



**HAL**  
open science

# Sur la détermination des efforts exercés par un fluide sur un solide en mouvement

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur la détermination des efforts exercés par un fluide sur un solide en mouvement. Bulletin de la Société française des mécaniciens , 1951, 1 (2), pp.3-8. hal-01737199

**HAL Id: hal-01737199**

**<https://hal.science/hal-01737199>**

Submitted on 19 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la détermination des efforts exercés par un fluide sur un solide en mouvement

(Bilan dynamique des écoulements rotationnels)

Par **J.-J. MOREAU**

Docteur ès-Sciences

Chargé de Recherches du Centre National de la Recherche scientifique  
(Institut de Recherches de Poitiers)

## I

LA prévision théorique des forces exercées sur les corps immergés par un fluide en écoulement comporte, comme première étape, la détermination complète du mouvement du fluide dans toutes ses parties. Nous n'avons pas à nous étendre beaucoup ici sur ce problème qui, dans sa généralité, est extrêmement ardu. La résolution numérique du système d'équations aux dérivées partielles qui représenterait les propriétés mécaniques au fluide, compte tenu de la viscosité et des phénomènes thermiques accompagnant le mouvement, s'avère en effet impraticable, sauf dans des cas très spéciaux et d'intérêt technique restreint.

On sait que, fort heureusement, la viscosité ne joue qu'un rôle limité dans un grand nombre de problèmes. La théorie des fluides parfaits, avec ses importantes acquisitions du siècle dernier, peut ainsi fournir des solutions très efficaces (1).

L'application brutale du théorème de Lagrange sur la conservation du caractère d'irrotationnalité conduirait à considérer la plupart des mouvements usuels comme strictement irrotationnels. Les cas d'écoulements incompressibles sont alors ramenés à des *problèmes harmoniques* identiques à ceux qu'on rencontre dans d'autres branches de la physique théorique. Mais les solutions construites de la sorte se révèlent tout de suite inacceptables ; ainsi la résultante des actions subies par un solide en transla-

tion uniforme dans un fluide infini serait nulle, paradoxale qui s'étend d'ailleurs au cas de fluides compressibles.

Le remède à cet échec doit être cherché dans la considération d'écoulements presque partout irrotationnels, mais doués de *singularités*, principalement de surfaces de glissement. Dans les cas permanents, de tels régimes, comme d'ailleurs le régime bidimensionnel circulatoire de Joukowski, apparaissent compatibles avec l'hypothèse d'un fluide rigoureusement parfait. Mais il semble bien que leur établissement à partir du repos, de même que les échappements tourbillonnaires introduits dans la théorie des mouvements non permanents, ne puissent être complètement saisis qu'en invoquant une certaine viscosité.

Il est naturel en effet que la viscosité, négligeable dans la masse du fluide, prenne au contraire une importance prépondérante dans une mince couche de glissement avoisinant la paroi des obstacles. Même sans entrer dans une théorie approfondie de la *couche limite* (également génératrice de *turbulence*) on conçoit que les portions du fluide qui sont ainsi passées au voisinage des corps immergés puissent y avoir acquis une vortacité non nulle.

Une telle viscosité intervient également pour adoucir les singularités théoriques, une surface de glissement, par exemple, n'étant que le schéma d'une couche de transition, de plus en plus diffuse à mesure qu'elle évolue. Cet adoucissement doit toujours être invoqué, au moins qualitativement, lorsque l'application brutale de la théorie des fluides parfaits semble faire naître des paradoxes :

Un problème schématisé présente en général l'as-

(1) Les numéros entre parenthèses concernent les notes insérées à la fin du présent article.

pect mathématique d'un cas limite, offrant l'avantage d'un traitement plus simple (par exemple, problèmes relatifs à un fluide parfait, à un domaine infini, à un solide infiniment mince, etc...). Or il arrive que le développement intrinsèque du problème limite soulève à son tour des questions de limite. Si à ce moment les convergences ne sont pas assez franches (un examen rigoureux serait basé sur la notion d'uniforme convergence), il y a lieu de craindre qu'une interversion des passages à limite ne soit pas légitime. Car la seule méthode sûre consisterait en un passage à limite effectué sur la solution achevée du problème non schématisé. On peut parfois se tirer d'affaire par un appel qualitatif ou formel à cette solution générale.

## II

Nous nous bornons dans cet exposé au cas où la densité du fluide reste sensiblement constante au cours du mouvement.

En pareil cas, toutes les singularités de l'écoulement peuvent être envisagées comme des limites de structures tourbillonnaires. Nous faisons abstraction des notions de « source » et de « puits », invoquées uniquement à l'extérieur du domaine fluide pour la construction analytique de solutions. Le *doublet hydro-dynamique*, souvent introduit comme couple d'une source et d'un puits infiniment rapprochés, sera conçu plus raisonnablement comme schéma limite d'un filot D très petit où le vecteur

vorticité  $\vec{\omega}$  est très grand, de sorte que le moment (1)

$$\vec{M} = \iiint_D \vec{OM} \wedge \vec{\omega} \, d\tau$$

conserve une valeur infinie (et indépendante de O, la résultante des  $\vec{\omega} \, d\tau$  étant nulle).

De même l'assimilation d'une surface de glissement à une couche tourbillonnaire très mince et très intense est classique et intuitive. Chaque élément  $d\sigma$  de la surface figure alors un élément de volume  $d\tau$  tel que

$$\vec{\omega} \, d\tau \sim \frac{1}{2} \vec{\alpha} \wedge (\vec{u}' - \vec{u}'') \, d\sigma$$

où  $\vec{\alpha}$  est le vecteur unité normal à la surface,  $\vec{u}'$  et  $\vec{u}''$  les vecteurs vitesse de part et d'autre. Lorsque le glissement concerne deux portions de fluide libre, on est conduit, à la suite de Helmholtz, à attribuer une portée dynamique à cette assimilation : on admet que les filets tourbillonnaires de la surface conservent au cours du temps leur intensité et sont entraînés avec une vitesse moyenne

$$\vec{u}^* = \frac{1}{2} (\vec{u}' + \vec{u}'')$$

En fait la justification précise de cette assertion est subordonnée à des hypothèses restrictives (2).

(1) Les lettres M R H A E (italiques) doivent être lues comme étant des majuscules anglaises. Nous nous excusons auprès des lecteurs de cette substitution.

Un simple passage à la limite à partir des propriétés connues des structures tourbillonnaires régulières serait abusif, ces propriétés n'ayant pas le caractère *linéaire*.

L'introduction de tels éléments singuliers, par exemple encore les *lignes tourbillonnaires*, schémas

de régions filiformes où  $\vec{\omega}$  est très grand, réalise une schématisation plus ou moins poussée des sillages que les visualisations expérimentales révèlent à l'aval des obstacles. Et c'est ainsi que la théorie des sillages de Helmholtz, la théorie des sillages d'Oseen, la théorie des tourbillons alternés de Karman et enfin les théories tourbillonnaires de l'aile et de l'hélice de Prandtl et de Joukowsky ont pu conduire à des résultats techniquement efficaces.

Le succès de ces théories impose la conception d'une corrélation profonde et essentielle entre les efforts subis par les corps immergés et les éléments tourbillonnaires de l'écoulement. Nous verrons plus loin cette idée générale se préciser.

Quelle que soit la méthode employée pour obtenir une représentation plus ou moins approchée de l'écoulement (et rappelons encore à ce sujet l'efficacité des *théories linéarisées*, reposant sur une simplification judicieuse des équations du mouvement) on se trouve, à l'issue de cette première étape en présence du second problème, beaucoup plus simple évidemment, le calcul proprement dit des efforts sur les obstacles. La méthode naturelle consisterait, le mouvement étant connu, à expliciter les pressions (ou plus généralement l'état de contrainte) sur l'étendue des parois et à en déduire par intégration les résultantes et moments résultants. Toutefois ce procédé direct n'est souvent pas le plus rapide. En outre, la présence de singularités sur les parois, les schématisations trop poussées, les manifestations de la viscosité de couche limite, peuvent soulever des difficultés de mise en œuvre ainsi que certaines difficultés de principe, comme nous l'expliquons au paragraphe précédent. Aussi préférera-t-on fréquemment calculer les efforts par le jeu de *bilans dynamiques globaux* établis dans des conditions aussi générales que possible. De nombreuses formules ont été proposées dans cet esprit ; nous voulons ici en examiner sommairement les idées directrices.

## III

Le procédé naturel pour cette évaluation globale des forces est un appel aux théorèmes généraux de la mécanique, en introduisant la résultante cinétique (quantité de mouvement) et le moment cinétique.

Dans le cas où le fluide s'étend indéfiniment dans toutes les directions, il est usuellement possible, par un choix convenable du système de référence, de supposer le repos à l'infini. Mais l'annulation de la vitesse en fonction de la distance est rarement assez rapide pour assurer la convergence des intégrales qui définiraient la résultante cinétique et le moment cinétique de l'ensemble du fluide. Une complication subsisterait d'ailleurs dans la nécessité de tenir compte d'*actions à l'infini*, a priori inconnues.

La théorie de l'« *impulse* » de Kelvin (3) tourne ces difficultés pour un fluide parfait incompressible, irrotationnel, au repos à l'infini, investissant un solide S. Il y a dans ce cas un potentiel des vitesses  $\varphi$  et Kelvin forme les deux vecteurs

$$\vec{R} = \varrho \iint_S \varphi \vec{\alpha} d\sigma$$

$$\vec{H} = \varrho \iint_S \varphi \vec{OM} \wedge \vec{\alpha} d\sigma$$

( $\vec{\alpha}$  : vecteur unité normal au point courant M de la surface S du solide, orienté vers l'intérieur). Au cours d'un mouvement quelconque il montre que la résultante  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{H}$  des actions exercées par le solide sur le fluide s'expriment sous la forme

$$\vec{R} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{H} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

Les vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{H}$  appelés résultante et moment résultant de l'« *impulse* » jouent donc pour l'établissement d'un bilan dynamique de l'ensemble du fluide, des rôles semblables à ceux d'une résultante cinétique et d'un moment cinétique. Les poussées subies par le corps sont opposées aux actions précédentes ; on néglige ici les forces de pesanteur dont on pourra tenir compte par une correction d'Archimède.

Les composantes de la vitesse tendent en général vers zéro à l'infini comme  $\frac{1}{r^3}$ . On peut alors obtenir une semi-convergence de la quantité de mouvement  $\vec{\sigma}$  en fixant une forme pour la surface extérieure S' qui s'éloigne indéfiniment ; la limite dépend de cette forme (4). Il est naturel de prendre pour S' une sphère : à ce moment la valeur, limite obtenue pour la quantité de mouvement  $\vec{\sigma}$  n'est pas égale à la résultante d'impulse  $\vec{R}$ , mais seulement aux 2/3 de ce vecteur. Cet exemple, entre bien d'autres, montre le danger qu'il peut y avoir à rétablir artificiellement des convergences.

#### IV

Dans le cas de *mouvements permanents*, les théorèmes généraux de la mécanique pourront être communément appliqués à une portion finie de fluide, contenant des obstacles fixes. Le fluide renfermé à l'instant  $t$  dans une surface géométrique  $\Sigma$ , enfermant les obstacles, aura évolué à l'instant  $t + dt$  ; les variations de la résultante cinétique  $\vec{\sigma}$  et du moment cinétique  $\vec{\mu}$  s'évaluent par la consi-

dération des volumes que balaie la surface frontière d'où

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \iint_{\Sigma} \varrho \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{u}) d\sigma$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \iint_{\Sigma} \varrho \vec{OM} \wedge \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{u}) d\sigma$$

( $\vec{\alpha}$  : vecteur unité normal extérieur à  $\Sigma$ ). Ces expressions constituent donc la résultante et le moment résultant des forces exercées sur la portion de fluide en question par les obstacles d'une part et par le fluide ambiant, sur l'étendue de  $\Sigma$ , d'autre part. Si le fluide est parfait et irrotationnel *au moins dans le voisinage de  $\Sigma$* , on pourra y évaluer la pression par la formule de Bernoulli, ce qui laisse finalement comme expression des efforts sur l'ensemble des obstacles

$$\vec{R} = \varrho \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma$$

$$\vec{H} = \varrho \iint_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \left[ \frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma$$

Ces intégrales sont indépendantes du choix de la surface  $\Sigma$  renfermant les obstacles et tracée dans une région irrotationnelle.

Le cas bidimensionnel donne lieu à des considérations semblables. Les intégrales obtenues, étendues à une courbe fermée C entourant l'obstacle, peuvent se transposer en notation complexe par l'introduction de la vitesse complexe

$$w = u_x - i u_y$$

ce qui donne de manière immédiate

$$R_x - i R_y = \frac{i \varrho}{2} \int_C w^2 dz$$

$$H = - \frac{\varrho}{2} \text{Rc} \int_C z w^2 dz$$

formules de Blasius (5). On établit classiquement ces formules par la considération des pressions sur l'obstacle même, ce qui fait présumer une exception lorsque le profil de cet obstacle présente un point de rebroussement. Ce paradoxe provient de l'emploi d'une valeur principale de Cauchy pour une intégrale divergente, nouvel exemple de convergence indûment restaurée. Les formules de Blasius sont en fait d'une généralité intangible.

La plus remarquable conséquence des formules de Blasius est le théorème de Joukowski qui, dans le cas d'un profil investi par un courant uniforme à l'infini, vient relier directement la force de portance à la *circulation*

$$\Gamma = \int_C \vec{u} \cdot d\vec{M}$$

Cette idée a pu être adaptée au cas tridimensionnel par l'introduction d'une « circulation superficielle »

$$\iint_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{\alpha} d\sigma$$

étendu à une surface fermée  $\Sigma$  renfermant l'obstacle (6). Mais l'intérêt est beaucoup moindre car l'irrotationnalité de l'écoulement entraîne essentiellement la nullité de cette intégrale double.

Les formules du type de Blasius ont donné lieu à de nombreuses généralisations dans des directions diverses. Citons seulement pour le cas bidimensionnel, traité en notation complexe, les extensions réalisées par M. J. Pérès (7) et par M. J. Leray (8) à des écoulements non permanents et présentant des éléments tourbillonnaires. Les formules tridimensionnelles sont adaptées par M. J. Pérès au cas d'écoulements périodiques, avec des éléments tourbillonnaires (9). M. M. Roy (10) introduit également des éléments tourbillonnaires, et aborde dans l'esprit du théorème de Joukowsky le cas d'un écoulement tridimensionnel permanent avec structure à l'infini hélicoïdale, cas important pour la théorie de l'hélice.

## V

Revenons au point de vue du paragraphe 3, d'un bilan dynamique global pour le fluide infini.

Le mouvement bidimensionnel d'un fluide parfait emplissant le plan entier et comportant comme seuls éléments tourbillonnaires des tourbillons ponctuels isolés  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , d'intensités respectives  $C_1, C_2, \dots, C_n$  présente des propriétés très classiques : chaque tourbillon étant assimilé à une masse, le centre de gravité de l'ensemble reste fixe et le moment d'inertie en un point fixe O constant. C'est-à-dire encore que le vecteur

$$\vec{I} = -z \wedge \sum C_p \vec{OA}_p$$

(z vecteur unité normal au plan) et le scalaire

$$J = -\frac{1}{2} \sum C_p OA_p^2$$

restent constants au cours du temps. Ces résultats supposent que les tourbillons sont libres : chacun d'eux, soit  $A_p$  se déplace alors avec la vitesse  $\vec{v}_p$ , induite par l'ensemble des autres.

Les recherches de l'auteur sur la question trouvent leur origine dans la remarque suivante : les tourbillons ponctuels  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ne sont concevables que comme schémas de régions très petites, toujours constituées des mêmes éléments matériels, où la vorticité  $\zeta$  est très grande. Si ces îlots tourbillonnaires, au lieu d'être libres, sont soumis à des forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , chacune résultante d'actions appliquées à la matière intérieure de l'îlot, leurs vitesses ne sont plus données par la règle précédente. A la vitesse  $\vec{v}_p$  s'ajoute une vitesse  $\vec{u}_p$ , qu'on peut déterminer par une application locale, microscopique en quelque sorte, du théorème de Joukowsky :

$$\vec{F}_p = \rho C_p \vec{u}_p \wedge z$$

Dès lors les quantités  $\vec{I}$  et J ne sont plus constantes et on obtient très facilement

$$\rho \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R}$$

$$\rho \frac{dJ}{dt} = H$$

résultante et moment résultant en O du système des forces appliquées.

Ce résultat est d'une grande généralité. Etant donné un milieu matériel incompressible quelconque, emplissant le plan entier et au repos à l'infini (annulation uniforme de la vitesse lorsque r tend vers  $\infty$ ), on formera les intégrales étendues à tout le plan

$$\vec{I} = 2z \wedge \iint \vec{OM} \zeta d\sigma$$

$$J = - \iint \vec{OM}^2 \zeta d\sigma$$

Les formules précédentes restent valables pour exprimer la résultante et le moment résultant des forces appliquées au milieu.

Dans le cas tridimensionnel, pour un milieu incompressible quelconque au repos à l'infini, on formera de même les intégrales étendues à l'espace entier

$$\vec{I} = \iiint \vec{OM} \wedge \omega d\tau$$

$$\vec{J} = - \iiint \vec{OM}^2 \omega d\tau$$

et il vient :

$$\vec{R} = \rho \frac{d\vec{I}}{dt}$$

$$H = \rho \frac{dJ}{dt}$$

Il s'agit, avons-nous dit, d'un milieu incompressible quelconque, fluide parfait ou sujet à une loi de viscosité quelconque, pouvant en certaines de ses parties se réduire à des solides (de même densité  $\rho$ , cas auquel on peut en général se ramener facilement).  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  jouent pour l'établissement d'un bilan dynamique de l'ensemble du milieu des rôles analogues à ceux d'une résultante cinétique et d'un moment cinétique.

Précisons toutefois que, parmi les forces appliquées dans l'étendue du milieu, celles qui dérivent d'un potentiel (pesanteur par exemple) pourront être négligées dans la construction de  $\vec{R}$  et  $\vec{H}$ . Ces deux vecteurs forment, peut-on dire, la résultante et le moment résultant des forces sans potentiel (11). C'est un caractère essentiel de notre théorie que cette élimination des forces à potentiel, inactives (au sens de la mécanique analytique) dans la dynamique d'un milieu incompressible. D'ailleurs les forces de pesanteur auraient pour le milieu infini une résultante infinie.

Pour la démonstration précise de ces résultats nous ne pouvons ici que renvoyer à un mémoire détaillé qui doit paraître prochainement au *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

Les intégrales  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  ci-dessus écrites s'entendent dans un sens large, avec contribution des éléments tourbillonnaires singuliers. Ainsi, dans le cas tridimensionnel, un doublet de moment  $\vec{M}$ , localisé en un point A contribue respectivement à  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  par les termes

$$\vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{OA} \wedge \vec{M}$$

Une surface de glissement dans le milieu, par exemple une paroi d'obstacle en fluide parfait, apporte des éléments selon la règle d'assimilation précisée au paragraphe 2. Une ligne tourbillonnaire fermée C, d'intensité  $\Gamma$ , contribue à  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  par les expressions

$$\vec{I}(C) = \frac{\Gamma}{2} \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{M}$$

$$\vec{J}(C) = -\frac{\Gamma}{2} \int_C \text{OM}^2 d\vec{M}$$

On les transforme encore en introduisant une cloison S limitée à C

$$\vec{I}(C) = \Gamma \iint_S \vec{\alpha} d\sigma$$

$$\vec{J}(C) = \Gamma \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{\alpha} d\sigma$$

tout comme, en électromagnétisme, un courant fermé équivaut à un *feuillet*.

Imaginons par exemple une aile mince en translation dans un fluide quasi parfait au repos à l'infini. La structure tourbillonnaire est réduite à la surface de l'aile et au sillage formé par les éléments de fluide que l'aile a côtoyé depuis sa mise en mouvement. En toute première approximation ce sillage a la forme du rectangle que l'aile balaie dans son mouvement : c'est un *feuillet* en constant accroissement. De là une variation de  $\vec{I}$  révélatrice des forces qui doivent être appliquées à l'aile pour assurer sa progression. On rejoint ainsi des considérations de M. M. Roy (12).

L'induction mutuelle des éléments du sillage produit, en seconde approximation, une inclinaison du plan du feuillet sur la direction de déplacement. La résultante  $\vec{R}$ , normale au feuillet, présente donc une composante selon le déplacement, composante correspondant à la force de traînée. Il s'agit du moins là du terme de « traînée induite » qu'envisage la théorie de Prandtl. La « traînée de profil » s'associe aux tourbillons s'échappant continuellement de la couche limite : on peut les représenter par des feuillets dont le plan est perpendiculaire à la direction de déplacement.

Les vecteurs  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  conservent leur intérêt pour l'établissement du bilan dynamique d'une *portion limitée du milieu*, dans l'esprit du paragraphe 4.

Bornons-nous au cas tridimensionnel. On considère une portion de milieu, soit D, limitée par une surface mobile S qui reste constituée des mêmes éléments matériels. Le milieu intérieur est de nature quelconque, parfait ou visqueux, pouvant comporter des portions solides (de même densité), mais pour obtenir des résultats simples nous devons supposer qu'il devient *helmholtzien* dans le voisinage de S. On veut dire par là que cette région périphérique est constituée de fluide parfait et que les forces qui s'y exercent dérivent d'un potentiel. En

étendant les intégrales  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  à la portion matérielle D il vient, pour exprimer la résultante et le moment résultant des forces sans potentiel appliquées dans son étendue

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{A} - \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}) d\sigma$$

$$\frac{1}{\rho} \vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{B} + \iint_S \text{OM}^2 \vec{u} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}) d\sigma$$

( $\vec{\alpha}$  : vecteur unité normal extérieur au point courant de S) avec

$$\vec{A} = \iint_S \left[ \frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma$$

$$= 2 \iiint_D \vec{u} \wedge \vec{\omega} d\tau$$

$$\vec{B} = \iint_S \vec{OM} \wedge \left[ \frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u} \cdot \vec{\alpha}) \vec{u} \right] d\sigma$$

$$= 2 \iiint_D \vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\omega}) d\tau$$

Pour la démonstration nous renvoyons encore au mémoire annoncé.

Ces résultats sont souvent d'une application facile. Ils atteignent leur maximum de simplicité lorsque  $\vec{\omega}$  est *tangentiel ou nul* sur S, ce que nous exprimons en disant que D présente une *structure tourbillonnaire fermée*, ou encore qu'il constitue un *îlot tourbillonnaire*. Dans ce cas on décomposera le champ de vitesse  $\vec{u}$  en la somme du champ  $\vec{v}$  induit par les éléments tourbillonnaires de l'îlot D selon les formules de Biot et Savart, et d'un champ résiduel  $\vec{w}$  dit de *vitesse primitive*. Il se trouve alors que la contribution de  $\vec{v}$  dans les intégrales  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est nulle de sorte qu'il reste

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{A}$$

$$\frac{1}{\rho} \vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{B}$$

avec

$$\vec{A} = 2 \iiint_D \vec{w} \wedge \vec{\omega} d\tau$$

$$\vec{B} = 2 \iiint_D \vec{OM} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{\omega}) d\tau$$

Ces vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  définissent une action de l'écoulement primitif sur les éléments tourbillonnaires de D. Et ces termes subsistent seuls aux seconds membres dans le cas d'un mouvement perma-

nent,  $\frac{d\vec{I}}{dt}$  et  $\frac{d\vec{J}}{dt}$  s'annulant pour l'îlot isolé.

C'est l'idée même du théorème de Joukowsky que nous voyons reparaître en une généralisation large, mais directe.

Indiquons encore que, dans la vitesse primitive  $\vec{w}$  on pourra isoler la part  $\vec{w}'$  induite par un autre îlot tourbillonnaire, soit D'. Les contributions de  $\vec{w}'$  dans  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  s'interprètent comme la résultante et le moment résultant de l'influence tourbillonnaire exercée par D' sur D. Ces influences tourbillonnaires vérifient le principe d'action et de réaction. Il est à peine besoin de dire qu'une telle dissociation des

expressions de  $\vec{K}$  et  $\vec{H}$  en influences d'origines diverses ne constitue qu'un langage suggestif pour présenter des faits purement mathématiques.

Les résultats nouveaux que nous venons de présenter dans ces deux paragraphes apportent la synthèse très simple de nombreuses formules antérieurement proposées. Ils dégagent d'une façon rigoureuse et générale l'idée d'une corrélation directe et intime entre les éléments tourbillonnaires d'un écoulement et les actions exercées sur les corps immergés, en régime permanent ou non.

Il est enfin remarquable qu'ils débordent le cadre de la théorie des fluides parfaits pour s'appliquer à des milieux incompressibles sujets à des tensions internes de nature quelconque. Les considérations du paragraphe 1 font particulièrement apprécier ce fait

On peut dès lors espérer qu'ils apporteront au développement futur des théories tourbillonnaires une aide efficace.

J.-J. MOREAU.

#### NOTES

1 — Rappelons l'existence d'un autre ordre de phénomènes également abordable par le calcul, caractérisé par la prédominance des effets de viscosité sur les effets d'inertie : c'est le domaine des très faibles nombres de Reynolds (de l'ordre de l'unité) qui englobe notamment les problèmes posés par la mécanique des suspensions.

2 — J.-J. MOREAU, C.R. de l'Académie des Sciences, 20 juin 1949.

3 — W. THOMSON (Lord KELVIN), *Math. and physical papers*, vol. IV, p. 13.

4 — Pour plus de précision, voir : Th. THEODORSEN, *Impulse and momentum in an infinite fluid (Applied Mechanics, Th. von Karman Anniversary Volume, 1941)*.

5 — Pour une démonstration des formules de Blasius dans ce même esprit, voir J. PERES, *Cours de Mécanique des fluides*, Chap. VI, § 10.

6 — M. PASCAL, *Atti dei Lincei*, vol. 30, 1921.

7 — C.R. de l'Académie des Sciences, 30 déc. 1929.

8 — *Les Cahiers d'Aérodynamique*, n° 7, 1947.

9 — C. R. du 3<sup>e</sup> Congrès international de Mécanique Appliquée, Stockholm 1930, vol. 1, p. 132.

10 — *Journal de Mathématiques*, 10, 1931, p. 439.

11 — Le champ de ces forces sans potentiel n'est évidemment défini qu'à un gradient arbitraire près, mais on peut montrer que R et H échappent à l'indétermination.

12 — Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices.