



**HAL**  
open science

## Amortissement Multimodal par Couplage Piézoélectrique à un Analogue Electrique Passif

Boris Lossouarn, Mathieu Aucejo, Kenneth A. Cunefare, Jean-François Deü

► **To cite this version:**

Boris Lossouarn, Mathieu Aucejo, Kenneth A. Cunefare, Jean-François Deü. Amortissement Multimodal par Couplage Piézoélectrique à un Analogue Electrique Passif. 20ème Colloque Vibrations, SHocks and NOise, VISHNO 2016, Apr 2016, Le Mans, France. hal-01739704

**HAL Id: hal-01739704**

**<https://hal.science/hal-01739704>**

Submitted on 26 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Amortissement Multimodal par Couplage Piézoélectrique à un Analogue Électrique Passif**

**B. LOSSOUARN<sup>a</sup>, M. AUCEJO<sup>a</sup>, K. A. CUNEFARE<sup>b</sup>, J.-F. DEÛ<sup>a</sup>**

a. Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam

b. Integrated Acoustics Laboratory, Georgia Institute of Technology

L'amplitude vibratoire d'une structure mince peut être réduite grâce au couplage électromécanique qu'offrent les matériaux piézoélectriques. En termes d'amortissement passif, les shunts piézoélectriques permettent une conversion de l'énergie vibratoire en énergie électrique. La présence d'une inductance dans le circuit crée une résonance électrique due à l'échange de charges avec la capacité du patch. Ainsi, l'ajustement de la fréquence propre de ce shunt résonant à celle de la structure mécanique équivaut à la mise en œuvre d'un amortisseur à masse accordée. Cette stratégie est étendue au contrôle d'une structure multimodale par multiplication du nombre de patches piézoélectriques. Ceux-ci sont interconnectés via un réseau électrique ayant un comportement modal approximant celui de la structure à contrôler. Ce réseau multi-résonant permet donc le contrôle simultané de plusieurs modes mécaniques. La topologie électrique adéquate est obtenue par discrétisation de la structure mécanique puis par analogie électromécanique directe. Le réseau analogue fait apparaître des inductances et des transformateurs dont le nombre et les valeurs sont choisis en fonction de la bande de fréquences à contrôler. Cette méthode est appliquée à l'amortissement de structures unidimensionnelles de type barre ou poutre. La stratégie est ensuite étendue au contrôle de plaques minces par mise en œuvre d'un réseau électrique bidimensionnel.

## 1 Introduction

Le shunt résonant [1], constitué d'une inductance et d'un patch piézoélectrique collé sur la structure à contrôler, peut être vu comme l'analogie électrique d'un amortisseur à masse accordé. En effet, lorsque la fréquence de résonance électrique est réglée sur une résonance mécanique, un transfert énergétique génère une réduction de l'amplitude vibratoire. L'utilisation d'un réseau de patches périodiques multiplie le nombre de shunts nécessaires mais a l'avantage de limiter les problèmes d'annulation de charges qui pourraient se produire avec des patches aux dimensions proches des longueurs d'ondes considérées. Cette solution a été appliquée au contrôle de barres [2], de poutres [3] ou encore de plaques [4]. Cependant, chaque shunt résonant n'est efficace que sur une bande de fréquences étroite et les valeurs d'inductance nécessaires sont souvent trop élevées pour permettre une mise en œuvre purement passive. Il est pourtant possible de réduire les spécifications d'inductance et de proposer un contrôle large bande en considérant une interconnexion des patches piézoélectriques plutôt que des shunts indépendants. Cette stratégie fut explorée par Maurini et al. qui ont comparé plusieurs architectures de réseaux périodiques [5]. Il est finalement observé qu'un amortissement multimodal nécessite le couplage de la structure à contrôler à son analogue électrique. Des solutions de contrôle piézoélectrique par réseau analogue passif ont ainsi été proposées pour des poutres [6] et des plaques [7]. Malgré tout, les résultats présentés restent théoriques et prennent en compte un réseau électrique homogénéisé, ce qui s'éloigne des applications pratiques pour lesquelles le nombre de composants électriques est limité.

Cet article synthétise la démarche ainsi que les principaux résultats expérimentaux de l'application de la stratégie d'amortissement piézoélectrique analogue à des cas de barres [8], poutres [9] et plaques [10]. L'élaboration d'un modèle discret approximant la structure continue à contrôler rend possible l'utilisation de l'analogie électromécanique directe qui conduit au réseau électrique analogue [11, 12]. Ce réseau est synthétisé expérimentalement à partir de composants magnétiques passifs puis couplé à la structure mécanique par l'intermédiaire d'un ensemble de patches piézoélectriques. Ceci permet d'observer des réductions de l'amplitude vibratoire dues au transfert d'énergie vers le réseau électrique analogue.

## 2 Amortissement vibratoire d'une barre soumise à une excitation longitudinale

L'analogie électrique d'une barre est obtenue par discrétisation d'un milieu propagatif longitudinal puis application de l'analogie électromécanique directe. Le réseau électrique obtenu vient ensuite interconnecter un ensemble de patches piézoélectriques de manière à réduire l'amplitude vibratoire de la barre à contrôler.

### 2.1 Discrétisation du milieu mécanique

Un milieu mécanique de type barre soumis à une propagation longitudinale est caractérisé par une équation différentielle qui s'écrit sous la forme

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

où  $x$  représente la variable d'espace,  $t$  la variable de temps et  $u = u(x, t)$  est le déplacement longitudinal. Les constantes  $\rho$  et  $Y$  sont respectivement la densité du milieu propagatif et son module de Young. Avec  $S$  l'aire de la section de la barre,  $N = YS \frac{\partial u}{\partial x}$  définit l'effort normal. Ainsi, une méthode des différences finies appliquée à l'Eq. (1) permet de définir le modèle discret d'une portion de barre tel que représenté sur la Figure 1. Si  $a$  est la longueur de la portion de barre, alors  $m = \rho S a$  est sa masse et  $K_u = YS/a$  sa raideur longitudinale.

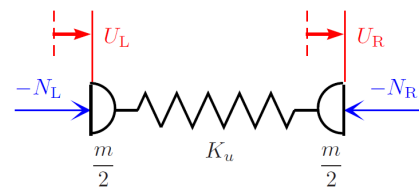


FIGURE 1 – Portion de barre discrétisée.

La Figure 1 correspond finalement à l'approximation discrète d'une portion de barre en traction-compression. La succession de  $n$  cellules élémentaires de ce type offre donc un modèle discrétisé pour une barre de longueur  $l = na$ . Ce modèle est valide tant que la longueur d'onde considérée est grande devant la longueur  $a$  d'une cellule élémentaire. Pour des problèmes d'analyse vibratoire, une limite peut être fixée à un minimum de dix cellules par longueur d'onde.

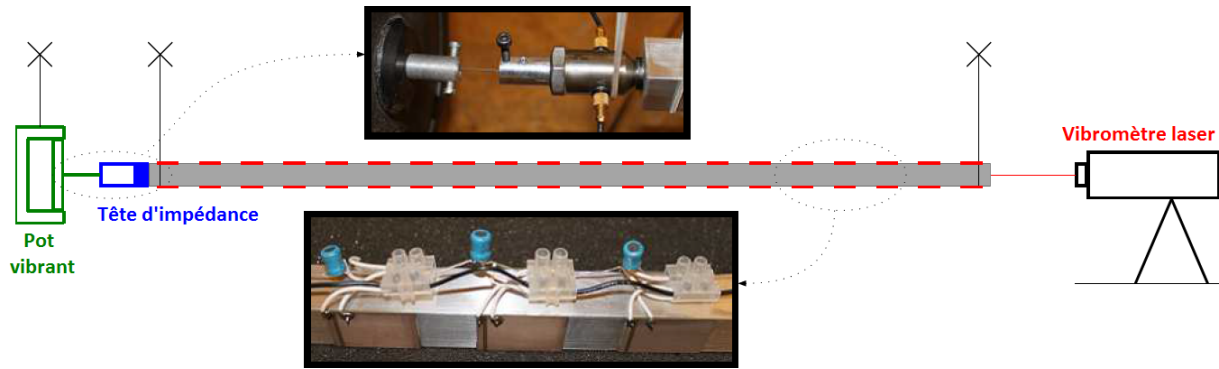


FIGURE 3 – Dispositif expérimental : barre suspendue couplée à son réseau électrique analogue.

## 2.2 Réseau électrique analogue

À partir de la cellule élémentaire discrétisée présentée sur la Figure 1, il devient possible de définir l'analogie électrique d'une barre en traction-compression. Nous utilisons ici l'analogie électromécanique directe [11] qui propose une équivalence entre une force et une tension, ainsi qu'entre une vitesse et un courant électrique. Par conséquent, une masse est équivalente à une inductance et une raideur est équivalente à l'inverse d'une capacité électrique. L'analogie de la portion de barre discrétisée est donc représenté par la Figure 2 qui montre une ligne d'inductances  $m/2$  avec une connexion à la masse par l'intermédiaire d'un condensateur de valeur  $1/K_u$ .

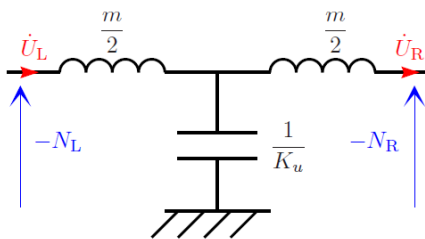


FIGURE 2 – Analogie électrique d'une portion de barre.

La succession d'un nombre suffisant de cette cellule élémentaire permet de tendre vers un continuum électrique qui représente l'analogie d'une barre en traction-compression. En ce qui concerne les conditions aux limites électriques, l'analogie directe nous indique qu'une condition de bord libre impose la mise à la masse d'une extrémité du réseau. De même, une condition de blocage revient à laisser un port ouvert de façon à empêcher le passage du courant.

## 2.3 Conditions de couplage modal

Le réseau électrique analogue est couplé à la barre à contrôler par l'intermédiaire d'un ensemble de patches piézoélectriques disposés de façon périodique. Comme la capacité piézoélectrique à l'état bloqué  $C$  prend le rôle du condensateur représenté sur la Figure 2, il n'est nécessaire d'ajouter qu'une ligne d'inductances  $L$  interconnectant successivement les différents patches.

L'objectif du couplage analogue est de synthétiser un milieu secondaire capable d'approximer les modes de la structure à contrôler. Dans notre cas, le milieu secondaire est le réseau électrique qui doit donc présenter les mêmes

fréquences de résonance et les mêmes formes modales que la barre considérée. Pour ce faire, une première condition est d'imposer des connexions électriques en bouts de réseau qui sont analogues aux conditions aux limites mécaniques. Ensuite, la relation de dispersion du milieu électrique doit approximer la relation de dispersion de la barre. Cette condition est vérifiée si le rapport de la raideur sur la masse est égal dans les deux milieux propagatifs [8]. Le milieu secondaire étant un réseau électrique, on obtient

$$\frac{1}{LC} = \frac{K_u}{m}. \quad (2)$$

La capacité piézoélectrique  $C$  est imposée par la géométrie et le matériau des patches. C'est donc l'inductance  $L$  qui est choisie, en fonction de la masse et de la raideur d'une portion de barre, de façon à satisfaire le couplage modal.

## 2.4 Résultats expérimentaux

Une barre en duraluminium d'un mètre de long et de section carré de 2 cm de coté est munie de  $n = 20$  paires de patches piézoélectriques. Une paire de patches offrant une capacité électrique  $C = 35$  nF, des inductances  $L = 2.8$  mH sont choisies afin de satisfaire l'Eq. (2). Comme illustré sur la Figure 3, la barre est suspendue par des câbles élastiques et excitée par un pot vibrant à l'une de ses extrémités. Afin de respecter l'analogie avec une barre en condition libre-libre, la ligne d'inductance doit être connectée à la masse à chacune de ses extrémités. Une tête d'impédance mesure la force du coté de l'excitation et un vibromètre laser donne accès à la vitesse de déplacement de l'autre extrémité.

La fonction de réponse en fréquence, présentée sur la Figure 4, prouve l'efficacité du dispositif en terme d'amortissement vibratoire multimodal. En effet, des réductions d'amplitude supérieures à 20 dB sont observées pour les 4 premiers modes de traction-compression. Ces performances pourraient même être améliorées en augmentant la dissipation dans le réseau par ajout de résistances électriques. L'apparition de minima locaux marqués traduit, en effet, un comportement de type amortisseur à masse accordée nettement sous-amorti. Enfin, on remarque que le système électromécanique peut être modélisé de façon adéquate car les simulations numériques, basées sur une approche par matrice de transfert [8], concordent avec les résultats expérimentaux.

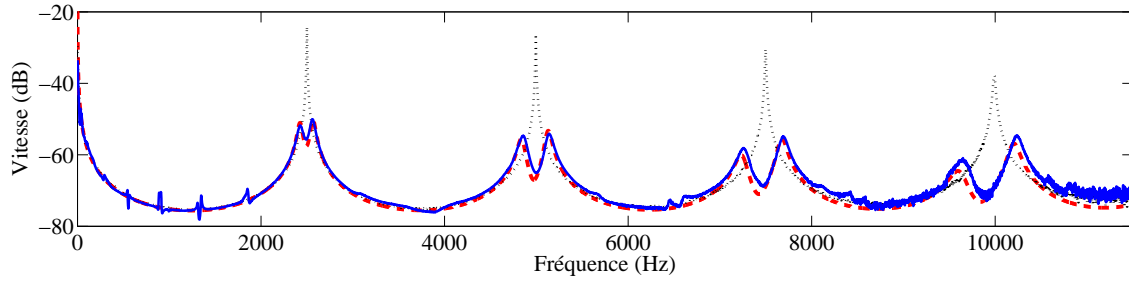


FIGURE 4 – Fonctions de réponse en fréquence pour la vitesse longitudinale en bout de barre - (···) réponse expérimentale sans contrôle, (—) réponse expérimentale avec contrôle analogue, (---) réponse simulée avec contrôle analogue.

### 3 Amortissement vibratoire d'une poutre soumise à une excitation transversale

Le modèle discret d'une poutre permet de définir son analogue électrique. Celui-ci est assemblé avec des composants passifs puis couplé à une poutre afin de réduire son amplitude vibratoire.

#### 3.1 Discrétisation du milieu mécanique

En considérant les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la propagation transversale dans un milieu de type poutre s'exprime de la façon suivante :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -YI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (3)$$

où  $w = w(x, t)$  représente le déplacement transversal alors que  $I$  est le moment quadratique de la poutre considérée. De la même manière que pour la détermination du modèle de barre discrétisé, une méthode des différences finies appliquée à l'Eq. (3) conduit au modèle discret d'une portion de poutre [9]. Ceci est illustré sur la Figure 5, où  $M$  représente le moment fléchissant et  $Q$  l'effort tranchant.

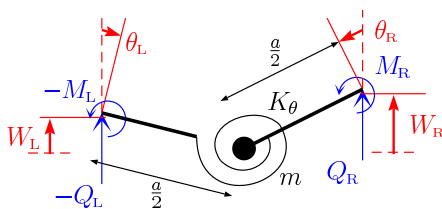


FIGURE 5 – Portion de poutre discrétisée.

La masse  $m = \rho S a$  est égale à la masse de la portion de poutre et  $K_\theta = YI/a$  correspond à sa raideur de torsion. Comme précédemment, la succession d'un nombre suffisant de cette cellule élémentaire offre un modèle discret approximant le comportement dynamique d'une poutre en flexion.

#### 3.2 Réseau électrique analogue

L'analogie électromécanique directe appliquée au modèle discret de la Figure 5 donne la cellule électrique présentée sur la Figure 6. Encore une fois, la masse de la cellule est représentée par une inductance et sa raideur intervient au niveau d'un condensateur. Cette portion de réseau est tout de même plus complexe car elle présente

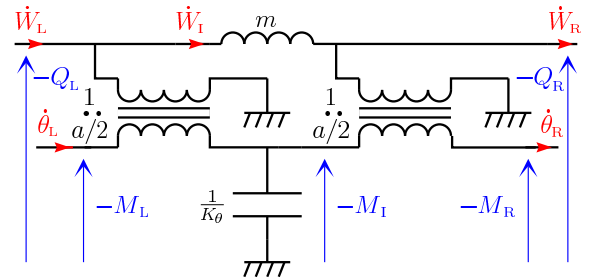


FIGURE 6 – Analogue électrique d'une portion de poutre.

deux lignes électriques séparées par des transformateurs de rapport  $a/2$ . Ceux-ci sont les analogues des deux bras de levier de longueur  $a/2$  qui traduisent les conditions de proportionnalité entre les angles et les déplacements, ainsi qu'entre les moments et les efforts.

Une condition de bord libre à l'extrémité d'une poutre impose à son analogue électrique une connexion à la masse du bout de la ligne associée au moment fléchissant ( $M = 0$ ) ainsi qu'à celle associée à l'effort tranchant ( $Q = 0$ ). D'autres conditions aux limites sont naturellement réalisables comme, par exemple, une condition simplement appuyée qui nécessite une connexion à la masse de la ligne associée au moment fléchissant ( $M = 0$ ) et une ligne associée à l'effort tranchant laissée ouverte ( $W = 0$ ).

#### 3.3 Conditions de couplage modal

Comme pour la barre, le réseau électrique relatif à la propagation transversale doit offrir des conditions aux limites analogues et une relation de dispersion similaire à celle de la poutre à contrôler. Cette dernière condition revient à respecter l'égalité

$$\frac{1}{\hat{a}^2} \frac{1}{LC} = \frac{1}{a^2} \frac{K_\theta}{m}, \quad (4)$$

où  $\hat{a}$  est le rapport de transformation des transformateurs du réseau électrique [9].  $K_\theta$ ,  $m$  et  $a$  étant imposés par les caractéristiques de la poutre et  $C$  étant la capacité piézoélectrique, le réglage du réseau se fait à travers le choix de l'inductance  $L$  et du rapport de transformation  $\hat{a}$ .

#### 3.4 Résultats expérimentaux

L'analyse expérimentale de l'amortissement des vibrations transversales se base sur la même structure que celle utilisée pour l'étude longitudinale. Cependant, l'excitation et la mesure de vitesse sont ici transversales

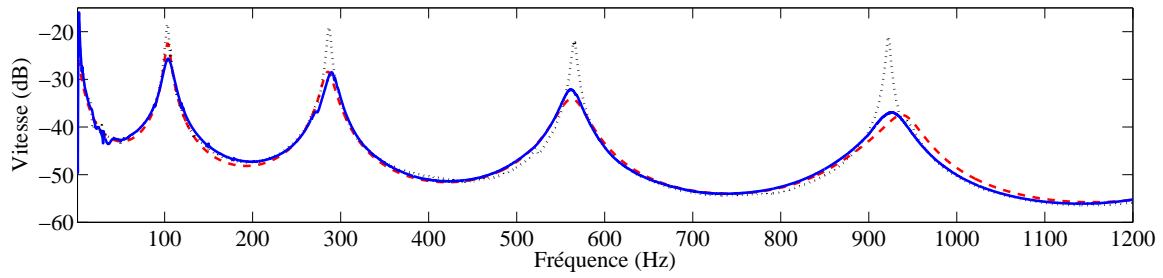


FIGURE 8 – Fonctions de réponse en fréquence pour la vitesse transversale en bout de poutre - (···) réponse expérimentale sans contrôle, (—) réponse expérimentale avec contrôle analogue, (---) réponse simulée avec contrôle analogue.

et le réseau est constitué d'une succession de cellules élémentaires électriques telles que celle illustrée sur la Figure 6. Le dispositif expérimental est présenté sur la Figure 7. Il fait apparaître la poutre en conditions libre-libre ainsi que le réseau constitué de composants magnétiques passifs, inductances et transformateurs, spécialement conçus pour l'application proposée. Le rapport de transformation choisi est  $\hat{a} = 1$  ce qui impose une inductance proche de  $L = 120$  mH.

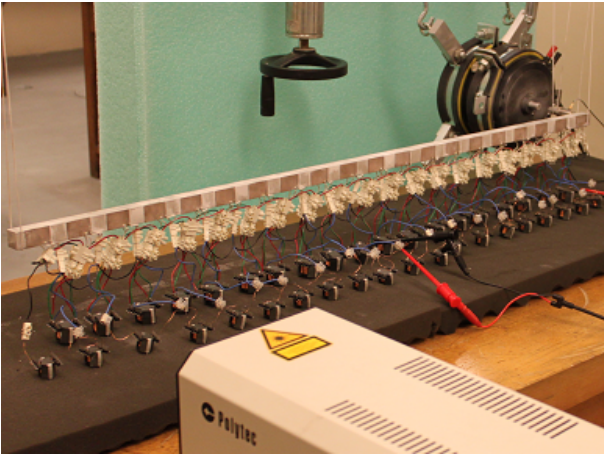


FIGURE 7 – Dispositif expérimental : poutre suspendue couplée à son réseau électrique analogue.

La réponse fréquentielle de la Figure 8 montre que les résultats expérimentaux concordent avec le modèle basé sur une formulation par matrice de transfert [9]. De plus, une réduction de l'amplitude vibratoire est observée sur une large bande de fréquences. Cependant, contrairement aux résultats de la Figure 4, aucun minimum local n'est présent au niveau des résonances de la réponse vibratoire. Ceci s'explique par le fait que les résistances internes des transformateurs utilisés dans le réseau électrique ont conduit à un système de contrôle légèrement sur-amorti.

## 4 Amortissement vibratoire d'une plaque soumise à une excitation transversale

L'analogie électrique d'une poutre en flexion est étendue à un réseau bidimensionnel pour le contrôle vibratoire d'une plaque mince. Une validation expérimentale montre le potentiel de cette stratégie qui est mise en œuvre de façon purement passive.

### 4.1 Discrétisation du milieu mécanique

Le comportement d'une plaque mince peut être décrit par la théorie de Love-Kirchhoff qui donne

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right), \quad (5)$$

où  $x$  et  $y$  sont les deux variables d'espace,  $t$  la variable de temps et  $w = w(x, y, t)$  le déplacement transversal. Pour une plaque de module de Young  $Y$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et d'épaisseur  $h$ ,  $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$  représente sa raideur en flexion.

L'application de la méthode des différences finies à l'Eq. (5) permet d'obtenir un système d'équations discrètes qui définissent le modèle différences finies d'un élément de plaque. L'ensemble d'une plaque peut être modélisée par assemblage d'un nombre suffisant d'éléments bidimensionnels discrets de façon à approximer la continuité du milieu.

### 4.2 Réseau électrique analogue

À partir des équations décrivant le modèle différences finies d'un élément de plaque carré de côté  $a$ , l'analogie électromécanique directe mène à la cellule élémentaire électrique présentée sur la Figure 9. Cette portion de réseau est finalement une extension bidimensionnelle de l'analogie électrique de la Figure 6. En effet,  $m = \rho ha^2$  représente la masse de la portion de plaque et  $D$  sa raideur en flexion. Quatre transformateurs de rapport  $a/2$  assurent l'analogie avec le bras de levier de longueur  $a/2$  et un cinquième

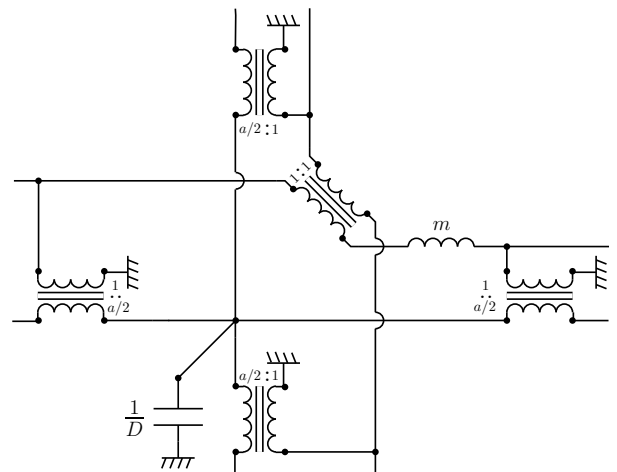


FIGURE 9 – Analogie électrique d'un élément de plaque carré discrétisé.

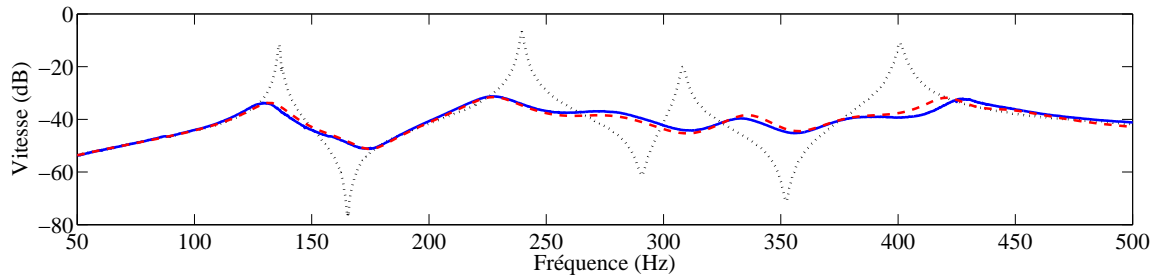


FIGURE 11 – Fonctions de réponse en fréquence pour la vitesse transversale de la plaque - ( $\cdots$ ) réponse expérimentale sans contrôle, ( $\text{—}$ ) réponse expérimentale avec contrôle analogue, ( $\text{--}$ ) réponse simulée avec contrôle analogue.

transformateur de rapport 1 est ajouté pour assurer l'unicité du déplacement au centre de la cellule.

Le choix de conditions aux limites électriques analogues aux conditions aux limites mécaniques devient malheureusement plus difficile à traiter dans un cas bidimensionnel. Bien que les conditions cinématiques de type déplacement nul ou rotation nulle imposent de laisser simplement ouvertes les lignes électriques correspondante, des conditions de type bord libre ne sont pas directement associées à des tensions nulles en bord de la cellule électrique de la Figure 9. Malgré tout, les plaques encastrées ou simplement appuyées n'offrant pas de bord libre, leur analogue électrique peut être directement mis en œuvre avec le réseau passif proposé.

### 4.3 Conditions de couplage modal

Le réseau dédié aux plaques est une extension de celui obtenu pour le contrôle d'une poutre. Ainsi, on retrouve la même condition traduisant l'égalisation des relations de dispersion dans les milieux électriques et mécaniques :

$$\frac{1}{\hat{a}^2} \frac{1}{LC} = \frac{1}{a^2} \frac{D}{m}. \quad (6)$$

Associée à des conditions aux limites électriques analogues à celles de la plaque considérée et en utilisant un nombre suffisant de cellules élémentaires, l'Eq. (6) permet de générer des modes électriques en courant qui ont les mêmes fréquences et les mêmes formes modales que les modes de plaque [10, 12].

### 4.4 Résultats expérimentaux

Comme présenté sur la Figure 10, vingt patches piézoélectriques carrés recouvrent une plaque d'aluminium encastrée sur les quatre cotés. La plaque fait 400 mm de long, 320 mm de hauteur et 1.9 mm d'épaisseur. Les patches, d'épaisseur 0.27 mm, sont connectés au réseau électrique analogue, lui-même constitué de 20 cellules élémentaires. Des transformateurs électriques de rapport  $\hat{a} = 4$  sont utilisés, ce qui conduit à une valeur d'inductance  $L = 0.9$  H. Le réseau analogue est constitué d'un nombre limité de cellules élémentaires ce qui l'éloigne du modèle continu. Par conséquent, l'inductance  $L$  doit être ajustée à une valeur de 0.7 H afin de mieux positionner les résonances électriques sur la plage de fréquences considérée allant ici de 50 à 500 Hz. Des résistances sont ensuite ajoutées dans le réseau pour optimiser la réduction vibratoire. Comme pour les analyses unidimensionnelles, un pot vibrant applique un

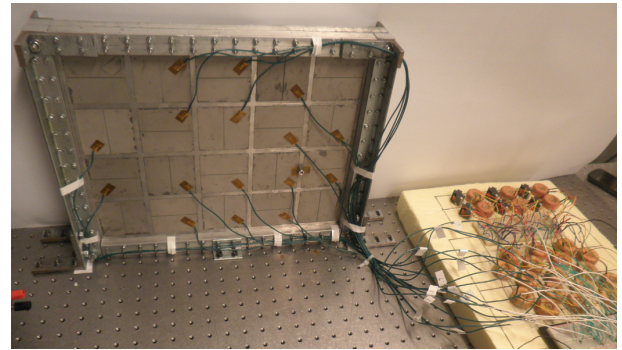


FIGURE 10 – Dispositif expérimental : plaque encastrée couplée à son réseau électrique analogue.

effort en un point de la plaque et un vibromètre laser mesure la vitesse de déplacement transversal.

La Figure 11 montre des réductions de plus de 20 dB sur l'ensemble des modes de plaque considérés. Un modèle numérique a également été développé à partir d'un assemblage d'éléments de plaque couplés au réseau analogue. Ce modèle est validé par les résultats expérimentaux et il offre donc des perspectives intéressantes pour l'optimisation d'un réseau discret couplé à une structure continue.

## 5 Conclusion

Cet article traite d'une stratégie d'amortissement vibratoire de structures mécaniques par couplage piézoélectrique à un réseau électrique analogue. Pour des structures de type barres, poutres ou plaques, une discrétisation du milieu mécanique suivie d'une analogie électromécanique directe permet de proposer des analogues électriques passifs. Des conditions de réglage des réseaux électriques sont également présentées de façon à assurer une interaction entre les modes électriques et les modes mécaniques sur une large bande de fréquences. Même si la quantité de matériau piézoélectrique ajoutée reste relativement limitée, les validations expérimentales montrent une nette réduction de l'amplitude vibratoire des structures considérées. De nature intrinsèquement passive, cette stratégie d'amortissement vibratoire multimodal semble donc prometteuse, en particulier pour des applications de contrôle embarqué.

## Remerciements

Les auteurs remercient le Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche pour le financement d'une thèse portant sur l'amortissement vibratoire par dispositifs piézoélectriques. Les auteurs remercient également le programme Fulbright qui a rendu possible une visite de 9 mois au Georgia Institute of Technology.

## Références

- [1] N. W. Hagood and A. von Flotow, Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, **146**, 243–268 (1991).
- [2] O. Thorp, M. Ruzzene and A. Baz, Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches. *Smart Materials and Structures*, **10**, 979 (2001).
- [3] L. Airoidi and M. Ruzzene, Wave Propagation Control in Beams Through Periodic Multi-Branch Shunts. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **22**, 1567–1579 (2011).
- [4] F. Casadei, M. Ruzzene, L. Dozio and K. A. Cunefare, Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts : experimental investigation on plates. *Smart Materials and Structures*, **19**, 015002 (2010).
- [5] C. Maurini, F. Dell'Isola and D. Del Vescovo, Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**, 1243–1271 (2004).
- [6] M. Porfiri, F. Dell'Isola, F.M. Frattale Mascioli, Circuit analog of a beam and its application to multimodal vibration damping, using piezoelectric transducers. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, **32**, 167–198 (2004).
- [7] S. Alessandrini, U. Andreaus, F. Dell'Isola and M. Porfiri, A passive electric controller for multimodal vibrations of thin plates. *Computers & Structures*, **83**, 1236–1250 (2005).
- [8] B. Lossouarn, M. Aucejo and J.F. Deü, Multimodal coupling of periodic lattices and application to rod vibration damping with a piezoelectric network. *Smart Materials and Structures*, **24**, 045018 (2015).
- [9] B. Lossouarn, J.-F. Deü and M. Aucejo, Multimodal vibration damping of a beam with a periodic array of piezoelectric patches connected to a passive electrical network. *Smart Materials and Structures*, **24**, 115037 (2015).
- [10] B. Lossouarn, M. Aucejo, J.-F. Deü and K. A. Cunefare, Multimodal damping of a plate with a passive piezoelectric network. *Proceedings of IMAC-XXXIV* (2016).
- [11] A. Bloch, Electromechanical analogies and their use for the analysis of mechanical and electromechanical systems. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part I : General*, **92**, 157–169 (1945).
- [12] R. H. MacNeal, *The solution of partial differential equations by means of electrical networks*. California Institute of Technology (1949).