner, les soustraire, etc. Est-il possible que de tels réseaux se constituent aujourd'hui alors que le domaine « mesure » continue à exister ? Nombre de pratiques de la vie courante qui impliquent les grandeurs ont été modifiées, en particulier la numérisation des instruments de mesure limite les manipulations des grandeurs

dans les tâches de mesurage. Quelles pratiques de la vie courante qui impliquent des grandeurs est-il possible ou souhaitable d'enseigner ? Par ailleurs, l'enseignement ancien a la réputation d'être peu générateur de prise d'initiative chez les élèves. Les techniques institutionnalisées sont d'ailleurs très nombreuses. S'agit-il de trouver un équilibre entre ce qui relève d'institutionnalisations systématiques et ce qui n'est pas institutionnalisé mais travaillé quand-même ou s'agit-il d'autre chose ?

L'étude des réseaux trophiques dans l'enseignement ancien pourrait être affinée sur des thèmes proches : la numération des grands nombres, des nombres de deux chiffres. L'étude des opérations au cours élémentaire mériterait d'être approfondie. Par ailleurs, le travail de Ma (1999) laisse penser que des chaînes trophiques, riches et complexes, existent aujourd'hui dans certains pays, notamment en Chine, et pas dans d'autres, aux États-Unis par exemple. C'est un aspect à développer dans des études internationales.

Enfin, d'après les manuels scolaires, les années 30 apparaissent comme un moment particulièrement fécond du point de vue du développement des chaînes trophiques, comme nous l'avons déjà vu. Pourquoi et comment cela s'est-il passé ?

Sur le plan des relations entre théories et écologie, nous n'avons pas trouvé de contre-exemple qui viendrait mettre en défaut notre hypothèse centrale relative à la subordination, au moins partielle, de l'écologie aux savoirs savants de référence : les domaines d'enseignement sont organisés par les savoirs savants de référence. Avec une même théorie (ou des théories compatibles), deux domaines peuvent vivre indépendamment l'un de l'autre. Le contraire peut néanmoins se produire. D'abord, il faut que l'articulation sur le plan théorique n'élève pas de façon inconsidérée les besoins trophiques. Il faut aussi fabriquer des types de tâches 'à cheval' sur les différents domaines ou étroitement reliés par les techniques et leurs technologies. Cela fait perdre la linéarité de la théorie qui, au départ, peut plus ou moins servir de fil conducteur à l'étude. En étudiant d'autres objets anciens, pourrait-on mieux caractériser les relations entre écologie et théories ? Pourrait-on ensuite utiliser les résultats pour concevoir des ingénieries pour l'enseignement actuel ?

## Références

- Amra N. (1994) *Contribution à l'étude différentielle des pratiques des élèves en classe - Comparaison entre élèves d'une classe forte et d'une classe faible*. Mémoire de DEA. Paris : Université Paris-Diderot.
- Artaud M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Bailleul M., Comiti C., Dorier J.-L., Lagrange J.-B., Parzysz B., Salin M.-H. (Eds.) *Actes de la 9<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques* (pp.101-139). Houlgate – Aout 1997 : IUFM de Caen.
- Bezout E., Reynaud A. (1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9<sup>e</sup> édition. Consulté sur Internet le 21 décembre 2007, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incomplétude de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques* 24(2/3) 205-250.
- Bronner A. (1997) *Étude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Thèse. Grenoble : Université de Grenoble I.
- Bronner A. (2008) La question du numérique dans l'enseignement du secondaire. In Rouchier A. et Bloch I. (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp.17-45). Grenoble : La pensée sauvage.

- Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20<sup>e</sup> siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse. Paris : Université Paris–Diderot.
- Chevallard Y. (1992 a) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1) 73–112.
- Chevallard Y. (1992 b) Une réforme inaccomplie. *La gazette des mathématiciens* 54 17–21.
- Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3) 17–54.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 19(2) 221–266
- Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705–746). Jaén : Servicio de publicaciones – Universidad de Jaén.
- Choquet G. (1964) *L'enseignement de la géométrie.* Paris : Hermann.
- DESCO (Direction de l'enseignement scolaire, Ministère de l'éducation nationale) (2005) *Mathématiques – École primaire. Collection école – documents d'accompagnement des programmes.* Paris : Centre National de Documentation Pédagogique
- Griesel H. (2007) *Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege.* *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 39 31–38.
- Harlé A. (1984) *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XX<sup>e</sup> siècle.* Thèse. Paris : Université Paris VII et IREM de Picardie.
- Lebesgue H. (1975) *La mesure des grandeurs.* Paris : Albert Blanchard.
- Ma L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah New Jersey : Lawrence Erlbaum associates
- Neyret R. (1995) *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres.* Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier – Grenoble1.
- Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXI<sup>ème</sup> colloque sur la formation des maîtres* (Cédérom). Toulouse : IREM de Toulouse.
- Rajoson L. (1988) *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse. Marseille : Université Aix-Marseille II.
- Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure.* Bruxelles : Didier Hatier
- Rouche N. (1994) Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique *Repères IREM* 15 25–36.
- Whitney H. (1968) *The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis.* *American Mathematical Monthly* 75 227–256.

## Manuels scolaires

- Boucheny G., Guérinet A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> année).* Paris : Librairie Larousse
- Châtelet A., Condevaux G. Blanquet L. (1932) *Arithmétique. Cours élémentaire (1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> année).* Paris : Bourrellier-Chimènes
- Marijon A., Masseron R., Delaunay E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire.* Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin
- Guilmin A. (1855) *Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges.* Paris : Auguste Durand