

Piles de sable décroissantes 1D : classification expérimentale d'émergences

Kévin Perrot¹ and Éric Rémila²

¹Aix Marseille Université - CNRS - LIF UMR 7279, 13288
Marseille, France, Universidad de Chile (DIM and DII) - CNRS -
CMM UMI 2807, Santiago, Chile

²Université de Lyon - CNRS - GATE LSE UMR 5824, 42023
St-Etienne, France

2015

Résumé

Français. La dynamique des modèles de piles de sable décroissantes en une dimension laisse apparaître des motifs réguliers après une phase d'évolution à l'allure désordonnée. Dans cet article, nous présentons les résultats de simulations mettant en avant des phénomènes d'émergence entretenus par différents mécanismes. La définition des modèles est argumentée, ses premières propriétés sont démontrées, et les observations sont discutées autour de la formulation de deux conjectures.

Mots clés. Piles de sable, points fixes, émergence.

English. The dynamics of decreasing sandpile models in one dimension lets regular patterns appear after a seemingly unordered phase of evolution. In this article, we present simulation results exhibiting emergence phenomena sustained by different mechanisms. The definition of decreasing sandpile models is argued, its main properties are demonstrated, and the observations are discussed around the statement of two conjectures.

Keywords. Sandpiles, fixed points, emergence.

1 Introduction

Bak, Tang et Wiesenfeld ont introduit en 1987 le premier modèle de pile de sable, sur une grille bi-dimensionnelle carrée [2]. Kadanoff *et al* généralisent ce modèle en 1989 [15], avec le même paradigme : l'obtention de comportements globaux *complexes* à partir de règles locales *simples*. Ces modèles présentent en

particulier des phénomènes d'émergence de régularités au cours de processus dynamiques discrets à l'allure désordonnée.

En une dimension, les modèles de piles de sable sont des systèmes dynamiques discrets non-déterministes définis sur des tableaux : chaque case contient un entier auquel correspond un nombre de grains empilés. Ces grains se déplacent entre les cases du tableau selon des règles d'évolution comme celles décrites par les Figures 1 et 2. Une attention particulière a été portée aux configurations obtenues en partant d'une unique colonne contenant un nombre fini de grains [8, 9, 11, 6, 17, 26, 27, 13, 14, 10, 7, 16], amenant des développements mathématiques intéressants pour eux-même, et motivés par trois éléments :

- la dynamique ainsi observée met en avant des comportements représentatifs du cas général, et permet dans une certaine mesure une compréhension du modèle dans son ensemble ;
- une analogie avec un sablier, dans lequel les grains tombent tous sur une même position (plus loin dans ce papier, nous verrons formellement qu'il revient au même d'ajouter les grains un à un ou de partir d'une haute colonne) ;
- des liens avec la génération des partitions d'un entier.

L'étude des configurations stables obtenues à partir d'une unique colonne contenant un nombre fini de grains, dans le modèle de piles de sable Kadanoff en une dimension (Figure 2), a mis en avant des phénomènes d'émergence surprenants. Imaginons l'ajout de grains un à un sur la même position. Chaque ajout peut déclencher une avalanche se propageant dans la direction d'éboulement des grains de sable. Un nouvel ajout et une nouvelle avalanche est créée, menant à une nouvelle configuration stable contenant plus de grains que la précédente. En répétant ce processus un grand nombre de fois, on observe l'émergence de motifs réguliers sur la queue des configurations stables : à chaque nouvel ajout, l'avalanche déclenchée adopte un comportement à l'allure irrégulière, jusqu'à une certaine position à partir de laquelle sa dynamique devient une séquence de quelques éboulements répétés en avançant jusqu'à ce que l'avalanche s'arrête. En conséquence, les configurations stables obtenues présentent un segment irrégulier (où les grains sont ajoutés), suivi d'un segment très ordonné ayant émergé de la dynamique. Ces comportements ont été démontrés pour les modèles de piles de sable Kadanoff, par l'introduction d'une technique de preuve mêlant des éléments d'algèbre linéaire pour l'apparition de régularités (notion de convergence), et combinatoire pour la description fine des motifs réguliers [19, 20, 21, 23, 25].

Dans cet article, nous proposons une large famille de modèles pour lesquels des observations semblables sont présentées. Ce sont les modèles de piles de sable vérifiant une unique propriété : la décroissance des configurations et des règles d'évolution. La Section 2 définit ces modèles, établit les principales propriétés, et argumente le choix de la décroissance. La Section 3 présente des résultats de simulation mettant en avant des phénomènes d'émergence, lesquels sont analysés dans la Section 4 qui énonce deux conjectures.

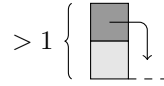


FIGURE 1 – Règle du modèle de piles de sable classique en une dimension. Si la différence de hauteur entre les colonnes i et $i + 1$ est strictement supérieure à 1, alors 1 grain peut tomber de la colonne i vers la colonne $i + 1$. Ce modèle correspond à une version uni-dimensionnelle du modèle de Bak, Tang et Wiesenfeld, en considérant le contenu des cases comme la différence de hauteur entre deux colonnes de grains : donner une unité de différence de hauteur à chacune de ses voisines gauche et droite revient à faire s’écrouler un grain sur la droite.

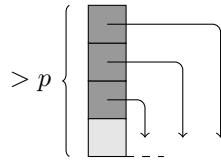


FIGURE 2 – Règle du modèle de piles de sable Kadanoff pour le paramètre $p = 3$. Si la différence de hauteur entre les colonnes i et $i + 1$ est strictement supérieure à p , alors p grains peuvent tomber de la colonne i et un de ces grains atterrit sur chacune des colonnes $i + 1$ à $i + p$.

2 Le modèle des piles de sable décroissantes

Dans cette section nous commencerons par donner la définition des systèmes dynamiques discrets pour lesquels nous proposons dans la section qui suit une étude expérimentale des comportements (Sous-section 2.1). Nous présenterons ensuite des propriétés de convergence et de structure des configurations obtenues à partir de l’empilement d’un nombre fini de grains (Sous-sections 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5). La définition des modèles sera enfin discutée (Sous-section 2.6).

2.1 Définition

Les *modèles de piles de sable décroissantes* sont des systèmes dynamiques discrets représentant les déplacements de grains de sable empilés sur une séquence infinie de colonnes. Les configurations sont des suites décroissantes $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$, où h_i représente la *hauteur* de la colonne d’indice i . Lorsque la pente en i est trop forte, des grains vont tomber de la colonne i vers des colonnes d’indice supérieur. La suite des *pentés* est définie par $\Delta h_i = h_i - h_{i+1}$, et pour toute configuration nous avons $\Delta h_i \geq 0$ pour tout i . Une règle fixe régit les mouvements des grains, il s’agit d’un p -uplet (g_1, g_2, \dots, g_p) avec $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_p > 0$, qui indique que $G = \sum_{j=1}^p g_j$ grains tombent de la colonne i si la pente en i est supérieure à $G + g_1$, et g_j de ces grains atterrissent sur la colonne d’indice $i + j$, comme

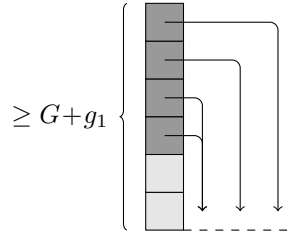


FIGURE 3 – La règle $(2, 1, 1)$ peut être appliquée si et seulement si $\Delta h_i \geq 6$. Par convenance, on considérera que les grains chutent vers la *droite*.

dessiné sur la Figure 3. La pente doit être supérieure ou égale à $G + g_1$ afin de conserver la décroissance : la colonne i perd G grains et la colonne $i + 1$ reçoit g_1 grains, donc la pente Δh_i est diminuée de $G + g_1$ unités.

Definition 1. *Un modèle de piles de sable décroissantes est le système dynamique discret défini par l'ensemble de configurations et la règle de transition non-déterministe suivants.*

- Configurations : l'ensemble des suites infinies décroissantes,

$$\mathcal{C} = \{h \mid \Delta h_i \geq 0 \text{ pour tout } i\}.$$

- Règle de transition : Un p -uplet décroissant d'entiers positifs

$$\mathcal{R} = (g_1, g_2, \dots, g_p),$$

c'est-à-dire avec $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_p > 0$. Soit $G = \sum_{j=1}^p g_j$. A partir de la configuration h , une transition en i permet de passer à la configuration h' , ce que l'on note $h \xrightarrow{i} h'$, telle que :

- $h'_i = h_i - G$;
- $h'_{i+j} = h_{i+j} + g_j$ pour $1 \leq j \leq p$.
- $h'_j = h_j$ pour $j < i$ et $i + p < j$.

Puisque les configurations sont des suites infinies décroissantes, la règle de transition peut être appliquée à la colonne i seulement si la pente $\Delta h_i \geq G + g_1$. Notons que la quantité de grains est conservée par l'application de la règle à l'indice i (nous dirons que l'indice i est *éboulé*, ou *tiré*). Nous noterons $h \rightarrow h'$ lorsque l'indice de la colonne tirée n'est pas spécifié, et $\xrightarrow{*}$ sa clôture réflexo-transitive. Lorsque $\Delta h_i \geq G + g_1$, nous dirons que la colonne i est *instable*. Une configuration est *stable*, ou un *point fixe*, si et seulement si aucune de ses colonnes n'est instable. Une configuration est *finie* si et seulement si elle contient un nombre fini de grains. Les configurations étant des suites décroissantes, toute configuration finie comporte un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que $h_i = 0$ pour tout $i \geq k$. Nous dénoterons 0^ω la séquence infinie de 0. Les modèles de piles de sable décroissantes sont non-déterministes : la règle n'est appliquée qu'une seule fois à chaque itération (un exemple d'évolution est présenté sur la Figure 4). Etant

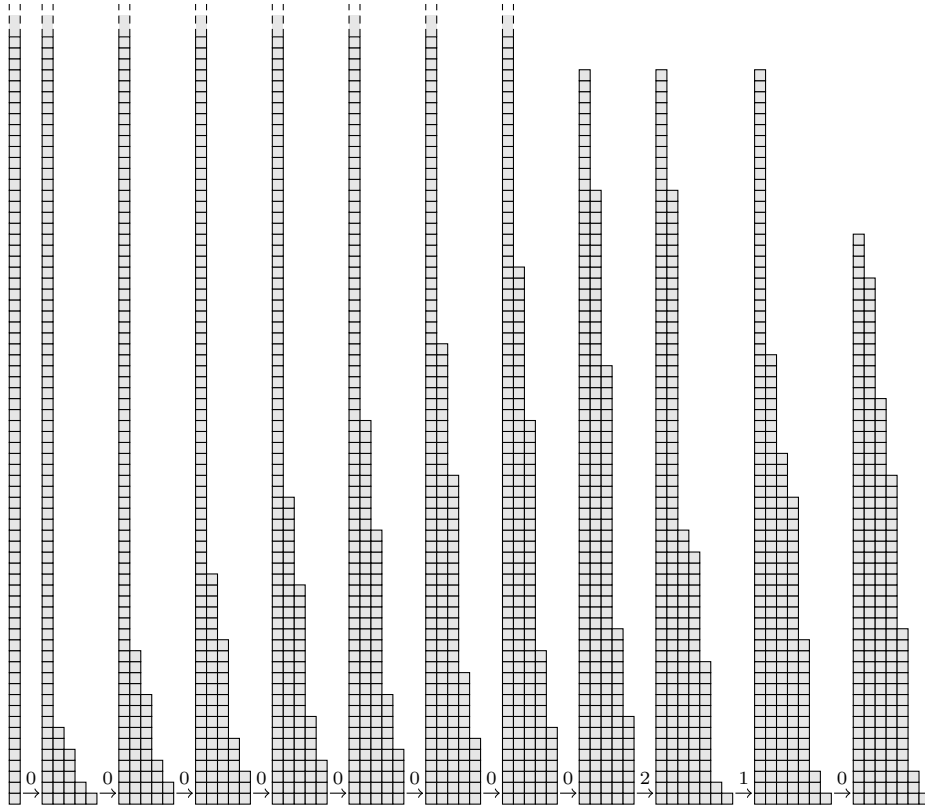


FIGURE 4 – Exemple d'évolution à partir de la configuration $(187, 0^\omega)$ jusqu'au point fixe $h = (52, 48, 37, 30, 16, 3, 1, 0^\omega)$, avec la règle $(7, 5, 2, 1)$. Les transitions sont étiquetées par l'indice de la colonne éboulée.

donné un modèle de piles de sable décroissantes, nous dénoterons $\mathcal{C}(h)$ l'ensemble des configurations atteignables à partir de h . Formellement,

$$\mathcal{C}(h) = \{h' \mid h \xrightarrow{*} h'\}.$$

Remark 1. *Le modèle de piles de sable classique correspond au 1-uplet (1) , et le modèle de piles de sable Kadanoff avec paramètre p correspond au p -uplet $(1, 1, \dots, 1)$.*

Les configurations seront le plus souvent représentées par la suite des pentes $\Delta h = (\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \dots)$, car cette représentation est davantage indépendante de l'indice, elle permet une vision plus locale. Le point fixe de la Figure 4 est représenté par $\Delta h = (4, 11, 7, 14, 13, 2, 1, 0^\omega)$. Une configuration sera assimilée à n'importe laquelle de ses représentations $((h_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\Delta h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et d'autres par la suite).

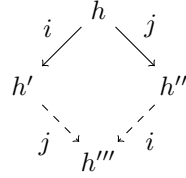


FIGURE 5 – Propriété du diamant.

2.2 Points fixes

Les modèles de piles de sable décroissantes étant non-déterministes, il est important d'établir dès à présent l'unicité du point fixe obtenu par évolution à partir de toute configuration finie.

2.2.1 Propriété du diamant

Commençons par remarquer que tous les modèles de piles de sable décroissantes vérifient la *propriété du diamant* : si à partir d'une configuration h il existe deux transitions possibles en i et j avec $i \neq j$ telles que $h \xrightarrow{i} h'$ et $h \xrightarrow{j} h''$, alors il existe un successeur commun de h' et h'' , dénoté h''' et tel que $h' \xrightarrow{j} h'''$ et $h'' \xrightarrow{i} h'''$. En effet, si deux transitions i et j sont possibles à partir de h , alors effectuer l'une des deux n'empêchera jamais d'effectuer l'autre à l'itération suivante. Quelle que soit la règle, et quel que soit l'ordre dans lequel ces deux éboulements sont effectués, nous arrivons à la même configuration h''' .

2.2.2 Terminaison à partir des configurations finies

Pour prouver la terminaison à partir de toute configuration finie, quelle que soit la règle, il suffit d'exhiber une fonction d'énergie qui associe à chaque configuration un entier, et telle que :

- l'énergie de toute configuration finie est un entier positif,
- l'énergie décroît strictement à chaque application de la règle de transition.

Nous obtenons une telle fonction d'énergie à l'aide d'une idée simple : l'énergie apportée par chaque grain sera d'autant plus grande que celui-ci est haut (en hauteur absolue). Comme les grains tombent toujours *vers le bas* lorsque la règle de transition est appliquée, cette fonction d'énergie vérifiera ces deux énoncés. Définissons d'abord l'énergie d'une colonne h_i par

$$e(h_i) = \sum_{i=1}^{h_i} i,$$

puis l'énergie d'une configuration h par

$$E(h) = \sum_{i \geq 0} e(h_i).$$

Nous avons alors $E(h) \geq 0$ pour toute configuration h , et $E(h) > E(h')$ pour toutes configurations h et h' telles que $h \rightarrow h'$.

2.2.3 Convergence

En combinant la propriété du diamant et la terminaison, nous obtenons le résultat suivant (voir par exemple [1]).

Proposition 1. *Toute configuration finie h converge vers un unique point fixe, noté $\pi(h)$.*

Dans la suite de ce papier, nous nous intéresserons en particulier au point fixe atteint à partir de la configuration comportant un nombre fini de grains sur la colonne d'indice 0, et aucun grain sur les autres colonnes : la configuration $(N, 0^\omega)$. Par commodité, nous noterons de façon abusive N cette configuration initiale, de telle sorte que l'objectif de notre étude soit une compréhension des configurations $\pi(N)$.

Remark 2. $\Delta\pi(N)$ denote la suite de pentes du point fixe.

$\mathcal{C}(N)$ dénote donc l'ensemble des configurations atteignables à partir de $(N, 0^\omega)$, et $\pi(N) \in \mathcal{C}(N)$.

2.3 Suite des éboulements

Cette sous-section concerne uniquement les configurations de l'ensemble $\mathcal{C}(N)$. Pour celles-ci, nous allons définir une troisième représentation appelée *suite des éboulements*, ou *suite des actions*, et qui est relative à la configuration d'origine, $(N, 0^\omega)$. La suite des éboulements d'une configuration c appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}(N)$ est la suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où v_i est le nombre de fois que la règle a été appliquée à l'indice i , dans l'évolution de $(N, 0^\omega)$ à c . Par exemple, la suite des actions de la configuration stable présentée sur la Figure 4 est $v = (9, 1, 1, 0^\omega)$. La propriété suivante est obtenue sans difficulté.

Proposition 2. *La suite des éboulements de toute configuration de l'ensemble $\mathcal{C}(N)$ est unique.*

Un résultat plus intéressant est obtenu en suivant les développements présentés dans [14] : les modèles de piles de sable décroissantes ont une structure de treillis gradué pour la relation d'ordre $\xrightarrow{*}$ ($h \geq h'$ si et seulement si $h \xrightarrow{*} h'$). Commençons par un Lemme indiquant comment construire l'inf de deux configurations.

Lemma 1. *Soient v et v' les suite d'actions de deux configurations h et h' de l'ensemble $\mathcal{C}(N)$. La configuration h'' de suite d'actions v'' avec $v''_i = \max\{v_i, v'_i\}$ est dans $\mathcal{C}(N)$, et $\inf(h, h') = h''$.*

Démonstration. La preuve suit exactement les développements présentés dans la Section 3 de l'article [14]. \square

La relation d'ordre $\xrightarrow{*}$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(N)$ est donc close par l'inf, et contient un élément maximal $(N, 0^\omega)$ de suite d'actions $(0, 0^\omega)$, cela forme par conséquent un treillis (voir par exemple [4]). La graduation est donnée par la fonction $v \mapsto \sum v_i$ qui va de $\mathcal{C}(N)$ dans \mathbb{N} .

Theorem 1. *L'ensemble $\mathcal{C}(N)$ muni de la relation d'ordre $\xrightarrow{*}$ a une structure de treillis gradué.*

2.4 Représentations : hauteurs, pentes, actions, et dérivées

Pour une configuration donnée dans $\mathcal{C}(N)$, les trois représentations :

- suite des hauteurs h ,
- suite des pentes Δh ,
- suite des actions v ,

sont bien évidemment liées. En particulier, pour tout $i \geq p$, en comptant le nombre de grains qui arrivent et partent de la colonne i , nous obtenons

$$h_i = -G v_i + g_1 v_{i-1} + g_2 v_{i-2} + \dots + g_p v_{i-p}. \quad (1)$$

Les développements de [22, 24, 23] mettent en avant l'importance de deux représentations supplémentaires :

- la suite des différences d'actions $(\Delta v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, qui correspond à la première dérivée de la suite des actions : $\Delta v_i = v_i - v_{i+1}$,
- la suite des différences de différences d'actions $(\Delta^2 v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, qui correspond à la seconde dérivée de la suite des actions : $\Delta^2 v_i = \Delta v_i - \Delta v_{i+1}$.

En particulier, dans ces travaux les comportements d'émergence sont mis en évidence par une étude de convergence de la suite $(\Delta^2 v_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Cette convergence, que nous observerons sur les résultats de simulation présenté dans la Section 3, est ensuite exploitée par des arguments combinatoires menant à une description asymptotique de la suite des pentes des points fixes, $\Delta\pi(N)$, pour certaines règles décroissantes.

2.5 Plateaux et largeur des points fixes

Un *plateau* est un ensemble de colonnes non-vides (qui contiennent au moins un grain), consécutives, et de même hauteur. La longueur d'un plateau est le nombre de colonnes qui le composent. Le résultat ci-dessous donne une borne supérieure à la longueur des plateaux sur les configurations de $\mathcal{C}(N)$, pour toute règle $\mathcal{R} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ et tout entier N .

Proposition 3. *Toute configuration de $\mathcal{C}(N)$ ne contient pas de plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$.*

Démonstration. La preuve procède par induction sur le nombre d'éboulements, qui est fini. Nous allons prouver que s'il n'y a pas de tel plateau dans une configuration, alors il n'y en a toujours pas après un éboulement supplémentaire.

L'initialisation est évidente : il n'y a pas de plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$ dans la configuration initiale $(N, 0^\omega)$. Nous prouvons l'étape

d'induction par l'absurde. Soient h la configuration courante (sans plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$ par hypothèse d'induction), $h \rightarrow h'$, et supposons qu'il y a un plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$ dans h' .

Soit k la colonne la plus à gauche (de plus petit indice) du plateau de longueur au moins $p + 2$ dans h' , c'est-à-dire, nous avons $\Delta h'_j = 0$ pour $k \leq j \leq k + p + 1$. Montrons qu'il n'y a aucun i valide tel que $h \xrightarrow{i} h'$, par une disjonction de cas.

- Si $i < k - p$ ou $i > k + p + 1$ alors tirer i n'a aucune influence sur la quantité de grains des colonnes entre k et $k + p + 1$, donc il y a déjà un plateau de taille au moins $p + 2$ dans h , ce qui contredit l'hypothèse d'induction.
- Si $k - p \leq i \leq k$ alors d'après la définition du modèle nous avons $\Delta h'_{i+p} = \Delta h_{i+p} + g_p$, mais comme nous avons également $\Delta h'_{i+p} = 0$, nous en arrivons à la conclusion que $\Delta h_{i+p} < 0$. Ceci est impossible car h n'appartient alors pas à $\mathcal{C}(N)$ (qui lui même est un sous-ensemble de \mathcal{C}).
- Si $k < i \leq k + p + 1$ alors d'après la définition du modèle nous avons $\Delta h'_{i-1} = \Delta h_{i-1} + G$, mais comme nous avons également $\Delta h'_{i-1} = 0$, nous en arrivons à la conclusion que $\Delta h_{i-1} < 0$. Ceci est impossible car h n'appartient alors pas à $\mathcal{C}(N)$ (qui lui même est un sous-ensemble de \mathcal{C}).

□

Nous pouvons maintenant présenter des bornes sur la largeur du point fixe $\pi(N)$. La *largeur* d'une configuration finie est l'indice maximal d'une colonne non-vide (qui contient au moins un grain), ou de façon équivalente l'indice minimal à partir duquel la configuration est égale à 0^ω :

$$w(h) = \min\{k \mid \Delta h_i = 0 \text{ for } i \geq k\}.$$

Comme présenté sur la Figure 6, le point fixe atteint à partir de $(N, 0^\omega)$ est un triangle rectangle non-dégénéré d'aire N , dont les côtés ont par conséquent des longueurs de l'ordre de \sqrt{N} .

Proposition 4. *Pour toute règle, $w(\pi(N)) \in \Theta(\sqrt{N})$.*

Démonstration. Nous prouvons ce résultat par un encadrement de $w(\pi(N))$.

Borne inférieure : toutes les colonnes sont stables sur le point fixe, donc nous avons $\Delta h_i < G + g_1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons

$$N \leq \sum_{i=0}^{w(\pi(N))} (G+g_1) i = (G+g_1) \frac{w(\pi(N))(w(\pi(N))+1)}{2} < (G+g_1)^2 (w(\pi(N))+1)^2$$

d'où $\frac{1}{G+g_1} \sqrt{N} - 1 < w(\pi(N))$.

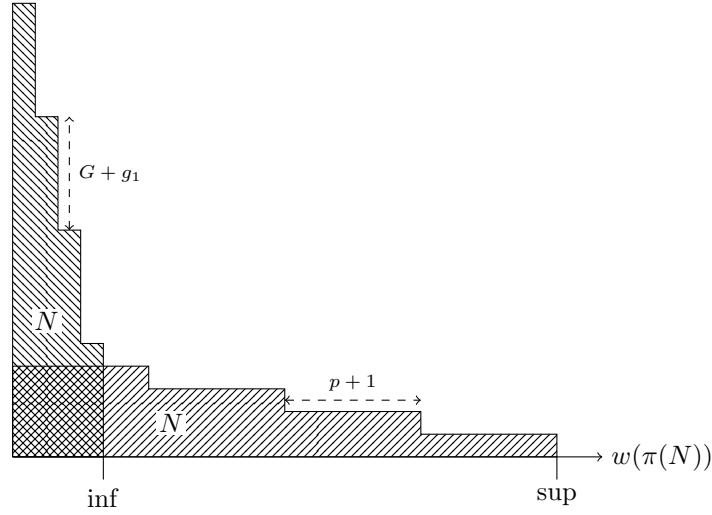


FIGURE 6 – La largeur de $\pi(N)$ est en $\Theta(\sqrt{N})$. Borne inférieure : la pente de chaque colonne doit être stable, donc strictement inférieure à $G + g_1$. Borne supérieure : il n’y a pas de plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$.

Borne supérieure : la Proposition 3 indique qu’il n’y a pas de plateau de longueur strictement supérieure à $p + 1$. Ainsi,

$$N \geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{w(\pi(N))}{p+1} \rfloor} (p+1) i \geq (p+1) \left(\frac{\left(\frac{w(\pi(N))}{p+1} - 1 \right) \frac{w(\pi(N))}{p+1}}{2} \right) > \left(\frac{w(\pi(N))}{p+1} - 1 \right)^2$$

d’où $(p+1) \sqrt{N} + p+1 > w(\pi(N))$. \square

2.6 Pourquoi décroissantes ?

La contrainte de décroissance dans la définition des modèles de piles de sable est motivée par un compromis entre :

- cohérence physique,
- expressivité,
- simplicité de la définition.

Les modèles de piles de sable décroissantes nous semblent un compromis intéressant dans la mesure où leur définition reste simple et conserve les propriétés de convergence mentionnées précédemment, tout en étant une généralisation non-triviale des modèles de piles de sable étudiés jusqu’ici et de leurs comportements.

Des modèle de piles de sable naturels et plus généraux auraient été définis par l’ensemble de configurations $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, c’est-à-dire avec $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\Delta h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ (contrairement à la suite des pentes $\Delta h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ des piles de sable décroissantes)

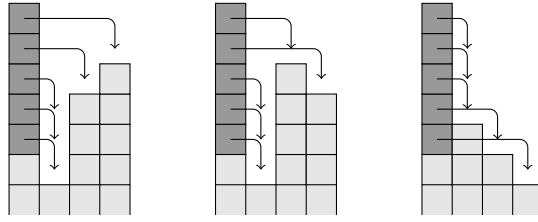


FIGURE 7 – Dans le cas où les configurations ne sont pas décroissantes, le respect de la gravité (chaque grain doit tomber *vers le bas*) peut entraîner des complications dans les conditions d’application de la règle : doit-il exister une façon de faire tomber les grains qui respecte cette loi physique ? Par exemple pour la règle $(3, 1, 1)$, on pourrait l’appliquer dans les trois cas ci-dessus, bien que celui de droite pose un problème de cohérence physique car le grain du dessous doit « sauter » sur la colonne tout à droite.

et par une règle quelconque (r_1, r_2, \dots, r_p) avec $r_i \in \mathbb{N}$. Cette définition très générale se rapproche des automates de sable (*sand automata*), sur lesquels des questions topologiques et de calculabilité ont été abordées, en lien avec les automates cellulaires [3, 5].

2.6.1 Gravité et terminaison

Concernant le condition d’application de la règle, la décroissance des configurations et de la règle offre un cadre cohérent et clair, en évitant plusieurs problèmes ou ambiguïtés. L’idée générale est la suivante : nous voulons que l’application de la règle respecte le principe de *gravité* : les grains tombent toujours vers le bas. Intuitivement, cela implique que nous pouvons attribuer à chaque grain une énergie potentielle correspondant à sa hauteur, qui décroît strictement à chaque application de la règle, et qui nous assure la terminaison de l’évolution à partir de toute configuration finie. C’est le cas pour les modèles de piles de sable décroissantes, comme développé dans la Sous-section 2.2.2, mais des modèles plus généraux (ne respectant pas nécessairement la décroissance des configurations et/ou de la règle) peuvent être confrontés à des problèmes physiques exposés sur la Figure 7.

2.6.2 Longue portée

La non-décroissance de la règle peut entraîner des déplacements de grains discutables d’un point de vue physique, comme il est présenté sur la Figure 8. Notons toutefois que les piles de sable sont avant tout utilisées comme des systèmes dynamiques discrets dont la complexité comportementale surprend au vu de la simplicité des règles qui régissent les mouvements des grains. En ce qui concerne les piles de sable décroissantes, la portée maximale de chute est obtenue pour le modèle de piles de sable Kadanoff, qui reste physiquement cohérent car

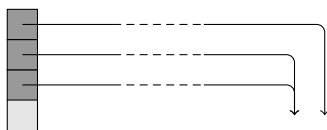


FIGURE 8 – Lorsque la décroissance des règles n'est pas imposée, la portée de chute des grains peut ne pas être physiquement cohérente. L'exemple ci-dessus montre une règle de la forme $(0, 0, \dots, 0, 2, 1)$ où la trajectoire des grains est arbitrairement proche de l'horizontale.

la trajectoire des grains est au plus de pente 1 (le grain descend d'une case à chaque fois qu'il avance d'une case).

2.6.3 Mur

Les piles de sable décroissantes évitent dans un sens intuitivement minimal le problèmes des « murs à sauter ». Ce problème est décrit par la Figure 9. Dans le cas d'un modèle plus générale autorisant la non-décroissance des configurations, la question du test à effectuer semble épineuse : doit-on uniquement vérifier qu'il existe une façon de faire tomber les grains de façon à ce que chacun atterrisse strictement plus bas qu'il n'est parti (ce qui demande déjà un certain nombre de comparaisons), ou alors doit-on en plus vérifier qu'aucun grain n'a besoin de « sauter » pour atteindre sa destination ? Il semble clair que nous perdrons alors un des grands intérêts des modèles de piles de sable : la simplicité dans la définition des règles d'évolution. Etablir des résultats formels sur les comportements observés pourrait s'avérer « artificiellement » compliqué, dans le sens où ce n'est pas une complication intrinsèque des modèles de piles de sable étudiées jusqu'alors. C'est selon ces arguments que les piles de sable décroissantes semblent un bon compromis.

2.6.4 Chip-firing game

Tous les modèles de piles de sable décroissantes peuvent être représentés par des chip-firing games. Un *chip-firing game* est un système dynamique discret défini sur un graphe orienté, dans lequel des jetons sont placés sur les sommets. La règle d'évolution est alors la suivante : un sommet peut donner un jeton à chacun de ses voisins sortants seulement s'il a suffisamment de jetons pour en donner à tous. La règle peut être appliquée selon différents modes de mise à jour.

Le modèle des chip-firing games étant Turing-universel [12], il est évident que nous pourrions simuler tout système dynamique discret de type piles de sable par un chip-firing game. Cependant il existe une simulation concise de tout modèle de piles de sable décroissantes par un chip-firing game, qui n'est plus possible lorsque la règle n'est pas décroissante. Cette simulation est présentée à travers l'exemple de la Figure 10 (construction introduite sous le nom *linear*

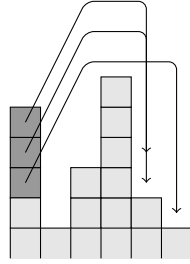


FIGURE 9 – Dans la configuration non-décroissante ci-dessus, pour la règle $(0, 0, 0, 2, 1)$, les trois grains doivent « sauter » pour atteindre leur destination, bien que celle-ci soit strictement au dessous de sa position initiale pour chacun des grains. Notons que des situations analogues peuvent apparaître même si la règle est décroissante, comme c’est le cas dans le troisième exemple de la Figure 7.

chip-firing games dans [14]), elle est concise dans le sens où le graphe obtenu comporte un unique sommet par colonne (plus un sommet puits).

2.6.5 Convergence

Notons enfin que suivant la définition choisie pour des modèles où les configurations et/ou la règle seraient non-décroissantes, nous perdriions éventuellement la propriété du diamant et la convergence vers un unique point fixe à partir de toute configuration finie.

3 Classification expérimentale des comportements

Dans une série d’articles [19, 20, 21, 23, 25] nous avons conclu une caractérisation asymptotique des points fixes $\pi(N)$ pour les modèles de piles de sable Kadanoff, dont les règles sont de la forme $(1, \dots, 1)$ (Figure 2). Nous avons ensuite commencé à étendre ces résultats aux modèles de piles de sable décroissantes dans [22, 24], tout en mettant en avant les difficultés auxquelles nous sommes confrontés dans la généralisation des techniques de preuve employées.

Ces développements sont motivés par les comportements expérimentaux exposés dans cette section, qui semblent présenter des phénomènes d’*émergence* (point qui sera discuté dans la Section 4). Pour tous les modèles de piles de sable décroissantes, excepté pour les règles « simples » de la forme (g_1) qui seront présentées dans la Sous-section 3.3, nous observons l’apparition de motifs réguliers à partir d’un indice n que nous conjecturons être en $\Theta(\log N)$. Cette estimation est difficile à mettre en évidence expérimentalement (une discussion plus précise est proposée dans [18]), mais cet encadrement asymptotique exact a été prouvé dans le cas des piles de sable Kadanoff, et les prémisses de

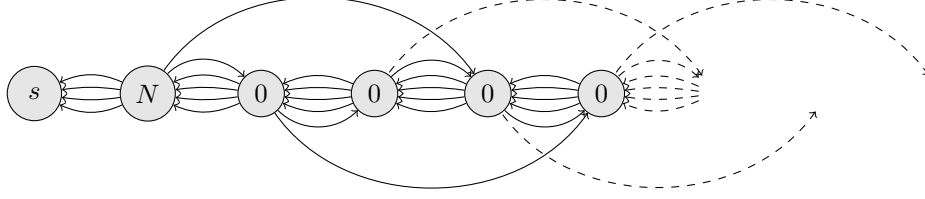


FIGURE 10 – Simulation de la règle de piles de sable décroissantes $(2, 1, 1)$ par un chip-firing game. Nous avons un sommet du graphe pour chaque colonne, contenant un nombre de jetons égal à la pente en cette colonne. L'application de la règle de piles de sable décroissantes $(2, 1, 1)$, qui ne peut avoir lieu que si la pente est supérieure ou égale à 6, correspond à l'application de la règle du chip-firing game : un sommet contenant au moins 6 jetons peut en donner un à chacun de ses voisins sortants, les 6 jetons perdus correspondent aux 6 unités de pente perdues. Nous ajoutons un sommet puits pour toutes les colonnes à la gauche de la colonne initiale. Cette construction est possible pour toute règle de piles de sable décroissantes, mais n'est plus possible pour les règles non-décroissantes, comme $(2, 1, 0, 1)$, car lors de l'application de la règle à l'indice i , l'indice $i + 3$ doit perdre une unité de différence de hauteur.

généralisation présentés dans [22, 24] suggèrent qu'il est toujours vrai : les motifs réguliers apparaissent à partir d'une colonne n de l'ordre de $\log N$, et pas avant. La partie initiale, qui s'étend des indices 0 à n (excepté pour les cas présentés dans la Sous-section 3.3 où ce segment initial n'existe pas) ne présente pas de motif régulier. Comparé à la largeur des points fixes en $\Theta(\sqrt{N})$ (Proposition 4), les formes régulières tendent donc à rendre compte de la forme complète des points fixes.

Dans cette section nous présentons une classification expérimentale de ces motifs émergents, qui ont tous une forme analogue, mais dont les comportements menant à leur construction et leur maintien (leur taille croît au fur et à mesure que nous ajoutons des grains selon la procédure inductive présentée dans la Sous-section 3.1) diffèrent. Pour toute règle de piles de sable décroissantes, les motifs qui émergent à partir d'un indice en $\Theta(\log N)$ sont toujours de la forme (pour la suite des pentes du point fixe, $\Delta\pi(N)$) :

$$w_l^* (w_c + w'_c + \epsilon) w_r^* (w_f + w'_f) 0^\omega$$

avec $*$ l'étoile de Kleene dénotant les répétitions finies et ϵ le mot vide : un mot gauche w_l est répété un nombre fini de fois, un mot central w_c ou w'_c est présent au plus une fois, un mot droit w_r est répété un nombre fini de fois, et un mot final w_f ou w'_f est répété une fois (rappelons que ces mots sont formés sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, G + g_1 - 1\}$). Ces mots ne dépendent que de la règle de piles de sable décroissantes (g_1, \dots, g_p) , et leurs longueurs sont expérimentalement de taille

inférieure ou égale à p , donc les mots gauche et droit sont les principaux motifs présents sur les parties régulières, d'où le terme de *motifs réguliers* employé. En fonction du nombre de grains de la configuration initiale, le motif w_c ou w'_c (resp. w_f ou w'_f) sera présent entre les (resp. à la suite des) répétitions des motifs réguliers.

3.1 Définition inductive et avalanches

Le point fixe $\pi(N)$ est obtenu par l'application répétée de la règle à partir de la configuration $(N, 0^\omega)$. Ce même point fixe peut également être obtenu par une procédure inductive consistant, à partir d'une configuration vide, à ajouter un à un les grains de sable sur la colonne d'indice 0 : nous ajoutons le premier grain puis appliquons la règle jusqu'à obtenir une configuration stable, ajoutons le second grain puis appliquons la règle jusqu'à obtenir une configuration stable, ajoutons le troisième grain... la configuration stable obtenue après l'ajout du $N^{\text{ième}}$ grain est exactement $\pi(N)$.

Définissons $h^{\downarrow 0}$ la configuration obtenue à partir de h en ajoutant un grain sur la colonne d'indice 0. Alors nous avons la relation de récurrence

$$\pi(N + 1) = \pi(\pi(N)^{\downarrow 0}),$$

initialisée avec $\pi(0) = 0$. L'explication est simple : la configuration $\pi(N)^{\downarrow 0}$ fait partie de l'ensemble $\mathcal{C}(N + 1)$ des configurations atteignables à partir de $(N + 1, 0^\omega)$, donc le processus de stabilisation mène à l'unique configuration stable de $\mathcal{C}(N + 1)$, c'est-à-dire $\pi(N + 1)$ (Proposition 1). La séquence des applications de la règle qui va de $(N, 0^\omega)$ à $\pi(N)$ peut également être appliquée à partir de $(N + 1, 0^\omega)$: il y aura uniquement un grain supplémentaire sur la colonne 0, qui n'empêchera aucune transition d'avoir lieu. Cette séquence d'applications de la règle mène ainsi à la configuration $\pi(N)$ avec un grain supplémentaire sur la colonne 0, c'est-à-dire $\pi(N)^{\downarrow 0}$, qui appartient donc à l'ensemble $\mathcal{C}(N + 1)$ ¹.

Nous appelons *avalanche* le processus d'éboulement qui suit l'ajout d'un nouveau grain sur la colonne 0. Formellement, nous définissons la $N^{\text{ième}}$ *avalanche* comme la séquence $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec a_i le nombre de fois qu'a été tirée la colonne i au cours du processus de stabilisation allant de $\pi(N - 1)^{\downarrow 0}$ à $\pi(N)$. Remarquons que chaque indice est tiré au plus une fois au cours d'une avalanche (même démonstration que dans [19]).

3.2 Présentation des comportements

Nous exposerons deux types de comportements, en fonction de la façon dont croissent les parties régulières des points fixes. Les différences se situent dans la façon dont s'articulent les répétitions des mots gauche et droit. Suite à l'ajout d'un grain et l'avalanche ainsi déclenchée, permettant d'atteindre $\pi(N + 1)$ à partir de $\pi(N)$ (Sous-section 3.1),

1. Remarquons qu'un raisonnement plus général donne $\pi(h + h') = \pi(\pi(h) + h')$ pour toutes h et h' .

- soit l’avalanche s’arrête au sein du segment initial ;
- soit l’avalanche atteint la partie régulière.

Dans tous les cas le segment initial est modifié. Dans le second cas la partie régulière « croît », dans le sens où le nombre de grain qui la compose augmente (sauf cas exceptionnel lorsque l’avalanche s’arrête au tout début de la partie régulière en détruisant la première répétition du mot gauche), par une modification *locale*.

- Comportement 1 : bas-haut (Sous-section 3.4). Dans ce cas nous observons toujours un unique mot central w_c , et des mots gauche et droit identiques : $w_l = w_r$. Lorsqu’une avalanche atteint la partie régulière, elle continue jusqu’au mot central, avec l’effet suivant : le nombre de répétitions du mot gauche est diminué de 1 et le nombre de répétitions du mot droit est augmenté de 1, ce qui correspond à une « remontée » du mot central d’un motif vers la gauche (du bas de la pile vers le haut). Le mot central disparaît après avoir atteint le haut de la partie régulière, puis un nouveau mot central est créé à l’extrémité droite de la pile (il n’y a alors aucun mot droit).
- Comportement 2 : vas-et-viens (Sous-section 3.5). Nous observons deux mouvements alternés. Dans un premier mouvement avec mot central w_c , lorsqu’une avalanche atteint la partie régulière, elle continue jusqu’au mot central, avec l’effet suivant : le nombre de répétitions du mot gauche est diminué de 1 et le nombre de répétitions du mot droit est augmenté de 1, ce qui correspond à une « remontée » du mot central d’un motif vers la gauche (du bas de la pile vers le haut, comme pour le comportement 1). Lorsqu’il n’y a plus de mot gauche et que le mot central w_c disparaît, le mot central w'_c apparaît à l’extrémité gauche de la partie régulière. Cette fois, lorsqu’une avalanche atteint la partie régulière, elle continue jusqu’au mot central, avec l’effet suivant : le nombre de répétitions du mot gauche est augmenté de 1 et le nombre de répétitions du mot droit est diminué de 1, ce qui correspond à une « descente » du mot central d’un motif vers la droite (du haut de la pile vers le bas). Lorsqu’il n’y a plus de mot droit, l’avalanche atteignant le mot central w'_c a pour effet de transformer celui-ci en w_c , et le processus de « remontée » est alors enclenché (entre la transformation du mot central de w_c en w'_c et l’apparition du premier mot droit, le mot final est changé en w'_f). Cette alternance de « remontée » et « descente » est répétée, la largeur de la partie régulière augmentant à chaque passage d’une phase de « descente » à une phase de « remontée ».

Dans tous les cas nous observons que les avalanches s’arrêtent lorsqu’elles rencontrent le mot central. Pour chacun des types de comportement nous présenterons un exemple détaillé.

3.3 Cas $p = 1$

Le comportement pour toute règle de la forme (g_1) , c’est-à-dire pour $p = 1$, est similaire au modèle de piles de sable classique dont la règle est (1). Rappelons la description du point fixe présentée dans [8, 9].

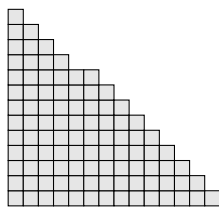


FIGURE 11 – Exemple du point fixe $\pi(100)$ pour la règle (1), nous avons $k = 13$ et les 9 grains restants sont placés sur la diagonale en partant du bas.

Theorem 2. [8, 9] *Dans le modèle de piles de sable décroissantes dont la règle est (1),*

$$\Delta\pi(N) = 1^x 0 1^y 0^\omega,$$

avec $y = \left(N - \frac{k(k+1)}{2}\right)$ et $x = k - y$ pour l'entier k tel que

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq N < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Graphiquement, le Théorème 2 indique que le point fixe obtenu à partir de la configuration $(N, 0^\omega)$ est composé du plus grand triangle rectangle isocèle possible (de côté k), où les grains restants sont placés le long de la diagonale en partant du bas vers le haut. Un exemple est donné sur la Figure 11.

Pour toute règle de la forme (g_1) , le comportement sera similaire, avec pour unique différence que les grains sont « groupés » par paquets de g_1 unités empilées : la règle s'applique à l'indice i si et seulement si la différence de hauteur est d'au moins $2g_1$ unités, les grains se déplaçant par groupes de g_1 , et toutes les colonnes (à l'exception de la colonne initiale) auront une hauteur multiple de g_1 . Des raisonnements identiques mènent au résultat suivant.

Theorem 3. *Dans les modèles de piles de sable décroissantes dont la règle est (g_1) ,*

$$\Delta\pi(N) = \Delta h_0 g_1^x 0 g_1^y 0^\omega,$$

avec $y = \frac{1}{g_1} \left(N - (N \bmod g_1) - g_1 \frac{k(k+1)}{2}\right)$ et $x = k - y - 1$ pour l'entier k tel que

$$g_1 \frac{k(k+1)}{2} \leq N < g_1 \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

et $\Delta h_0 = N \bmod 2g_1$.

Démonstration. Les mêmes raisonnements que dans le cas où $g_1 = 1$ s'appliquent, à la différence que des grains supplémentaires restent sur la colonne initiale lorsque N n'est pas un multiple de g_1 : la pente Δh_0 est augmentée de $(N \bmod g_1)$ unités. \square

Un exemple est donné sur la Figure 12.

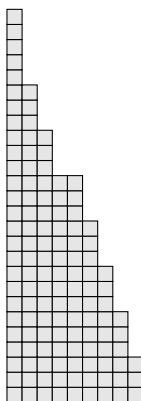


FIGURE 12 – Exemple du point fixe $\pi(125)$ pour la règle (3), nous avons $k = 8$ et les 15 grains restants sont placés par groupes de 3 sur la diagonale en partant du bas.

3.4 Comportement 1 : bas-haut

Le premier type de comportement pour les règles de piles de sable décroissantes est celui des piles de sable Kadanoff, de la forme $(1, \dots, 1)$ pour un paramètre p (indiquant la longueur de la règle, et donc dans ce cas le nombre de grains s'écroulant à chaque itération). Les développements de [23] donnent les valeurs de chacun des mots gauche $(p, \dots, 2, 1)$, central (0) , droit $(p, \dots, 2, 1)$, et final (ϵ) pour cette règle, et expliquent les mouvement de « remontée » du mot central qui est commun à toutes les règles ayant ce comportement.

Dans l'exemple détaillé de la Figure 13, les points fixes pour lesquels l'avalanche s'est arrêtée dans le segment initial ne sont pas représentés. Nous voyons le mot central (souligné) « remonter » ($N = 1200, 1213, 1214, 1215, 1216, 1220$) jusqu'à l'extrémité gauche (en haut) de la partie régulière, avant de disparaître ($N = 1224$), pour qu'ensuite un nouveau mot central soit créé à l'extrémité droite (en bas) de la partie régulière ($N = 1225$). Pour les règles ayant un comportement bas-haut de ce type, nous observons toujours l'égalité des mots gauche et droite.

3.5 Comportement 2 : vas-et-viens

Le second type de comportement est illustré par la règle $(6, 1, 1, 1, 1)$, qui est le cas le plus général que nous ayons observé (mot gauche et mot droit différents, deux mots centraux et deux mot finaux). Nous observons un mouvement alterné de « remontée » et « descente » du mot central, entre des mots gauche et droit différents.

Dans l'exemple détaillé des Figures 14 et 15, les points fixes pour lesquelles l'avalanche s'est arrêtée dans le segment initial ne sont encore une fois pas

représentés. A partir du point fixe $\pi(7890)$, nous observons dans un premier temps que le mot central (souligné) « descend » ($N = 7900, 7906$) jusqu'à l'extrémité droite (en bas) de la partie régulière, adjacent au premier mot final. Nous avons $|w_l| = 2|w_r|$, donc à chaque itération de cette phase de « descente », le nombre de répétitions du mot gauche est augmenté de 1 tandis que le nombre de répétitions du mot droit est diminué de 2 (la modification étant locale, et la largeur du point fixe restant ainsi inchangée). La prochaine avalanche atteignant la partie régulière ($N = 7912$) a alors pour effet de transformer le couple $w_c w_f$ en $w_l w'_f$, et la suivante ($N = 7978$) de transformer $w_l w'_f$ en $w'_c w_r w_f$. A partir de cette étape, une phase de « remontée » est enclenchée ($N = 7984, 7990, 7996, 8002$) jusqu'à atteindre l'extrémité gauche de la partie régulière (haut de la partie régulière). Le processus qui passe de la phase de « remontée » à la phase de « descente » est similaire à celui qui passe de la phase de « descente » à la phase de « remontée », mais fait intervenir des mouvements de grains difficiles à analyser, au cours desquels le mot central et les deux premières répétitions du mot droit, $w_c w_r w_r$, sont transformés en $w_l w'_c$ (de $N = 8039$ à 8040). Une phase de « descente » est alors débutée, jusqu'à atteindre le bas de la pile, *etc*, dans un processus alternant « descente » et « remontée ».

```

Règle (1,1,1)
mot gauche = mot droit = 3,2,1
mot central = 0
mot final = <vide>

pi(i1200)
Delta h : [ 3, 3, 3, 0, 3, 1, 3, 0, 0, 3, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1]
Delta-2 v : [ 309, 12,-111, 71, -10, -16, 14, -4, -1, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]

pi(i1213)
Delta h : [ 3, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 0, 0, 3, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1]
Delta-2 v : [ 312, 12,-111, 71, -10, -16, 14, -4, -1, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]

Remontée pour les avalanches numéro 1214, 1215 et 1216.

pi(i1220)
Delta h : [ 0, 3, 2, 3, 1, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1]
Delta-2 v : [ 315, 12,-112, 71, -10, -16, 14, -4, -1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

pi(i1224)
Delta h : [ 3, 2, 1, 3, 1, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1]
Delta-2 v : [ 315, 12,-112, 71, -10, -16, 14, -4, -1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

pi(i1225)
Delta h : [ 3, 1, 0, 3, 1, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1]
Delta-2 v : [ 315, 12,-112, 71, -10, -16, 14, -4, -1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

```

FIGURE 13 – Résultats de simulation du comportement 1 : bas-haut.

```

Règle (6,1,1,1,1)
mot gauche = 15,7,5,13
mot droit = 14,6
mot central 1 = 5,13,6
mot central 2 = 15,7,15,7
mot final 1 = 4,2,1
mot final 2 = 5,3,2,1

pi(7890)
Delta h : [ 6, 15, 12, 11, 7, 15, 5, 7, 12, 8, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 15, 7, 5,
13, 15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 4, 2, 1]
Delta*2 v : [ 212, 93, 43, 22, -60, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

pi(7900)
Delta h : [ 10, 14, 11, 10, 6, 15, 5, 7, 12, 8, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 15, 7, 5,
13, 15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 4, 2, 1]
Delta*2 v : [ 212, 93, 43, 22, -60, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

pi(7906)
Delta h : [ 10, 13, 10, 9, 5, 15, 5, 7, 12, 8, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 15, 7, 5,
13, 15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 4, 2, 1]
Delta*2 v : [ 212, 93, 43, 22, -60, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

pi(7912)
Delta h : [ 10, 2, 15, 9, 15, 10, 5, 6, 11, 7, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 15, 7, 5,
13, 15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 4, 2, 1]
Delta*2 v : [ 211, 94, 43, 23, -61, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

pi(7978)
Delta h : [ 10, 4, 8, 13, 14, 15, 7, 7, 11, 7, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 15, 7, 5,
13, 15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 4, 2, 1]
Delta*2 v : [ 213, 94, 44, 23, -61, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

```

Remontée pour les avalanches numéro 7984, 7990, 7996 et 8002.

FIGURE 14 – Résultats de simulation du comportement 2 : vas-et-viens. Seconde partie sur la Figure 15.

$\pi(8002)$
 Δh : [0, 6, 15, 4, 10, 15, 6, 11, 7, 15, 15, 0, 15, 15, 10, 7, 14, 5, 13, 6,]
14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6,]
 $\Delta^2 v$: [214, 95, 43, 23, -61, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1,]
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,]

$\pi(8039)$
 Δh : [15, 10, 14, 13, 3, 15, 5, 10, 7, 15, 15, 0, 15, 15, 0, 13, 5, 12, 15, 8,]
15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6,]
 $\Delta^2 v$: [215, 95, 44, 22, -61, 0, 10, 7, 1, -3, 0, 0, 2, 1, -1, 1, 0, 1, 1, 0, 1,]
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,]

$\pi(8040)$
 Δh : [0, 15, 14, 13, 13, 0, 10, 15, 4, 6, 15, 4, 15, 10, 5, 6, 14, 15, 7, 5, 13,]
15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6,]
 $\Delta^2 v$: [216, 95, 44, 23, -63, 1, 11, 6, 1, -3, -1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,]
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,]

$\pi(8056)$
 Δh : [10, 14, 13, 12, 12, 0, 10, 15, 4, 6, 15, 4, 15, 10, 5, 6, 14, 15, 7, 5, 13,]
15, 7, 5, 13, 15, 7, 15, 7, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6, 14, 6,]
 $\Delta^2 v$: [216, 95, 44, 23, -63, 1, 11, 6, 1, -3, -1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,]
0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,]

FIGURE 15 – Résultats de simulation du comportement 2 : vas-et-viens. Première partie sur la Figure 14.

4 Discussion

D'après les résultats de simulation présentés dans la Section 3 (Comportements 3.4 et 3.5), nous formulons les deux conjectures suivantes.

Conjecture 1. *Pour toute règle de piles de sable décroissantes (g_1, \dots, g_p) avec $p > 1$ et tout nombre de grains N , le plus petit indice n tel que*

$$(\Delta\pi(N)_i)_{i \geq n} \in w_l^* (w_c + w'_c + \epsilon) w_r^* (w_f + w'_f) 0^\omega$$

avec $|w_l|, |w_c|, |w'_c|, |w_r|, |w_f|, |w'_f| \leq p$, est en $\Theta(\log N)$.

La Conjecture 1 décrit asymptotiquement complètement la forme des points fixes : à partir d'un indice de l'ordre de $\log N$, comparé à la largeur des points fixes qui est de l'ordre de \sqrt{N} .

Conjecture 2. *Pour toute règle de piles de sable décroissantes (g_1, \dots, g_p) et tout entier N , il existe un indice n en $\mathcal{O}(\log N)$ tel que la $N^{\text{ième}}$ avalanche vérifie*

$$(a_i)_{i \geq n} \in 1^* 0^\omega.$$

La Conjecture 2 nous semble fondamentale dans l'analyse de la dynamique des avalanches successives, qui construisent et maintiennent les régularités décrites par la Conjecture 1. Elle permet en particulier de décrire le mouvement des mots centraux tels qu'observés sur les simulations. Plus précisément, elle implique que les modifications sont locales : soit une avalanche $(a_i)_{i > n}$ de la forme $1^k 0^\omega$, alors pour toute colonne j comprise entre $n + p + 1$ et $n + k - 1$, les colonnes $j - p$ à $j + 1$ sont éboulées au cours de l'avalanche, ce qui a pour conséquence de laisser la pente en j inchangée :

l'éboulement en	$j - p$	donne	g_p	unités de pente à	j ,
l'éboulement en	$j - p + 1$	donne	$g_{p-1} - g_p$	unités de pente à	j ,
			\dots		
l'éboulement en	$j - 1$	donne	$g_1 - g_2$	unités de pente à	j ,
l'éboulement en	j	retire	$G + g_1$	unités de pente à	j ,
l'éboulement en	$j + 1$	donne	G	unités de pente à	j .

Les pentes de toutes les colonnes comprises entre $n + p + 1$ et $n + k - 1$ sont donc inchangées par l'avalanche, qui opère uniquement des changements sur les colonnes $n + k$ à $n + k + p - 1$ (autour de la position à laquelle l'avalanche s'arrête). La Conjecture 2 indique par conséquent que les modifications apportées par une avalanche sont locales, un premier pas vers la compréhension précise des mouvements de « descente » et de « remontée » des mots centraux.

Ces deux conjectures ont été démontrées pour les modèles de piles de sable Kadanoff (règles de la forme $(1, \dots, 1)$) dans [19, 20, 21, 23, 25], et des premiers éléments de leur généralisation ont été présentés dans [22, 24]. Ces développements utilisent la convergence de la représentation $\Delta^2 v$ des points fixes, observable sur les simulations de la Section 3.

Selon le point de vue inductif de construction des points fixes (grain par grain, Sous-section 3.1), les Conjectures 1 et 2 indiquent qu'à chaque nouvel ajout de grain, celui-ci déclenche une avalanche qui évolue dans une partie à l'allure irrégulière², dont la taille est asymptotiquement nulle relativement à la largeur du point fixe, mais asymptotiquement non-bornée en valeur absolue, avant d'adopter un comportement régulier (motifs répétés). En quel sens peut-on qualifier ces structures régulières d'*émergentes*?

Acknowledgements

Ce travail a en partie été supporté par l'IXXI (Institut des systèmes complexes, Lyon), les projets ANR Subtile, Dynamite et QuasiCool (ANR-12-JS02-011-01), la Fédération Modmad de l'Université de Saint-Etienne, la bourse FONDECYT Postdoctorado 2014 numéro 3140527, et le Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes (ACGO).

Références

- [1] F. Baader and T. Nipkow. *Term rewriting and all that*. Cambridge University Press, 1998.
- [2] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality : An explanation of the $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59 :381–384, 1987.
- [3] Julien Cervelle and Enrico Formenti. On sand automata. *STACS proceedings*, pages 642–653, 2003.
- [4] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order (2. ed.)*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] Alberto Dennunzio, Pierre Guillon, and Benoît Masson. Sand automata as cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 410(38–40) :3962–3974, 2009.
- [6] J. O. Durand-Lose. Parallel transient time of one-dimensional sand pile. *Theoretical Computer Science*, 205(1–2) :183–193, 1998.
- [7] E. Formenti, B. Masson, and T. Pisokas. Advances in symmetric sandpiles. *Fundamenta Informaticae*, 76(1–2) :91–112, 2007.
- [8] E. Goles and M. Kiwi. One-dimensional sand piles, cellular automata and related models. *Nonlinear Phenomena in Fluids, Solids and Other Complex Systems*, pages 169–185, 1991.
- [9] E. Goles and M. Kiwi. Games on line graphs and sand piles. *Theoretical Computer Science*, 115(2) :321–349, 1993.
- [10] E. Goles, M. Latapy, C. Magnien, M. Morvan, and H. D. Phan. Sand-pile models and lattices : a comprehensive survey. *Theoretical Computer Science*, 322(2) :383–407, 2004.

2. à quel point peut-elle être désordonnée, pour que de telles régularités en émerge ?

- [11] E. Goles and M. Margenstern. Sand pile as a universal computer. *International Journal of Modern Physics C*, 7(2) :113–122, 1996.
- [12] E. Goles and M. Margenstern. Universality of the chip-firing game. *Theoretical Computer Science*, 172(1–2) :121–134, 1997.
- [13] E. Goles, M. Morvan, and H. D. Phan. Sandpiles and order structure of integer partitions. *Discrete Applied Mathematics*, 117(1–3) :51–64, 2002.
- [14] E. Goles, M. Morvan, and H. D. Phan. The structure of a linear chip firing game and related models. *Theoretical Computer Science*, 270(1–2) :827–841, 2002.
- [15] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu, and S. Zhou. Scaling and universality in avalanches. *Physical Review A*, 39(12) :6524–6537, 1989.
- [16] M. Latapy and H. D. Phan. The lattice of integer partitions and its infinite extension. *Discrete Mathematics*, 309(6) :1357–1367, 2009.
- [17] C. Moore and M. Nilsson. The computational complexity of sandpiles. *Journal of Statistical Physics*, 96 :205–224, 1999.
- [18] K. Perrot. *Les piles de sable Kadanoff*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon et Université de Nice Sophia Antipolis, France, 2013.
- [19] K. Perrot and É. Rémila. Avalanche structure in the Kadanoff sand pile model. *LATA, LNCS 6638 proceedings*, pages 427–439, 2011.
- [20] K. Perrot and É. Rémila. Transduction on Kadanoff sand pile model avalanches, application to wave pattern emergence. *MFCS, LNCS 6907 proceedings*, pages 508–519, 2011.
- [21] Kévin Perrot and Eric Rémila. Kadanoff sand pile model. Avalanche structure and wave shape. *Theoretical Computer Science*, 504 :52–72, 2013.
- [22] Kévin Perrot and Eric Rémila. Emergence of regularities on decreasing sandpile models. *15th Mons Theoretical Computer Science Days, Nancy, France*, 2014.
- [23] Kévin Perrot and Eric Rémila. Emergence of wave patterns on Kadanoff sandpiles. *LATIN, LNCS 8392 proceedings*, pages 634–647, 2014.
- [24] Kévin Perrot and Eric Rémila. Emergence on decreasing sandpile models. *Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS)*, 2015. à paraître.
- [25] Kévin Perrot and Eric Rémila. Strong emergence of wave patterns on Kadanoff sandpiles. *Submitted work*, 2015.
- [26] H. D. Phan. *Structures ordonnées et dynamiques de piles de sable*. PhD thesis, Paris 7, France, 1999.
- [27] D. Rossin. *Propriétés Combinatoires de certaines Familles d’Automates Cellulaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 2000.