HAL
open science

Relations générales directes entre les actions aérodynamiques et les éléments tourbillonnaires

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Relations générales directes entre les actions aérodynamiques et les éléments tourbillonnaires. Colloque international de mécanique, 1950, Poitiers, France. hal-01737172

HAL Id: hal-01737172

https://hal.science/hal-01737172v1

Submitted on 26 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RELATIONS GÉNÉRALES DIRECTES ENTRE LES ACTIONS AÉRODYNAMIQUES ET LES ÉLÉMENTS TOURBILLONNAIRES

par

Jean-Jacques MOREAU

ATTACHÉ DE RECHERCHES AU C.N.R.S.

1 Le *théorème de Joukowsky*, qui exprime la force de portance subie par un profil en fonction de la circulation du champ des vitesses et ouvre la voie aux théories tourbillonnaires de l'aile et de l'hélice, suggère la conception générale d'une sorte de responsabilité des éléments tourbillonnaires de l'écoulement à l'égard des forces que subissent les corps immergés. Cette idée nous a paru appeler une justification théorique précise : la plupart du temps, en effet, dans les cas tridimensionnels, le rattachement des forces aérodynamiques à la structure tourbillonnaire s'effectue par une application approchée du théorème de Joukowsky à des portions d'écoulement localement et approximativement cylindriques.

Les relations très simples, que nous présentons ici, sont d'une grande généralité, puisqu'elles concernent des écoulements à deux ou trois dimensions, permanents ou non, d'un fluide incompressible quelconque : parfait ou sujet à des tensions internes de nature quelconque.

2 Un premier groupe de formules a trait au cas d'un milieu incompressible emplissant l'espace entier : ce sera pratiquement un fluide, parfait ou visqueux, contenant des systèmes solides immergés *de même densité que lui*. Des corrections d'inertie généralement faciles permettent de ramener à ce cas celui, plus usuel, où les solides immergés ont une densité hétérogène.

O désignant un point origine fixe, $\vec{\omega}$ le vecteur tourbillon (1) au point courant M, nous introduisons les deux intégrales suivantes, étendues à l'espace entier :

$$\vec{I} = \iiint_E \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\, d\tau,$$

$$\vec{J} = \iiint_E - OM^2 \vec{\omega}\, d\tau.$$

(1) En chaque point d'une portion solide du milieu, on sait que $\vec{\omega}$ n'est autre que le vecteur rotation instantanée de ce solide.

Ces deux vecteurs jouent, pour l'établissement d'un *bilan dynamique* du milieu, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement et du moment cinétique dans les théorèmes classiques de la mécanique rationnelle.

Le milieu est supposé *au repos à l'infini* (annulation uniforme de la vitesse $\vec{u}$, lorsque la distance OM augmente indéfiniment). Une annulation assez rapide de $\vec{\omega}$ à l'infini est évidemment nécessaire pour la convergence des deux intégrales. En outre, du point de vue mécanique, nous invoquons une annulation suffisante à l'infini des *tensions non hydrostatiques* (tensions de viscosité, par exemple) que représente un tenseur T_{ik}, dissocié du tenseur de pression $-p\,\delta_{ik}$. Toutes ces hypothèses se justifient pour un fluide, parfait ou visqueux, qui a été tiré du repos par des actions localisées à distance finie.

Dans l'étendue du milieu s'exercent des forces; seules sont actives celles qui *ne dérivent pas d'un potentiel* : soit $\vec{R}$ leur résultante et $\vec{H}$ leur moment résultant en O. On obtient alors les relations très simples :

$$\vec{R} = \rho \frac{d\vec{I}}{dt};$$

$$\vec{H} = \rho \frac{d\vec{J}}{dt}.$$

Pour la démonstration de ce résultat, comme de ceux qui vont suivre, nous ne pouvons ici que renvoyer à un mémoire détaillé qui doit paraître prochainement au *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

$\vec{I}$ et $\vec{J}$ forment les éléments de réduction en O, d'un *torseur* $\mathfrak{T}$, indépendant du choix de O, et qui constitue un caractère global de la structure tourbillonnaire : une certaine analogie mathématique avec des phénomènes magnétiques ou électriques, nous conduit à l'intituler *torseur de polarisation tourbillonnaire du milieu*.

Ainsi, le torseur des actions sans potentiel subies par le milieu se relie à la dérivée par rapport au temps du torseur de polarisation.

Le cas d'un écoulement à deux dimensions donne lieu à des considérations semblables. Le tourbillon se présente alors comme un scalaire ζ, composante du vecteur $\vec{\omega}$ selon l'axe Oz perpendiculaire au plan. On introduit l'intégrale vectorielle :

$$\vec{I}' = -2\,\vec{z} \wedge \iint \overrightarrow{OM}\,\zeta\,d\sigma,$$

et l'intégrale scalaire

$$J' = -\iint OM^2\,\zeta\,d\sigma,$$

étendues au plan entier. Cela donne, pour la résultante $\vec{R}$ des actions sans potentiel subies par le milieu et pour leur moment résultant H (scalaire), des expressions identiques aux précédentes. En particulier si $\vec{R}$ et H sont nuls, $\vec{I}'$ et J' doivent rester constants; on rejoint par là un résultat classique concernant les systèmes de tourbillons libres dans un fluide parfait indéfini : le centre de gravité des tourbillons doit rester fixe et leur moment d'inertie rester constant. La présente théorie s'introduit ainsi comme une généralisation de ce théorème ancien.

3 Il est également important de dresser le bilan dynamique d'une *portion finie de milieu incompressible*, soit D, limitée par une surface mobile S qui reste constituée des mêmes éléments matériels. Le milieu intérieur est de nature quelconque, parfait ou visqueux, pouvant comporter des portions solides (de même densité), mais, pour obtenir des résultats simples, nous devons supposer qu'il est *helmholtzien dans le voisinage de* S. On veut dire par là que cette région périphérique est constituée de fluide parfait et que les forces qui s'y exercent dérivent d'un potentiel. En étendant les intégrales $\vec{I}$ et $\vec{J}$ à la portion fluide D il vient, pour exprimer la résultante et le moment résultant des forces sans potentiel appliquées dans son étendue :

$$\frac{1}{\rho}\vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{A} - \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\,(\vec{\alpha}\,.\,\vec{\omega})\,d\sigma,$$

$$\frac{1}{\rho}\vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{B} + \iint_S OM^2\,\vec{u}\,(\vec{\alpha}\,.\,\vec{\omega})\,d\sigma$$

($\vec{\alpha}$: vecteur unité normal extérieur au point courant de S), avec :

$$\vec{A} = \iint_S \left[\frac{1}{2}u^2\,\vec{\alpha} - (\vec{u}\,.\,\vec{\alpha})\,\vec{u}\right] d\sigma = 2\iiint_D \vec{u} \wedge \vec{\omega}\,d\tau,$$

$$\vec{B} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{1}{2}u^2\,\vec{\alpha} - (\vec{u}\,.\,\vec{\alpha})\,\vec{u}\right] d\sigma = 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\omega})\,d\tau.$$

Ces résultats sont souvent d'une application facile. Ils atteignent leur maximum de simplicité dans le cas particulier où $\vec{\omega}$ est *tangentiel ou nul sur* S, ce que nous exprimons en disant que D présente une *structure tourbillonnaire fermée*, ou encore qu'il constitue un *îlot tourbillonnaire*. Dans ce cas, on décomposera le champ de vitesse $\vec{u}$ en la somme du champ $\vec{w}$, *induit* par les éléments tourbillonnaires de l'îlot D, selon les formules de Biot-Savart, et d'un champ résiduel $\vec{v}$ dit champ de *vitesse primitive*. Il se trouve alors que la contribution de $\vec{w}$, dans les intégrales $\vec{I}$ et $\vec{J}$, est nulle, de sorte qu'il reste :

$$\frac{1}{\rho}\vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{\mathfrak{A}},$$

$$\frac{1}{\rho}\vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{\mathfrak{B}},$$

avec :

$$\vec{\mathfrak{A}} = 2\iiint_D \vec{v} \wedge \vec{\omega}\,d\tau,$$

$$\vec{\mathfrak{B}} = 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\omega})\,d\tau.$$

Les vecteurs $\vec{\mathfrak{A}}$ et $\vec{\mathfrak{B}}$ définissent une action de l'*écoulement primitif* sur les éléments tourbillonnaires de D. Et ces termes subsistent seuls aux seconds membres dans le cas d'un mouvement permanent, $\frac{d\vec{I}}{dt}$ et $\frac{d\vec{J}}{dt}$ s'annulant (ils s'annulent en moyenne dans le cas d'un mouvement périodique). C'est l'idée même du théorème de Joukowsky que nous voyons reparaître en une généralisation large, mais directe.

Indiquons encore que, dans la vitesse primitive $\vec{v}$, on pourra isoler la part $\vec{v}'$ *induite* par un autre *îlot tourbillonnaire*, soit D'. Les contributions de $\vec{v}'$, dans $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$, s'interprètent comme la résultante et le moment résultant du torseur d'*influence tourbillonnaire* exercé par D' sur D. Ces influences tourbillonnaires vérifient le principe d'action et de réaction.

Il est à peine besoin de dire qu'une telle dissociation des expressions de $\vec{R}$ et $\vec{H}$, en influences tourbillonnaires d'origines diverses, ne constitue qu'un langage suggestif pour présenter des faits purement mathématiques. Il serait certainement vain de lui chercher une portée physique. Strictement théorique est également la dissociation *locale* des forces appliquées dans le milieu en forces dérivant d'un potentiel et forces sans potentiel. Le champ des forces sans potentiel n'est en fait défini qu'à un gradient arbitraire près; mais, d'après nos hypothèses, ces forces s'annulent sur la surface frontière S : on montre aisément alors que la résultante $\vec{R}$ et le moment résultant $\vec{H}$ se trouvent bien déterminés. Ces deux vecteurs ont pour leur part un intérêt physique. Il en est de même dans le cas du milieu emplissant l'espace. A ce moment, d'ailleurs, l'élimination des forces de pesanteur, dont la résultante se trouve infinie, est indispensable pour qu'on puisse dresser un bilan dynamique.

Le cas d'une portion limitée d'écoulement à deux dimensions donne lieu à des résultats analogues. La résultante et le moment des forces sans potentiel appliquées dans le domaine matériel à deux dimensions D s'expriment par :

$$\frac{1}{\rho}\vec{R} = \frac{d\vec{I}'}{dt} - \vec{A}'$$

$$\frac{1}{\rho}H = \frac{dJ'}{dt} - B',$$

avec :

$$\vec{A}' = \vec{\mathcal{A}}' = -2\vec{z} \wedge \iint_D \vec{v}\,\zeta\, d\sigma,$$

$$B' = \mathcal{B}' = -2\iint_D \vec{OM}\,.\,\vec{v}\,\zeta\, d\sigma.$$

Le théorème de Joukowsky, sous sa forme classique, se déduit immédiatement de là, comme on va le voir dans un instant.

4 L'exploitation pratique de ces diverses relations exige qu'on les étende au cas de *structures tourbillonnaires singulières.*

Ainsi une *ligne tourbillonnaire* d'intensité Γ sera assimilée à une région filiforme où le vecteur $\vec{\omega}$ présente des valeurs infiniment grandes. Chaque élément $d\vec{M}$ de la ligne équivaut, pour le calcul des intégrales triples, à un élément tourbillonnaire $d\tau$ avec l'équivalence :

$$\vec{\omega}\, d\tau \sim \frac{1}{2}\Gamma\, d\vec{M}.$$

Une équivalence analogue se manifeste pour le calcul des intégrales de surface où $\vec{\omega}$ intervient par son *flux.*

De la sorte, une ligne tourbillonnaire fermée C, d'intensité Γ, contribue aux intégrales $\vec{I}$ et $\vec{J}$ par les termes :

$$\vec{I}\,(C) = \frac{\Gamma}{2}\int_C \vec{OM} \wedge d\vec{M},$$

$$\vec{J}\,(C) = -\frac{\Gamma}{2}\int_C OM^2\, d\vec{M},$$

qu'on transforme encore en introduisant une cloison S limitée à C :

$$\vec{I}\,(C) = \Gamma\iint_S \vec{\alpha}\, d\sigma,$$

$$\vec{J}\,(C) = \Gamma\iint_S \vec{OM} \wedge \vec{\alpha}\, d\sigma$$

(tout comme en électromagnétisme un courant fermé équivaut à un *feuillet*). On rejoint par là des considérations de M. M. Roy [1].

De même, une *surface de glissement*, de part et d'autre de laquelle le vecteur vitesse présente les valeurs $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$, s'assimile à une couche tourbillonnaire infiniment mince et infiniment intense : chaque élément $d\sigma$ de la surface équivaut alors à un élément de volume $d\tau$ tel que :

$$\vec{\omega}\, d\tau \sim \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge (\vec{u}' - \vec{u}'')\, d\sigma$$

($\vec{\alpha}$: vecteur unité normal). En particulier la surface d'un obstacle solide sur lequel le fluide glisse devra être traitée comme une nappe tourbillonnaire du milieu total.

Ces diverses assimilations s'expliquent aisément par passage à la limite, tant qu'il s'agit d'évaluer des expressions *linéaires* par rapport au couple $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ et l'on peut, dans ce cas, leur donner une justification mathématique précise. Par contre, un tel passage à la limite est illégitime, lorsque se présentent des expressions non linéaires. Il est alors remarquable que les formules du paragraphe 3 restent valables en présence de surfaces de glissement qu'on assimilera à des nappes tourbillonnaires, sous la condition d'admettre comme vitesse du fluide *dans* la surface de glissement une moyenne :

$$\vec{u}^* = \frac{1}{2}(\vec{u}' + \vec{u}'').$$

C'est également l'introduction de cette vitesse moyenne qui nous a permis, mais sous quelques hypothèses restrictives, d'étendre aux nappes tourbillonnaires superficielles le théorème du transport des filets tourbillonnaires de Helmholtz [2].

(1) *Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices*, Paris, 1928.

(2) J.-J. Moreau. — *Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement*, C.R. de l'Académie des Sciences, 20 juin 1949.

Le cas bidimensionnel donne lieu à des interprétations analogues : une *ligne de glissement* séparant des portions matérielles de vitesses $\vec{u'}$ et $\vec{u''}$ équivaut à une couche tourbillonnaire. L'élément $d\vec{M}$ de la ligne remplace une cellule $d\,\sigma$ avec :

$$\zeta\, d\,\sigma \sim \frac{1}{2}\,(\vec{u'} - \vec{u''})\,.\,d\vec{M}.$$

Notamment le contour d'un profil immobile sur lequel le fluide glisse équivaut à une répartition d'éléments tourbillonnaires dont la somme est :

$$\oint \frac{1}{2}\,\vec{u}\,.\,d\vec{M} = \frac{1}{2}\,\Gamma.$$

L'influence $\vec{\mathcal{A}'}$, d'un écoulement primitif uniforme de vitesse $\vec{V}$, est alors :

$$\vec{\mathcal{A}'} = -\,\Gamma\,\vec{z} \wedge \vec{V},$$

ce qui ramène bien au théorème de Joukowsky avec, en outre, un moment :

$$\mathcal{B}' = -\,\vec{V}\,.\oint \overrightarrow{OM}\,(\vec{u}\,.\,d\vec{M}).$$

5 Le caractère dominant de cette théorie est l'élimination des forces dérivant d'un potentiel (pesanteur), inactives dans la dynamique d'un milieu incompressible, ainsi que de la pression, laquelle, du point de vue mathématique, n'est dans ce cas qu'une variable auxiliaire : la *réaction* ou le *multiplicateur* corrélatif de la liaison d'incompressibilité. C'est ce que réalisent déjà, pour des écoulements bidimensionnels, irrotationnels, permanents, de fluide parfait, les *formules de Blasius* (1). Les quantités $\vec{A}$ et $\vec{B}$ du paragraphe 3, exprimées d'abord sous forme d'intégrales de surface, présentent une parenté évidente avec les intégrales complexes de Blasius. Leur transformation ultérieure en intégrales de volume, qui met l'accent sur les éléments tourbillonnaires du domaine, est assez comparable à un calcul de résidus.

Ainsi, les relations que nous venons de présenter fournissent une synthèse très simple et une large généralisation de la plupart de celles qui ont été proposées jusqu'à présent pour l'évaluation des actions aérodynamiques. Nous ne doutons pas dès lors qu'elles soient capables d'apporter aux diverses théories tourbillonnaires une aide très efficace.

(1) Pour des extensions des formules de Blasius aux écoulements bidimensionnels non permanents, voir d'ailleurs des travaux de M. J. Pérès (C.R. de l'Académie des Sciences, 30 décembre 1929) et de M. J. Leray (Les cahiers d'Aérodynamique, n° 7, 1947). En outre, des formules concernant les écoulements à trois dimensions ont été données par M. J. Pérès (C.R. du 3e Congrès International de Mécanique Appliquée, Stockholm, 1930, vol. 1, p. 132) et par M. M. Roy (Journal de Mathématiques 10, 1931, p. 439).