



HAL
open science

Stratégies d'optimisation basées sur la méthode des plans d'expériences pour la conception de dispositifs électrotechniques

Stéphane Vivier, Michel Hecquet, Pascal Brochet

► **To cite this version:**

Stéphane Vivier, Michel Hecquet, Pascal Brochet. Stratégies d'optimisation basées sur la méthode des plans d'expériences pour la conception de dispositifs électrotechniques. *Revue Internationale de Génie Electrique (RIGE)*, 2005. hal-01736401

HAL Id: hal-01736401

<https://hal.science/hal-01736401v1>

Submitted on 16 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stratégies d'optimisation basées sur la méthode des plans d'expériences pour la conception de dispositifs électrotechniques.

Stéphane Vivier – Michel Hecquet – Pascal Brochet

*L2EP, Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille
Ecole Centrale de Lille
Cité Scientifique, B.P. 48
59651 Villeneuve d'Ascq cedex
stephane.vivier@ec-lille.fr; michel.hecquet@ec-lille.fr; pascal.brochet@ec-lille.fr*

RÉSUMÉ. L'étude d'un système électrotechnique passe très souvent par la détermination des relations liant les grandeurs étudiées aux données d'entrée. Dans bien des cas, l'écriture explicite de ces fonctions de passage n'est pas aisée, voire même impossible en raison de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. La Méthode des Plans d'Expériences (MPE) peut alors se présenter comme un formalisme méthodologique simple répondant à cet objectif. Dans tous les cas, cette approche vise à construire un modèle – très simple de préférence – liant les entrées et les sorties, grâce aux résultats obtenus à l'issue d'une série d'expériences déterminées a priori : il s'agit du plan d'expériences.

Après avoir introduit les principaux aspects de la MPE, plusieurs algorithmes d'optimisation basés sur cette méthode sont développés. Cet emploi particulier de la MPE comme base à des méthodes heuristiques, constitue une originalité.

Deux applications sont présentées : un frein linéaire à courant de Foucault et l'étude d'une fonction analytique ayant 2 maxima d'amplitudes différentes.

ABSTRACT. The study of a system is often achieved by the determination of relations linking the studied variables to input data. In some cases, the explicit writing of these functions is not easy, and sometimes even not possible, because of the complexity of the phenomena involved. The Design of Experiment Method (DoEM) can constitute a simple methodological formalism adapted to this goal. In any case, this approach aims to build a model – very simple preferably – linking input and output variables, with the use of numerical results, obtained thanks to the realisation of a series of experiments fixed a priori: this is the design of experiments.

A first part introduces the main aspects of the DoEM. Then, many optimisation algorithms, based on this method, are presented. This particular use of the DoEM as a basis of heuristic methods, constitutes an originality.

Two applications are presented : the study of a linear eddy current and an analytical fonction with two different maximum.

MOTS-CLÉS : optimisation, méthode des plans d'expériences, systèmes électrotechniques.

KEYWORDS: optimization, experimental design method, electrotechnical systems.

1. Introduction

Dans le processus de conception, sous la pression de défis économiques et techniques, la démarche d'ingénierie numérique s'est imposée progressivement à de nombreux secteurs d'activité, notamment en électrotechnique.

Elle se caractérise par le recours systématique et méthodique à la modélisation et à la simulation numérique.

Elle reproduit par calculs numériques les comportements physiques de dispositifs réels soumis à des conditions particulières. Ainsi, à chaque système *réel* correspond un équivalent *virtuel* dont les qualités intrinsèques sont infiniment plus avantageuses, dans la mesure où celui-ci peut être modifié au gré de l'expérimentateur, à faible coût.

Cette démarche trouve son achèvement dans l'*optimisation*, afin d'améliorer les performances des produits existants ou nouveaux.

L'avantage de la flexibilité des systèmes virtuels est toutefois contrebalancée par deux principales difficultés. La première concerne la pertinence de la modélisation elle-même : celle-ci est limitée et ne reproduit que partiellement les phénomènes physiques réels entrant en jeu. La difficulté à prendre en compte le phénomène d'hystérésis en est un exemple. La seconde difficulté est relative à la construction du modèle. Celle-ci est dépendante de nombreux paramètres, dont par exemple l'expertise du concepteur qui la réalise, les caractéristiques matérielles et logicielles de la station de travail utilisée, etc.

Ces facteurs sont des sources d'incertitude et de variation des résultats fournis par les expériences virtuelles.

L'ingénierie numérique des systèmes électrotechniques modélisés soulève par conséquent deux difficultés :

- les modélisations utilisées ne sont pas obligatoirement fidèles aux dispositifs originaux ou équivalents réels, eux-mêmes soumis aux aléas de fabrication et de réalisation,
- il existe dans tous les cas une incertitude expérimentale due à la démarche de modélisation et de simulation.

L'espace de recherche, même numérique, est donc – comme le monde réel – soumis à l'incertitude et à la variabilité. Il faut en tenir compte dans la démarche de conception et d'optimisation. A quoi bon optimiser un paramètre de conception si son influence est inférieure au niveau de bruit induit par les sources de variation du modèle numérique manipulé ?

Une solution pour connaître les évolutions des variables caractéristiques d'un dispositif – leurs interactions, leurs influences sur les grandeurs étudiées – tout en tenant compte du caractère bruité des expériences numériques, réside dans le recours à la *Méthode des Plans d'Expériences*, et à son utilisation comme outil privilégié dans la démarche d'optimisation.

Après un rappel des caractéristiques essentielles de la méthode des plans d'expériences connue depuis bien longtemps [BOX 87], nous détaillons dans ce papier *différentes stratégies d'optimisation* basée sur les plans d'expériences.

Ces différentes stratégies sont expliquées et mises en oeuvre sur un même exemple afin de les comparer. Un tableau comparatif est présenté qui résume les avantages et inconvénients de chaque approche. L'exemple choisi est une fonction analytique ayant 2 maxima d'amplitudes différentes, ce qui constitue un test sévère pour les méthodes d'optimisation. Par ailleurs, ces stratégies ont déjà été mises en oeuvre sur des exemples électrotechniques qui sont référencés et qui permettent de les valider.

En ce qui concerne l'emploi de la technique des plans d'expériences, nous rappelons l'intérêt immédiat des plans de criblage et des surfaces de réponse avec comme illustration le cas complexe de la conception optimale d'un frein linéaire à courants de Foucault.

Un point important est la justification de l'emploi de l'analyse de la variance pour déterminer les facteurs significatifs. Nous montrons sur un exemple représentatif que la variance résiduelle calculée à partir des interactions d'ordre élevé se compare bien avec la variance expérimentale, telle qu'on peut la faire apparaître dans une expérience virtuelle.

2. Méthode des Plans d'Expériences

Le terme *Méthode des Plans d'Expériences*, ou MPE, désigne en définitive une méthodologie complète pour la caractérisation comportementale d'un système. Elle est basée sur la modification et la mesure des variables propres au dispositif considéré ; cela comprend principalement les grandeurs étudiées ainsi que leurs sources de variation.

Elle permet de déterminer les relations existant entre ces deux groupes de variables, en établissant les relations analytiques les liant. Suivant le type de ces modèles mathématiques, l'expérimentateur peut en déduire des informations plus ou moins précises, qualitatives ou quantitatives.

Les modélisations mathématiques sont déduites des résultats de séries d'expériences fixées a priori : *les plans d'expériences*.

On considérera donc successivement dans les développements suivants :

- les types de variables entrant en jeu dans les problèmes de modélisation,
- les modèles utilisés dans ces différents cadres.

2.1. Variables

De manière générale, la MPE cherchera à déterminer les liens entre 2 types de variables : les *réponses* et les *facteurs*. Accessoirement, ces relations peuvent être

établies pour des valeurs particulières de *constantes* et de *paramètres*.

2.1.1. Réponses

Les réponses sont les grandeurs étudiées, ou grandeurs de sortie. Lorsque plusieurs réponses sont définies, le processus d'optimisation visera à améliorer une combinaison des valeurs de ces réponses, résumée par la *fonction objectif*.

2.1.2 Facteurs

Les facteurs sont les grandeurs supposées influencer sur les variations des réponses.

Les facteurs et les réponses sont les seules variables à intervenir dans l'écriture des plans d'expériences.

Chaque facteur peut être un des trois types suivants :

- continu (par ex. : la hauteur de la culasse d'une machine),
- discret (par ex. : le nombre de pôles),
- qualitatif (par ex. : le type de tôle magnétique).

La distinction entre les différents types de facteurs est importante car elle a une influence sur l'étape de modélisation. Ainsi, il est hors de sens de construire un modèle continu ou discret si au moins un des facteurs est qualitatif.

La définition des facteurs d'un problème implique automatiquement celle du *domaine d'étude possible (DEP)*, c'est-à-dire de l'espace des valeurs des facteurs pour lesquelles les réponses peuvent être évaluées. La définition du DEP est ainsi déduite de la connaissance :

- des limites inférieures et supérieures des facteurs continus (i.e. des *butées*) ;
- des valeurs prises par les facteurs discrets ;
- des *contraintes*.

Tout point à l'intérieur du DEP est une traduction géométrique des combinaisons valides des valeurs de facteurs. C'est pourquoi il est courant de désigner une expérience comme un *point (d'expérience)*, du fait de cette équivalence géométrique.

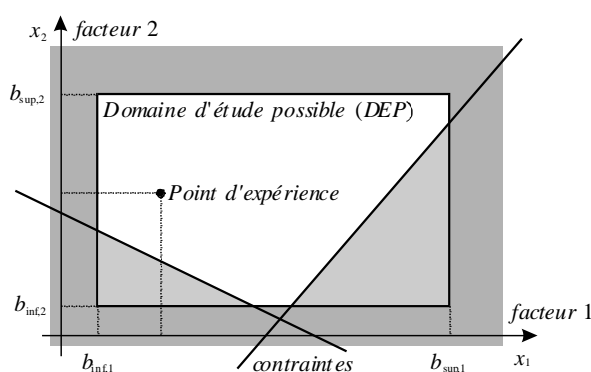


Figure 1. Représentation schématique du domaine d'étude possible (DEP) pour 2 facteurs continus, avec 2 contraintes linéaires

Un ensemble de N points d'expériences (définis à l'intérieur du DEP) est appelé *plan d'expériences* (PE).

2.1.3. Autres variables

Si l'on veut faire varier une grandeur sans la prendre en compte dans les plans d'expériences futurs (c'est-à-dire si l'on ne veut pas l'assimiler à un facteur), il convient de la déclarer comme un paramètre. Si plusieurs paramètres sont définis, alors il faut considérer toutes les combinaisons entre les différentes valeurs de ces paramètres. Leur nombre croît donc exponentiellement. C'est un bon moyen de prendre en compte les facteurs qualitatifs.

Enfin, on notera l'usage des constantes, majoritairement pour faire apparaître clairement les grandeurs fixées sciemment (par ex. : cas des diamètres extérieurs de machines cylindriques à encombrement constant).

2.2. Modèles

Notons k le nombre de facteurs considérés. Les valeurs de ces k variables peuvent être avantageusement réunies sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{x}' = [x_1 \quad x_2 \quad \text{K} \quad x_k]$$

On recherche ainsi l'écriture du modèle f , décrivant *au mieux* les variations de la réponse y en fonction des valeurs des k facteurs, c'est-à-dire suivant \mathbf{x} .

Pour établir f , on se sert des résultats de N expériences. Les k facteurs sont fixés à N combinaisons de niveaux (\mathbf{x}) différents ; les valeurs correspondantes de y sont alors relevées.

Dans la majorité des cas, le modèle déduit ne passe pas lui-même par les tous points d'expériences. De là, on peut écrire :

$$y_{\text{mod}} = f(\mathbf{x})$$

y_{mod} désigne la valeur donnée par la modélisation f au point de coordonnées \mathbf{x} .

Pour une expérience \mathbf{x} donnée, il peut donc exister un résidu ε non nul :

$$\varepsilon = y - y_{\text{mod}}$$

Pour la construction de f , les développements à venir n'utiliseront que des modèles analytiques explicites polynomiaux. Dans cette classe, seules sont retenues les écritures pouvant être analysées facilement ; c'est ainsi que nous nous limiterons à l'emploi des modèles (polynomiaux) additifs du 1^{er} ordre sans couplage, avec couplages et du second ordre.

2.2.1. Modèles du premier ordre

L'expression générale est :

$$y_{\text{mod}} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b}$$

\mathbf{b} est le vecteur des k coefficients du modèle (hors terme constant b_0) : $\mathbf{b}' = [b_1 \ b_2 \ \text{K} \ b_k]$. Il représente la direction de plus grande augmentation de la réponse modélisée y_{mod} .

2.2.2. Modèles additifs avec couplages

En plus des termes du premier degré, les couplages entre les facteurs sont ajoutés.

Ainsi, dans un exemple avec 3 facteurs :

$$y_{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

De tels modèles sont définis par 2^k coefficients.

2.2.3. Modèles du second ordre

L'expression générale des modèles du 2nd ordre est la suivante :

$$y_{\text{mod}} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}$$

Il s'agit de modèles du 1^{er} ordre auxquels ont été rajoutés des termes du deuxième degré ($x_1 \cdot x_2$ ou x_3^2 par exemple). Les coefficients des termes additionnels sont réunis dans la matrice carrée symétrique \mathbf{B} .

Le nombre total de coefficients b_i vaut $(k+1)(k+2)/2$.

2.3. Approche matricielle

Les N expériences du plan permettent d'obtenir N valeurs de la réponse y :

$$\mathbf{y}' = [y_1 \ y_2 \ \text{K} \ y_N]$$

De plus, le processus expérimental (i.e. les coordonnées des N expériences connues a priori) et l'écriture du modèle choisi peuvent être pris en compte simultanément par la construction de la *matrice d'expériences* \mathbf{X} .

Si l'on note p le nombre de coefficients du modèle, les dimensions de \mathbf{X} sont $N \times p$. Ainsi, la structure habituelle des matrices d'expériences est la suivante :

- la première colonne ne contient que des 1 ;
- les colonnes 2 à $k+1$ donnent les coordonnées des N points d'expériences ;
- les $p-k-1$ autres colonnes se déduisent des valeurs des k facteurs suivant la définition des termes de couplage donnés par le modèle choisi.

Prenons un exemple pour lequel $k=2$ et où la définition des $N=4$ expériences est

donnée par $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}'$.

Le placement des points d'expériences dans le DEP peut être représenté comme suit :

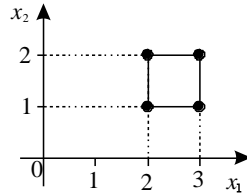


Figure 2. Exemple de positionnement de points d'expériences dans le DE

Le modèle choisi est additif avec couplages ($y_{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$).
 p vaut donc 4 et la matrice \mathbf{X} égale :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

La quatrième colonne est la traduction de l'interaction entre les facteurs x_1 et x_2 . Cette dernière étant prise en compte par le terme $b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$, le calcul de cette dernière colonne se fait donc par la multiplication des colonnes correspondant aux niveaux des facteurs x_1 (2^{ème}) et x_2 (3^{ème}).

Grâce à ces écritures matricielles, on peut écrire plus simplement :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad [1]$$

Où :

– $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des coefficients (y compris le terme constant) – dans l'exemple ci-dessus, $\boldsymbol{\beta}' = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_{12}]$;

– \mathbf{e} est le vecteur des erreurs de mesure ; \mathbf{e} est nul lorsque les expériences sont virtuelles, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de simulations informatiques.

L'estimation des valeurs des coefficients se fait par la *méthode des moindres carrés*. On aboutit ainsi à $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, valeur particulière de $\boldsymbol{\beta}$, telle que :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}' \cdot \mathbf{y} \quad [2]$$

Finalement, on peut écrire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{mod}} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{X} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad [3]$$

2.4. Notion d'optimalité

Quel que soit le mode opératoire employé, refaire plusieurs fois une même expérience peut conduire à des résultats différents. On fait donc apparaître l'existence d'une variabilité des réponses, qui peut être traduite mathématiquement par une variance expérimentale (σ^2). Dans un souci de simplification, σ^2 est considérée comme constante sur l'ensemble du DEP.

On peut alors montrer que les variances $\sigma^2(\hat{\beta})$ des coefficients calculés par [2] sont égaux aux éléments diagonaux de la matrice suivante :

$$\sigma^2(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad [4]$$

On peut donc déduire que ces variances seront d'autant plus faibles que les éléments diagonaux de la matrice de dispersion $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ seront petits, et donc notamment que le déterminant de la matrice d'information $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ sera grand.

Ces considérations définissent implicitement le critère de *D-optimalité* (D comme déterminant). Ainsi on est amené à rechercher les coordonnées des expériences dans l'optique de construire une matrice d'expériences \mathbf{X} qui permet d'aboutir à un $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ maximal.

Il existe d'autres critères d'optimalité, leur point commun étant toujours de déterminer le meilleur placement des expériences, généralement au regard de la qualité ou des propriétés du modèle qui en sera déduit.

Ces critères peuvent ainsi justifier la structure des principaux plans d'expériences *prédéfinis*, couramment décrits dans la littérature [DRO 97].

2.5. Principales orientations de la méthode des plans d'expériences

De manière générale, la MPE a pour finalité de construire des modèles exprimant les variations de la réponse en fonction des facteurs. Dans tous les cas, la meilleure qualité du modèle est recherchée ; la MPE permet d'atteindre cet objectif en déterminant les *modalités* des expériences à réaliser.

Suivant leurs caractéristiques, les modèles apportent des renseignements différents. A l'inverse, relativement à l'usage auquel ils sont destinés, les modèles utilisés se doivent de posséder certaines propriétés.

On distingue classiquement 2 grandes utilisations finales des modèles : le criblage des facteurs ou *screening*, et la construction de *surfaces de réponse*.

2.5.1. Technique du screening

Parmi les facteurs recensés par l'expérimentateur, cette approche permet de déterminer ceux qui ont une influence statistiquement non négligeable sur les variations de la réponse. On peut donc ainsi procéder à une simplification du problème, par élimination des facteurs peu influents [GOU 96] [GAR 95].

Pour déterminer l'influence d'un facteur, il suffit de lui faire prendre 2 niveaux

différents, et d'observer les variations induites de la réponse étudiée.

Ainsi, de manière générale, pour évaluer les effets de plusieurs facteurs grâce à un seul plan d'expériences, il faut faire en sorte que :

- chaque facteur prenne (au minimum) 2 niveaux différents ;
- le nombre d'expériences définies pour un niveau donné de facteur soit toujours constant de façon à ne pas introduire de biais : c'est la propriété d'orthogonalité.

Les PE de screening sont tous dérivés des matrices factorielles complètes et plus généralement des matrices d'Hadamard. On peut ainsi citer les plans factoriels complets et fractionnaires, les plans de Plackett-Burman, les plans de Taguchi [PIL 94], [BRI 01], et les plans supersaturés [Wu 93].

Les modèles déduits de tels plans peuvent être uniquement du premier ordre et prendre également en compte tout ou partie des interactions entre les facteurs.

Une application à un frein linéaire à courants de Foucault illustre cette technique et est détaillée dans les références suivantes [HEC 99], [HEC 02], l'emploi de *l'analyse de la variance* y est justifié. Il conduit à la détermination des facteurs les plus significatifs.

a) Présentation de la structure et du modèle éléments finis

Ce système de freinage est simple et peut être vu comme un moteur linéaire [STO 74], [WIA 73]. Sur la figure 3, un pôle est représenté, la géométrie complète étant obtenue par la répétition de cette structure élémentaire.

Le nombre de facteurs et les phénomènes à prendre en considération dans l'optimisation du dispositif sont très nombreux. Outre la valeur des ampères-tours placés dans les bobines, les paramètres géométriques susceptibles d'influencer les performances du dispositif sont définis sur la figure 3.

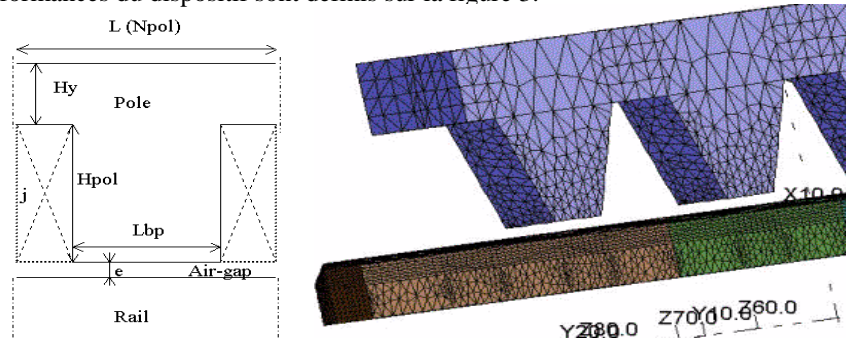


Figure 3. Vue d'un pôle, définition des paramètres de conception, et exemple d'un maillage 3D.

Ces paramètres sont : l'épaisseur de l'entrefer (e), la hauteur du pôle (Hpol), l'épaisseur de la culasse (Hy), le nombre de pôles (Npol), la dimension du bas de pôle (Lbp), le nombre d'ampères-tours imposés (NI).

Le pas polaire L est lié au nombre de pôles, la longueur totale du dispositif étant imposée. Les bobines, alimentées par un courant continu, sont placées autour des pôles, la valeur des ampères-tours totaux est maintenue constante.

Un plan de screening est réalisé dans le but d'identifier les facteurs les plus significatifs.

Deux niveaux sont choisis pour chaque facteur, dans le but d'établir les effets de ceux-ci ainsi que leurs interactions sur les forces. Ces niveaux sont :

$$e : 8 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}; H_{pol} : 70 \text{ mm} \pm 10 \text{ mm}; Hy : 45 \text{ mm} \pm 15 \text{ mm}$$

$$L_{bp} : \text{de } 0 \text{ à } 30\%; N_{pol} : \text{de } 6 \text{ à } 10; j : \text{de } 6 \text{ à } 8 \text{ A/mm}^2$$

Le plan factoriel fractionnaire retenu demande seulement 16 simulations : plan 2^{6-2} [GOU 96]. L'analyse de la variance permet l'exploitation des résultats en discriminant les effets des facteurs qui sont les plus significatifs pour la réponse étudiée : dans notre cas, la force de freinage. Un exemple de traitement est donné figure 4.

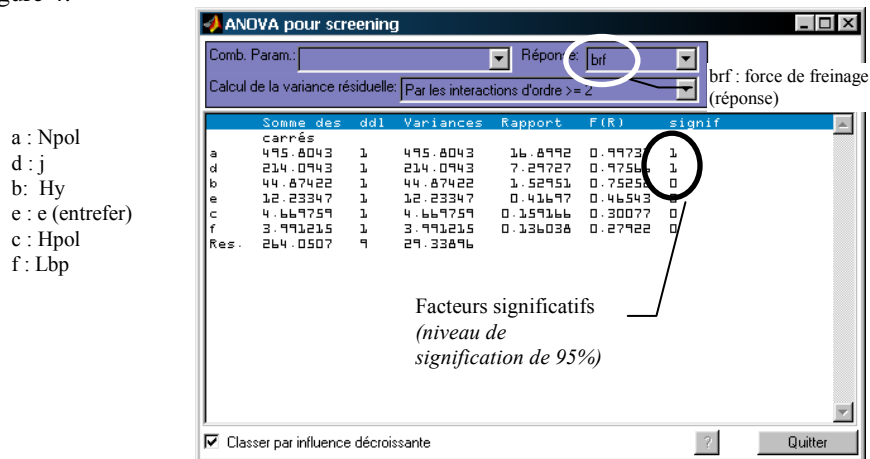


Figure 4. Analyse de variance et effets des facteurs ($v = 50 \text{ km/h}$)

En conclusion de cette analyse, 2 facteurs sont déclarés influents avec un niveau de signification de 95% : le nombre de pôles et le courant d'excitation j, pour le domaine choisi. Ces différents facteurs, pour la vitesse considérée, sont classés par ordre d'influence sur la force de freinage. Pour exemple, l'épaisseur de la culasse a 3 chances sur 4 d'avoir un effet sur les variations des forces. Ainsi, celui-ci peut également être conservé. De nombreux tests ont été effectués ainsi qu'une utilisation originale de l'analyse de la variance, qui démontrent la validité des facteurs retenus.

En effet, en ce qui concerne l'analyse de la variance, celle-ci repose sur la détermination de la variance résiduelle (appelée 'approche 1' ci-dessous) qui est construite à partir des interactions d'ordres élevés, jugées d'influences faibles.

Ainsi, dans le tableau 1, on a placé la valeur de cette variance résiduelle en fonction des interactions d'ordre '5+6', d'ordre '4+5+6', etc., jusqu'à la détermination de la variance résiduelle qui englobe toutes les interactions du problème : '2+3+4+5+6'.

Pour nous permettre d'identifier les interactions d'ordre '5+6' par exemple, des expériences supplémentaires ont été réalisées afin d'estimer cette variance 'résiduelle', notre intérêt étant de valider notre hypothèse : les interactions d'ordre élevés peuvent être utilisées pour le calcul de la variance.

L'autre technique ou approche n°2 consiste à évaluer une erreur dite expérimentale, plus classiquement employée. Celle-ci est plus difficile à appliquer sur un prototype virtuel car la répétition d'une même expérience dans les mêmes conditions donnera toujours le même résultat.

Ainsi, pour valider notre hypothèse, avec l'exemple du frein linéaire, on a considéré différents maillages de la structure, plus ou moins fins, ou avec l'utilisation de différentes techniques pour ce type de problème.

Ces différents modèles ont été définis de la façon suivante, le premier modèle donnant de bons résultats sur la force de freinage par rapport aux essais expérimentaux [HEC1 02], [INR 96]:

- variation du nombre de nœuds de 10% ;
- utilisation du maillage auto-adaptatif ;
- utilisation de différentes techniques d'up-winding (Hughes ou Streamline);

Un même plan d'expériences a été défini et différentes valeurs de force de freinage sont obtenues. Ensuite, pour chaque expérience, la variance correspondante est calculée, et nous en déterminons la moyenne : 0.8611.

<i>Ordre des interactions</i>	<i>Approche 1 (variance 'résiduelle')</i>	<i>Approche 2 (variance 'expérimentale')</i>
5+6	0,0029	
4+5+6	0,036	<u>0.8611</u>
3+4+5+6	0,3752	
2+3+4+5+6	3,048	

Tableau 1. *Comparaison entre les variances 'résiduelle' et 'expérimentale'*

En conclusion, l'ordre de grandeur de la variance 'résiduelle' construite à partir des interactions d'ordres supérieurs à 2, est comparable à celle donnée par l'erreur dite expérimentale ce qui nous permet de valider notre hypothèse.

2.5.2. Méthodologie des surfaces de réponse

Les variations de la réponse sont calculées en fonction des facteurs précédemment jugés influents.

Cette étude est davantage quantitative, le but étant de déterminer comment la réponse varie [GOU 99] [BOX 87].

Dans ce contexte, les modèles utilisés permettent généralement de prendre en compte les variations quadratiques de la réponse. De ce fait, chaque facteur doit

prendre au minimum 3 niveaux différents.

Un ensemble d'outils complémentaires peut alors être utilisé pour évaluer la qualité de la modélisation et analyser les variations décrites par les modèles.

Un exemple de surface de réponse appliqué au frein linéaire est présenté brièvement ci-dessous et détaillé dans les références suivantes [VIV2 02], [HEC1 02], mais aussi d'autres exemples référencés comme le cas d'une machine synchrone à aimants [GIL 98], [GIL 00].

a) Application au frein linéaire à courant de Foucault

Pour exemple, nous présentons ci-dessous les surfaces de réponse et leur modèle analytique des forces d'attraction et de freinage en fonction de la vitesse et de la densité de courant j (figure 5).

Grâce à ces modèles équivalents, une étude de sensibilité de la réponse peut être réalisée.

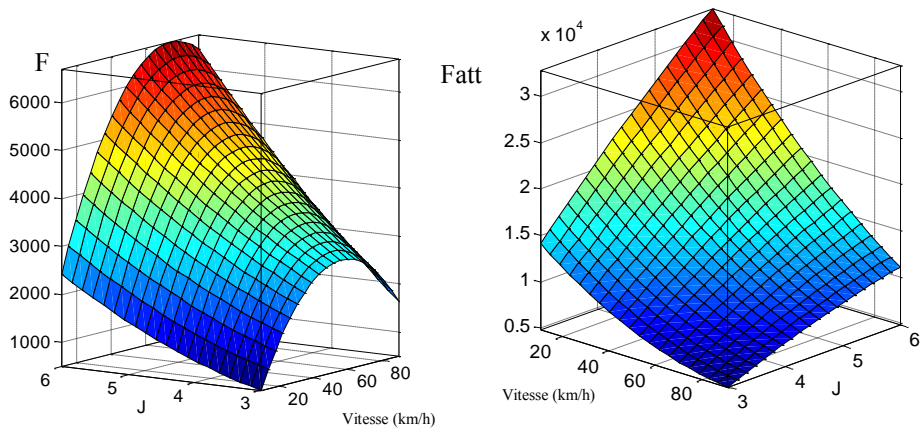


Figure 5. Surface de réponse de la force de freinage et de la force d'attraction fonction de la vitesse et de la densité de courant J . (modèle 8 pôles)

Fig de gauche : force de freinage

$$(F_{\text{frein}} = -511 + 85.5 \cdot v - 345.8 \cdot J - 1.05 \cdot v^2 + 95.7 \cdot J^2 + 11.8 \cdot v \cdot J)$$

Fig. de droite : force d'attraction

$$(F_{\text{att}} = -7829 - 78.4 \cdot v + 883 \cdot J + 1.1 \cdot v^2 - 231 \cdot J^2 - 51.6 \cdot v \cdot J)$$

Ces deux expressions ne sont valides que dans le domaine considéré : v comprise entre 20 et 100km/h et j comprise entre 3 et 6 A/mm².

L'étude du dispositif et l'analyse des surfaces de réponses a permis de fixer le nombre de pôles, sa géométrie, le courant, mais aussi d'atteindre un rapport force de freinage / force d'attraction égal à 55% à la vitesse de 25m/sec, soit un gain de plus de 10% par rapport à la géométrie initiale.

3. Stratégies d'optimisation par PE

L'exemple précédent met en évidence l'intérêt de l'utilisation de la méthode des plans d'expériences dans la démarche de conception et d'optimisation de dispositifs électrotechniques. De nombreux papiers existent sur le sujet de l'utilisation des PdE [CAL 01], [ZAO 00], [DYC 99] mais aussi un nombre croissant de parutions présentent des optimisations de systèmes électrotechniques par la méthode des plans d'expériences [RON 97], [TSU 00], [BRI 01].

Il est alors tentant de systématiser l'emploi de cette méthode et d'implémenter dans un outil logiciel différentes stratégies d'optimisation basées sur les plans d'expériences.

La différence par rapport à des algorithmes d'optimisation déterministes (gradient conjugué, plus grande pente, etc..) et stochastiques (algorithmes génétiques, méthode 'tabou', etc..) est que l'optimisation par PdE permet de conserver un modèle équivalent des phénomènes investigués et de fournir la sensibilité de l'optimum.

Dans la partie suivante, on se propose de décrire succinctement les caractéristiques principales de fonctionnement d'algorithmes d'optimisation exclusivement basés sur l'utilisation des plans d'expériences.

Trois approches originales sont proposées et testées sur un même exemple. A chaque itération, ces méthodes calculent un plan d'expériences ; le modèle déduit permet alors de déterminer les caractéristiques du plan à calculer à l'itération suivante.

Une illustration est donnée au paragraphe suivant.

3.1. Récupération d'expériences entre plans

Lorsque 2 plans d'expériences doivent être réalisés dans des zones voisines du DEP, il peut se révéler intéressant de placer le second plan pour qu'il partage certains points du premier. Cette opération permet donc l'économie d'expériences, et améliore de fait la contiguïté des zones modélisées.

La figure suivante illustre cette possibilité : dans un DEP à $k=2$ facteurs, 2 plans factoriels complets sont positionnés de sorte que les expériences en $x_1=2$ soient communes aux 2 plans.

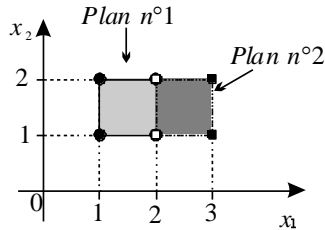


Figure 6. Exemple de partage d'expériences entre 2 plans factoriels complets ($k=2$)

3.2. Stratégies de glissement

Le premier plan est réalisé dans une zone du DEP déterminée par l'expérimentateur. Celui-ci doit également fixer les caractéristiques de ce plan (taille, nombre d'expériences, etc.).

Ce premier PE sert au calcul d'une *meilleure direction*, c'est-à-dire d'une orientation dans le DEP pour laquelle les valeurs de la fonction réponse évoluent vers l'optimum désiré (figure 7). A noter que cette information est indépendante de tout calcul de gradient. C'est un atout. De là, les méthodes par PE peuvent être considérées d'ordre 0.

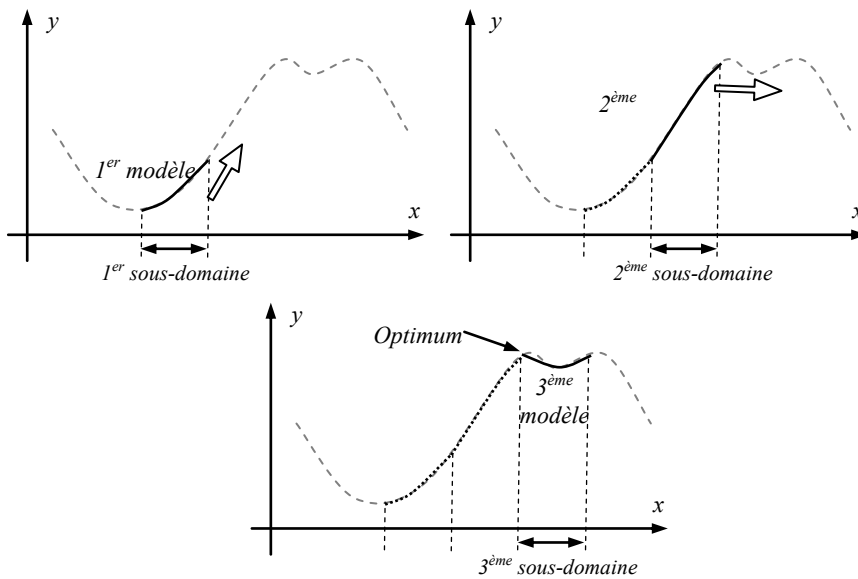


Figure 7. Principe simplifié de fonctionnement des stratégies d'optimisation par glissements de plans.

Cette information de direction, ajoutée aux considérations de récupération d'expériences entre plans, permet de déduire le positionnement du plan à réaliser lors de l'itération suivante. Le fonctionnement est donc itératif. Les optima trouvés par cet algorithme sont typiquement locaux, dans la mesure où ils dépendent très fortement de l'emplacement du premier plan réalisé.

Deux exemples sont présentés : le premier référencé [VIV 01] présente cette stratégie appliquée à un moteur brushless, le second est détaillé au chapitre 4.

3.3. Stratégies de zooms

Les stratégies précédentes ont l'inconvénient de ne couvrir in fine qu'une partie du domaine d'étude, ce qui relativise le caractère optimal de la solution trouvée.

Afin de réduire cette incertitude, il est intéressant de faire débiter l'optimisation par une modélisation complète du DEP, puis de resserrer sur la zone pour laquelle le modèle donne les meilleures valeurs de réponse (figure 8).

Ces dernières sont comprises entre l'optimum de la modélisation et une limite spécifiée par l'expérimentateur. Plus cette limite est proche de l'optimum du modèle, plus le resserrement est important, et donc plus la zone considérée à l'itération suivante est petite. La convergence s'en trouve donc accélérée, mais il reste cependant le risque qu'elle se réalise sur un optimum local. Il y a donc compromis, entre rapidité et certitude sur le type de la solution.

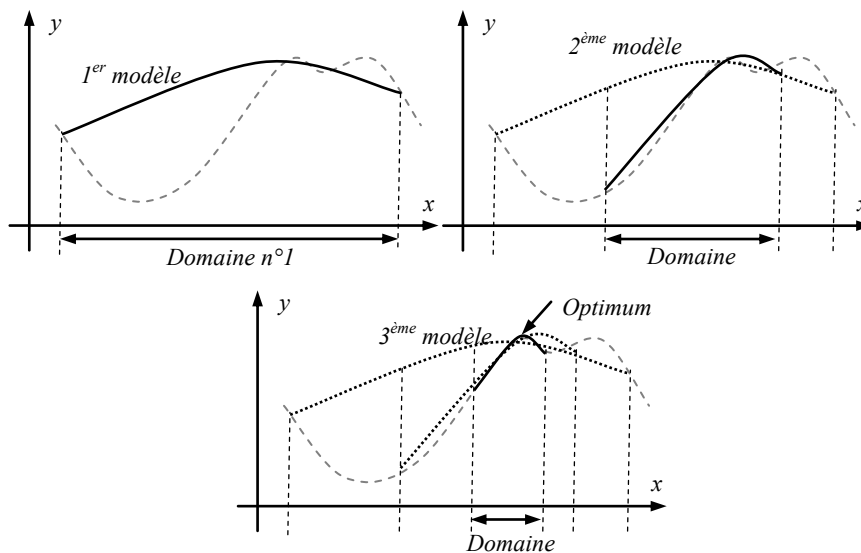


Figure 8. Principe simplifié de fonctionnement des stratégies d'optimisation par resserrements de plans

Un exemple est détaillé au paragraphe 4.

3.4. Stratégies « exhaustives »

Afin de s'assurer de la globalité des conditions optimales recherchées, la MPE est employée ici pour modéliser les variations de la réponse dans l'ensemble du DEP. L'optimisation est donc précédée par une modélisation exhaustive.

Compte tenu des limites des modèles de base employés, la modélisation globale est ici toujours réalisée par morceaux. Le DEP est ainsi découpé en sous-domaines, dans chacun desquels est calculé un plan d'expériences puis un modèle. La mitoyenneté des sous-espaces permet une récupération optimale des expériences.

Les différents algorithmes utilisant cette stratégie se distinguent soit par les modèles de base utilisés, soit par leur technique de subdivision du DEP en sous-domaines.

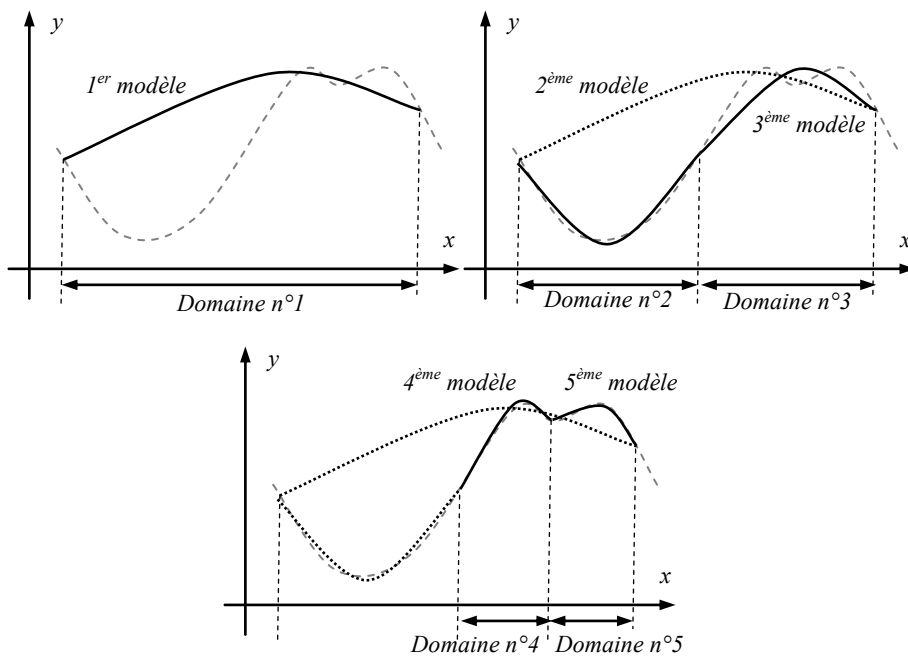


Figure 9. Principe simplifié de fonctionnement des stratégies d'optimisation exhaustives

L'illustration est donnée au chapitre suivant, et deux autres exemples [GIL 04], [VIV 04] présentent l'optimisation d'un moteur tubulaire et d'une machine

synchrone à aimants en considérant dans ce deuxième cas, le bruit d'origine électromagnétique comme réponse.

4. Illustrations

4.1. Fonction test

On considère une fonction analytique f à 2 variables x_1 et x_2 d'expression :

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{1 + [2.(x_1 - 0.6)]^2 + [1.5.(x_2 + 0.4)]^2} + \frac{1.6}{1 + [2.(x_1 + 0.4)]^2 + [1.5.(x_2 - 0.3)]^2}$$

Les 2 facteurs x_1 et x_2 prennent leurs valeurs dans le même intervalle $[-1, 1]$.

f est l'addition de 2 sous-fonctions unimodales. In fine, f est une fonction multimodale comprenant 1 optimum global et 1 optimum local. Les caractéristiques de ces points sont données par le tableau suivant.

	Coordonnées	Valeur de y
Maximum global	$x_{maxglob}=[0.5772, -0.3840]$	2.26716642
Maximum local	$x_{maxloc}=[-0.3627, 0.2739]$	1.93782563

Tableau 2. Coordonnées et valeurs des 2 maxima de la fonction f (précision de 10^{-4} pour les coordonnées et de 10^{-8} pour les valeurs)

Aucune contrainte n'est considérée dans ce problème.

Cette fonction constitue un test sévère pour les méthodes d'optimisation. De plus, elle permet d'illustrer facilement dans un espace de dimension 2, les principes des algorithmes mis au point, pour un nombre de dimensions k quelconque.

4.2. Stratégie de glissement de plans

Un exemple d'utilisation de la stratégie d'optimisation par glissements de plans est donné ci-dessous, par la figure 10.

A chaque itération, le même type de plan est utilisé : il s'agit d'un plan de Doehlert D-1 [GOU 99]. Dans le cas de 2 facteurs uniquement, le placement des expériences du plan dans le domaine d'étude est celui d'un hexagone : les 6 sommets et le centre définissent géométriquement les 7 (points d')expériences du plan.

Chaque plan permet de calculer localement un modèle polynomial du second degré :

$$y = b_0 + b_1.x_1 + b_2.x_2 + b_{11}.x_1^2 + b_{22}.x_2^2 + b_{12}.x_1.x_2.$$

La figure 6 illustre de façon implicite la possibilité de récupérer des expériences déjà réalisées pour le calcul de nouveaux plans. Ainsi par exemple, le plan n°2 réutilise 4 expériences du plan n°1 : lors de l'itération n°3, seules 3 expériences supplémentaires doivent être calculées. Ce phénomène se reproduit à chaque étape.

La progression des plans au cours de l'algorithme est déduite de l'étude des modèles polynomiaux obtenus à chaque itération. Certaines lignes de niveaux de ces modèles sont visibles sur la figure ci-dessous.

L'étude des modèles permet de déduire facilement des directions de meilleures valeurs, au sens de l'optimalité choisie (recherche du maximum ici).

Lorsque aucune amélioration de la réponse ne peut plus être trouvée, une technique de recouplement de chemins optimaux est appliquée afin de préciser les coordonnées du point optimum ainsi trouvé [VIV 02]. Dans l'exemple courant, le plan n°6 est celui qui donne la meilleure valeur de la réponse. Pour préciser la position du point optimal, un septième plan est calculé au plus proche de ce point. Celui-ci est alors redéfini par confrontation des modèles de ces 2 derniers plans.

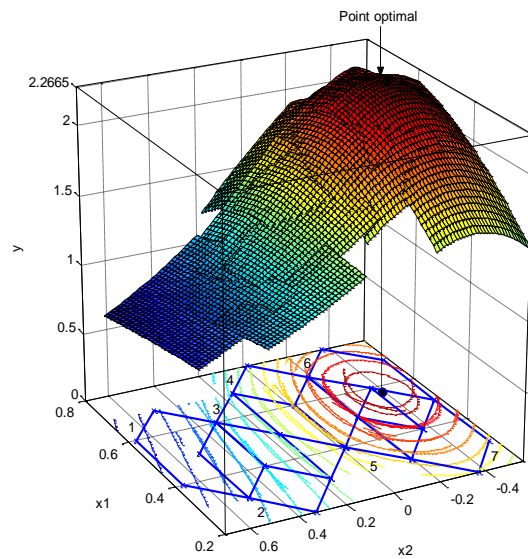


Figure 10. Stratégie de glissements de plans – utilisation de modèles du 2nd ordre

4.3. Stratégie de resserrements de plans (zooms)

La méthode d'optimisation par zooms illustrée ici utilise à chaque itération des modèles du second ordre. Les plans d'expériences employés doivent donc avoir au minimum 3 niveaux par facteur. Dans le cas présent, le choix s'est porté sur des plans factoriels multi-niveaux (également appelés plans grilles).

A la première itération, un tel plan est calculé sur l'ensemble du domaine d'étude. Le modèle polynomial déduit alors, décrit une surface parabolôïde dont le point stable est un maximum situé à l'intérieur du domaine.

Le plan d'expériences calculé à la deuxième itération est alors centré sur ce point, sur une zone plus petite et orientée selon les axes principaux du modèle de l'itération précédente.

Les mêmes opérations sont appliquées aux itérations suivantes. La diminution de la taille des domaines considérés successivement permet d'obtenir in fine une grande précision sur la position du point optimal.

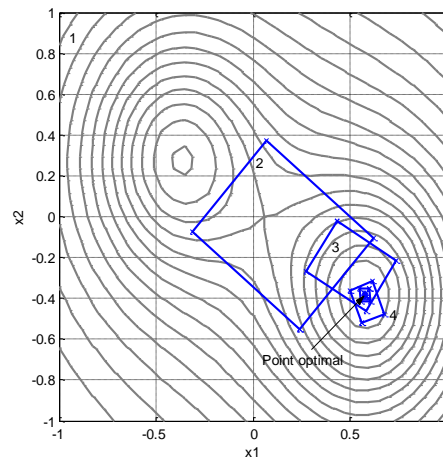


Figure 11. Stratégie de resserrements de plans – utilisation de modèles du 2nd ordre

4.4. Stratégie exhaustive

La figure 12 donne une illustration du résultat final en utilisant une stratégie exhaustive.

En premier lieu, la fonction objectif est modélisée par morceaux : le domaine d'étude est scindé en sous-domaines qui peuvent être eux-mêmes décomposés en espaces plus petits. Ces découpages sont réalisés suivant les variations de la réponse : c'est ainsi que la taille des sous-domaines est plus petite lorsque le gradient de la réponse est le plus grand. Dans chaque sous-domaine, des modèles du second ordre sont utilisés. Ils permettent de prendre en compte de façon satisfaisante les différentes courbures de la réponse étudiée.

Dans la figure 12, les différents sous-domaines sont représentés sous la surface.

Dans un deuxième temps, la modélisation globale ainsi construite peut être utilisée pour déduire les caractéristiques des conditions optimales.

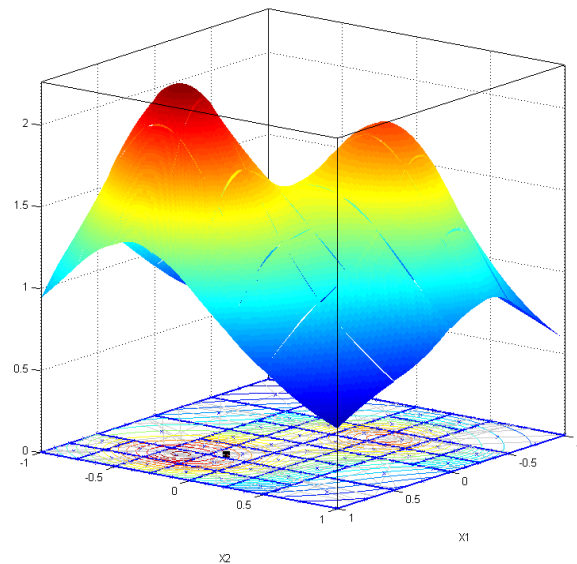


Figure 12. Stratégie exhaustive – utilisation de modèles du 2nd ordre

4.5. Comparaison des techniques d'optimisation

Les trois différentes stratégies présentées se distinguent par leur fonctionnement et appellent donc à des usages choisis et distincts.

La procédure de glissements de plans s'avère de manière générale économique (et donc rapide), que cela soit en raison du faible coût de chaque plan réalisé ou bien des récupérations importantes d'expériences entre plans successifs. Employée seule, cette stratégie est par nature imprécise. Son emploi peut donc être avantageusement couplé avec celui d'une méthode de type Plus Grande Pente. Dans tous les cas, la portée de l'optimum trouvé est locale.

La diminution progressive de la taille des plans permet d'augmenter les chances de trouver l'optimum global au sein du DE, sans toutefois l'assurer complètement. La modélisation du DE réalisée au cours de l'optimisation est meilleure que dans le cadre de la stratégie précédente, car elle couvre l'ensemble du domaine. Cependant, le placement irrégulier des plans successivement calculés peut se révéler difficile à gérer dans certains cas. Enfin, on notera que les opérations particulières de zooms permettent de déterminer avec précision les caractéristiques du point optimal.

Les stratégies dites « exhaustives » augmentent une fois de plus la probabilité de

trouver l'optimum global au sein du DEP, en le découpant de manière systématique en sous-domaines. Ces divisions sont déduites des variations constatées de la fonction réponse, qui est alors modélisée par morceaux. Bien que coûteuse, cette stratégie possède de nombreux atouts. Elle permet notamment de construire des modélisations précises, de manière progressive : à partir d'une configuration initiale, l'utilisateur peut envisager de rajouter des facteurs ou des expériences afin de compléter la connaissance du phénomène étudié.

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques constatées pour chacune des 3 stratégies d'optimisation précédemment décrites.

Groupe	Type optimum	Modélisation (étendue)	Précision	Récupération de points	Coût total
Glissements de plans	Local	Partielle	Faible	Moyenne	Faible
Zooms successifs	Local	Partielle	Forte	Faible	Moyen
Modélisation Globale	Global	Globale	Moyenne	Forte	Important

Tableau 3. *Evaluation des caractéristiques moyennes des 3 stratégies d'optimisation par plans d'expériences*

5. Conclusion

Une présentation des caractéristiques des principales stratégies d'optimisation qui mettent en œuvre la technique des plans d'expériences a été détaillée et illustrée sur un exemple simple qui permet leur compréhension. Elles ont été appliquées avec succès à des dispositifs électrotechniques.

A la différence notamment des algorithmes d'optimisation déterministes ou stochastiques, les simulations demandées sont réalisées en vue de la construction d'un modèle et non pas directement pour la recherche des conditions optimales.

Par nature, la méthode des plans d'expériences n'est pas une technique d'optimisation, mais plutôt une méthodologie complète pour l'étude et la maîtrise de phénomènes physiques complexes. Cette maîtrise des paramètres qui contrôle le phénomène physique, conduit naturellement à la recherche d'optima.

En pratique, la MPE permet la construction de modèles algébriques simples ayant des propriétés statistiques attractives en terme de coût d'obtention et de précision.

Les propriétés algébriques des plans d'expériences permettent d'implémenter facilement dans un logiciel dédié différentes stratégies d'optimisation, ce que nous avons fait dans SOPHEMIS [VIV 02].

Leurs intérêts principaux restent ceux des plans d'expériences : coût réduit, précision optimale et production en permanence de modèles directement exploitables.

6. Bibliographie

- [BOX 87] BOX G. E. P., DRAPER N. R., "Empirical model-building and response surfaces", Editions John Wiley & Sons, 1987.
- [BRI 01] BRISSET S., GILLON F., VIVIER S., BROCHET P., "Optimization with experimental design: an approach using Taguchi's methodology and finite element simulations", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.37, N°5, pp.3530-3533, September 2001.
- [CAL 01] CALDORA COSTA M., GIURGEA S., COULOMB J.L., MARÉCHAL Y., "Application of Experimental Design Method in the Screening of Electromagnetic Devices Parameters", Compumag 2001, Evian, June 2001, Vol. 3, pp.126-127.
- [DRO 97] DROESBEKE J. J., FINE J., SAPORTA G., "Plans d'expériences – Applications à l'entreprise", Editions Technip, 1997.
- [DYC 99] D. DYCK, D.A. LOWTHER, Z. MALIK, R. SPENCE, J. NELDER, 'Response Surface Models of Electromagnetic Devices and their Application to Design', IEEE Transactions on magnetics, Vol. 35 N°3, May 1999
- [GAR 95] GARCIA-DIAZ A., PHILIPS D.T., "Principles of experimental design and analysis", Chapman & Hall, 1995.
- [GIL 98] GILLON F., BROCHET P., "Shape Optimization of a Permanent Magnet Motor using the Experimental Design Method", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.35, N°3, pp.1278-1281, May 1999.
- [GIL 00] GILLON F., BROCHET P., "Screening and response surface method applied to the numerical optimization of electromagnetic devices", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.36, N°4, pp.1163-1167, July 2000.
- [GIL 04] EL-AMRAOUI L., GILLON F., VIVIER S., BROCHET P. AND BENREJEB M., 'Robust Electromagnetic Optimization of Linear Tubular Actuators', IEEE Trans. Magn., vol. 40, no. 2, pp.1192-1195, 2004, March 2004.
- [GOU 96] GOUPY J., "La méthode des plans d'expériences – Optimisation du choix des essais & de l'interprétation des résultats", Editions Dunod, 1996.
- [GOU 99] GOUPY J., "Plans d'expériences pour surfaces de réponse", Editions Dunod, 1999.
- [HEC 99] HECQUET M., BROCHET P., DELSALLE P., "A linear eddy current braking system defined by finite element method", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.35, N°3, pp.1842-1844, May 99.
- [HEC 02] HECQUET M., VIVIER S., BROCHET P. 'A study of a 3D linear brake design using the Experimental Design Method', Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, IOS Press, Vol. 22, pp. 419-424 - 2002
- [HEC1 02] Hecquet M., Vivier S., Brochet P., "Experimental Design Method applied to the optimisation of a Linear Eddy Current Brake", MAGLEV 2002, September 2002.
- [INR 96] INRETS-96, "Frein linéaire à courants de Foucault : Rapport d'essais d'un prototype de frein", 1996-1997, Rapport interne Alstom-Ornans.
- [PIL 94] PILLET M., "Introduction aux plans d'expériences par la méthode Taguchi", Editions Les Editions d'Organisation Université, 1994.

- [RON 97] R.RONG, D.A. LOWTHER, Z. MALIK, H. SU, J. NELDER, R. SPENCE, 'Applying Response Surface Methodology in the Design and Optimization of Electromagnetic Devices', IEEE Transactions on magnetics, Vol. 33 N°2, March 1997
- [STO 74] STOLL R. L., "The analysis of eddy currents", Clarendon press – Oxford, Monographs in electrical and electronic engineering, 1974.
- [TSU 00] T. TSUNODA, Y. ISHIHARA, T. TODAKA, K. HIRATA, 'Geometry optimization of a DC motor by Taguchi method', ISEF 2001, pp. 489-492
- [VIV 01] VIVIER S., GILLON F., BROCHET P., "Optimization techniques derived from experimental design method and their application to the design of a brushless direct current motor", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.37, N°5, pp.3622-3626, September 2001.
- [VIV 02] VIVIER S., "Stratégies d'optimisation par la méthode des plans d'expériences et Application aux dispositifs électrotechniques modélisés par éléments finis", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille & Université des Sciences et Technologies de Lille, Juillet 2002.
- [VIV2 02] VIVIER S., HECQUET M., BROCHET P., "Design of a Linear Eddy Current Brake, 3D Modeling and Optimization", CEFC 2002, June 2002, p.50.
- [VIV 04] VIVIER S., HECQUET M., AIT-HAMMOUDA A., BROCHET P., 'Experimental Design Method applied to a multiphysical model : Trellis designs for a multidimensional screening study, OIPE'2004, Proceedings p7-8, 6-8 Sept. 2004, Grenoble, France.
- [WIA 73] WIART A., MACHEFERT-TASSIN Y., "Les Freins Linéaires à Courants de Foucault sur Rail", RGE 1973, Tome 82, N°5, Mai 73, pp.356-359.
- [WU 93] WU C.F.J., "Construction of supersaturated design through partially aliased interactions", Biometrika, 80, pp 661-669, 1993.
- [ZAO 00] F. ZAOUI, C. MARCHAND, A. RAZEK, 'Une méthode de plans d'expériences pour la conception d'un système électromagnétique', Revue Internationale de Génie Electrique, Vol. 3 N°4, 2000, pp. 529-539