



**HAL**  
open science

# Hypothèse de Riemann, Séries de Dirichlet et opérateurs associés.

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. Hypothèse de Riemann, Séries de Dirichlet et opérateurs associés.. 2024. hal-01731220v2

**HAL Id: hal-01731220**

**<https://hal.science/hal-01731220v2>**

Preprint submitted on 2 Jul 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HYPOTHÈSE DE RIEMANN, SÉRIES DE DIRICHLET ET OPÉRATEURS ASSOCIÉS.

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. Dans cet article, on introduit la notion de série Dirichlet associée aux zéros d'une fonction analytique. En utilisant les critères de majoration du nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité, on démontre que la fonction zêta est de type fini.

Ensuite, on définit la notion de transformée de Riemann qui permet de décrire les images comme une série de Dirichlet sur le demi plan  $\text{Re}(z) > 1$ . La notion de noyau de Mellin se construit à partir de la  $\zeta$ -intégration, ce procédé donne une description des extensions analytiques successives de la fonction  $\zeta$ .

## 1. INTRODUCTION

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}, \quad \text{Re}(z) > 1 \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nombres premiers. Cette fonction admet un prolongement analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , noté encore  $\zeta$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \quad (1.2)$$

pour  $z \neq 0$  et  $z \neq 1$ , où  $\Gamma$  est la fonction gamma définie sur  $\text{Re}(z) > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

qui peut être prolongée analytiquement par une fonction méromorphe de pôles  $\mathbb{N}^- = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0\}$ , vérifiant la relation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-.$$

Les zéros de la fonction  $\zeta$  sont formés des zéros triviaux simples

$$z_k = -2k \text{ pour } k > 0,$$

et des zéros non triviaux situés dans la zone critique  $0 < \text{Re}(z) < 1$ . L'hypothèse de Riemann se conjecture comme suit.

**Conjecture 1.** *Les zéros non triviaux de  $\zeta$  vérifient  $\text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ .*

On propose une approche personnelle de cette conjecture. Les outils présentés s'orientent autour de cette conjecture, même si certains résultats semblent s'en éloigner.

---

*Date:* 13/03/2018 .

*Key words and phrases.* Opérateur autoadjoint, mesure spectrale, trace d'un opérateur, mesure complexe, série de Dirichlet, noyau de Mellin, noyau de Riemann.

2. LES ZÉROS NON TRIVIAUX DE  $\zeta$ 

On note  $\mathcal{Z}(\zeta)$ , l'ensemble des zéros non triviaux de  $\zeta$ . On a

$$\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)} \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (2.1)$$

par l'unicité de l'extension analytique pour  $z \neq 1$ , si  $\rho$  est un zéro non trivial alors  $1 - \rho$  est un zéro non trivial par 1.2 et par 2.1, si  $\rho$  est un zéro non trivial alors  $\bar{\rho}$  est un zéro non trivial.

**Lemma 1.** *L'ensemble  $\mathcal{Z}(\zeta)$  est symétrique par rapport aux droites  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = 0$  avec*

$$\operatorname{card} \mathcal{Z}(\zeta) = \aleph_0.$$

La fonction de Stieltjes, notée  $\kappa$ , est définie par sa série entière

$$\kappa(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!} z^n,$$

où  $\gamma_n$  sont les nombres de Stieltjes

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{\log(k)^n}{k} - \frac{\log(m)^{n+1}}{n+1} \right),$$

en particulier,  $\gamma_0$  est la constante d'Euler-Mascheroni, on pose

$$\phi(z) = 1 + z\kappa(z), \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

et  $Z(\phi)$  l'ensemble des zéros de  $\phi$ .

**Lemma 2.**  *$\rho \in Z(\phi)$  si et seulement si  $\rho + 1 \in Z(\zeta)$  où  $Z(\zeta)$  est formé de l'ensemble des zéros de  $\zeta$ .*

*Proof.* On écrit le développement en série de Laurent au point 1 de la fonction  $\zeta$ , on en déduit que

$$(z-1)\zeta(z) = \phi(z-1), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad (2.3)$$

et on conclut.  $\square$

3. ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES SUR  $W \times ]0, +\infty[$  ET SÉRIES DE DIRICHLET ASSOCIÉES.

Soit  $\varsigma$  une fonction analytique sur  $W \times ]0, +\infty[$ ,  $[a, b] \subset W$  où  $W$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . On fait l'hypothèse que l'ensemble des zéros de  $\varsigma$ , noté  $\mathcal{Z}(\varsigma)$ , est de cardinal infini et contenu dans  $[a, b] \times ]0, +\infty[$ .

**Definition 1.** *Un niveau de  $\mathcal{Z}(\varsigma)$  est une valeur de  $t$  pour laquelle*

$$\mathcal{Z}(\varsigma) \cap \{y = t\} \neq \emptyset.$$

**Proposition 1.** *L'ensemble des niveaux  $\mathcal{N}$  est un ensemble discret non borné de  $]0, +\infty[$  et l'ensemble  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{Z}(\varsigma) \cap \{y = t\}$  est un ensemble de cardinal fini  $N(t)$  pour tout  $t \in \mathcal{N}$ .*

*Proof.* Supposons que  $\mathcal{N}$  ne soit pas discret, il existe  $t \in \mathcal{N}$  tel que pour tout voisinage ouvert  $V$  contenant  $t$  on puisse trouver un élément  $s \in (\mathcal{N} \setminus \{t\}) \cap V$ . Soit  $\{t_n\}$  une suite de  $\mathcal{N}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t,$$

il existe une suite  $\{x_n\} \in [a, b]$  telle que  $\rho_n = x_n + it_n \in \mathcal{Z}(\zeta)$ . Soit  $\{x_{\varphi(n)}\}$  une sous-suite de  $\{x_n\}$  qui converge vers  $x$  dans  $[a, b]$ , notons  $x \in [a, b]$  sa limite. La suite  $\rho_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + it_{\varphi(n)}$  converge vers  $\rho = x + it$  et

$$\zeta(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(\rho_{\varphi(n)}) = 0,$$

$\rho$  est un zéro de  $\zeta$  qui est non isolé ce qui est en contradiction avec la nature analytique de  $\zeta$  et donc, l'ensemble des niveaux est discret. Cet ensemble est non borné, sinon il existe une suite  $\{t_n\} \subset \mathcal{N}$  convergente vers  $t$ , par un argument similaire au précédent, on construit un zéro non isolé de  $\zeta$ .

Le cardinal de  $\mathcal{N}(t)$  est fini, dans l'hypothèse contraire on se donne une suite  $\{x_n\}$  appartenant à  $[a, b]$  qui converge vers  $x$ , telle que  $\rho_n = x_n + it$  soit un zéro de  $\zeta$ . La limite  $\rho = x + it$  est un zéro de  $\zeta$  dans  $[a, b] \times ]0, +\infty[$  qui est un zéro non isolé de  $\zeta$ , ce qui est impossible.  $\square$

**Remark 1.** Dans ce qui suit, on écrit  $\mathcal{N} = \{t_n : n \geq 1\}$  avec  $t_n < t_{n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ .

**Definition 2.** La série de Dirichlet associée aux zéros de  $\zeta$  est

$$\mathcal{Z}_\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} N_n e^{-zt_n},$$

$N_n$  est le nombre de zéros de  $\zeta$ , de partie imaginaire  $t_n$ , comptés avec leur ordre de multiplicité.

**Theorem 1.** L'abscisse de convergence simple  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta}$  est

$$\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sum_1^n N_k)}{t_n} \quad (3.1)$$

et pour  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > \sigma_{\mathcal{Z}_\zeta}$ , on a

$$\mathcal{Z}_\zeta(z) = z \int_0^{+\infty} \mathbf{N}(t) e^{-zt} dt \text{ avec } \mathbf{N}(t) = \sum_{t_n \leq t} N_n.$$

*Proof.* On remarque que

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sum_{k=1}^n N_k)}{t_n} \geq 0,$$

car  $\frac{\log(\sum_1^n N_k)}{t_n} \geq 0, \forall n \geq 1$ . La théorie des séries de Dirichlet permet d'affirmer que si  $L > 0$  alors  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = L$  et si  $L = 0$  alors 0 est un point singulier de  $\mathcal{Z}_\zeta$  par le théorème de Landau, donc  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = 0$ . Dans tous les cas

$$\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sum_{k=1}^n N_k)}{t_n}.$$

Le reste de l'énoncé est une conséquence directe de la théorie des séries de Dirichlet.  $\square$

**Remark 2.**  $\mathbf{N}(t)$  représente le nombre de zéros non triviaux de  $\zeta$  de partie imaginaire dans  $]0, t]$ , comptés avec leur ordre de multiplicité.

**Definition 3.** La fonction analytique  $\zeta$  est de type fini si  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} < +\infty$ .

**Theorem 2.** La fonction de Riemann  $\zeta$  est de type fini avec  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = 0$ .

*Proof.* En utilisant le théorème de Riemann-Von Mangoldt,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{t}{2\pi} \log\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \mathcal{O}(\log(t)),$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sum_{k=1}^n N_k)}{t_n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathbf{N}(t_n))}{t_n} \leq 0,$$

le théorème de Landau implique  $\sigma_{\mathcal{Z}_\zeta} = 0$ .  $\square$

On définit, pour une fonction analytique  $\zeta$  sur  $W \times ]0, +\infty[$  où  $]a, b[ \subset W$ , la série de Dirichlet sectionnelle en  $x$ ,  $a < x < b$ , par

$$\mathcal{Z}_{\zeta, x}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} N_{n,x} e^{-zt_n}$$

où  $N_{n,x}$  est le nombre de zéros de  $\zeta$ , comptés avec leur ordre de multiplicité, vérifiant

$$x < \operatorname{Re}(z) < b \text{ et } \operatorname{Im}(z) = t_n.$$

**Remark 3.** *L'hypothèse de Riemann se reformule de la façon suivante,  $\mathcal{Z}_{\zeta, x} = 0$  si et seulement si  $x > \frac{1}{2}$ .*

**Notation 1.** *Dans ce qui suit, on note*

$$\mathcal{M} = \{x \in ]a, b[ : \exists t, x + it \in \mathcal{Z}(\zeta)\}. \quad (3.2)$$

**Theorem 3.** *Si  $x \in \mathcal{M}$  et  $\sup\{\mathbf{N}_x(n) : n \geq 1\} = +\infty$ , où  $\mathbf{N}_x(n)$  est le nombre de zéros de partie réelle strictement supérieure à  $x$  et de partie imaginaire  $\leq t_n$ , comptés avec leur ordre de multiplicité, alors l'abscisse de convergence simple  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta, x}}$  est*

$$\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta, x}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathbf{N}_x(n))}{t_n},$$

sous l'hypothèse  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta, x}} < +\infty$ , pour  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > \sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta, x}}$ , on a

$$\mathcal{Z}_{\zeta, x}(z) = z \int_0^{+\infty} \mathbf{N}_x(t) e^{-zt} dt, \quad \mathbf{N}_x(t) = \sum_{t_n \leq t} N_{n,x},$$

et 0 est un point singulier de  $\mathcal{Z}_{\zeta, x}$ . Si  $\sup\{\mathbf{N}_x(n) : n \geq 1\} < +\infty$  alors  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta, x}} = -\infty$  et

$$\mathcal{Z}_{\zeta, x}(z) = \sum_{n=1}^N N_{n,x} e^{-zt_n}$$

pour  $N$  suffisamment grand.

*Proof.* On pose

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathbf{N}_x(n))}{t_n}, \quad \mathbf{N}_x(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} N_{k,x}$$

si  $\sup \mathbf{N}_x(n) < +\infty$  alors

$$\mathcal{Z}_{\zeta, x}(z) = \sum_{n=1}^N N_{n,x} e^{-zt_n}$$

pour  $N$  suffisamment grand et

$$\mathcal{Z}_{\zeta, x}(z) = \sum_{n=1}^N N_{n,x} e^{-zt_n}$$

a une abscisse de convergence  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = -\infty$ . Si  $\sup \mathbf{N}_x(n) = +\infty$  alors  $L \in [0, +\infty]$ , pour  $L \in ]0, +\infty]$  on a  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = L$ . Pour  $L = 0$ ,  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = 0$  car 0 est un point singulier de  $\mathcal{Z}_{\zeta,x}$  par le théorème de Landau et l'égalité  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta}} = L = 0$  est encore vraie. L'équation, pour  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} < +\infty$

$$\mathcal{Z}_{\zeta,x}(z) = z \int_0^{+\infty} \mathbf{N}_x(t) e^{-zt} dt, \quad \mathbf{N}_x(t) = \sum_{t_n \leq t} N_{n,x}$$

avec  $\operatorname{Re}(z) > \sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta}}$ , est une conséquence de la théorie des séries de Dirichlet.  $\square$

**Remark 4.** La fonction  $\mathbf{N}_x(t)$  est le nombre de zéros de  $\zeta$ , comptés avec leur ordre de multiplicité, de partie réelle strictement supérieure à  $x$  et de partie imaginaire  $0 < t_n \leq t$ . Dans notre situation  $\mathbf{N}_x(t) = \mathbf{N}_x(t_n)$  où  $n$  est le plus grand entier  $k$  pour lequel  $0 < t_k \leq t$ .

**Definition 4.** La fonction analytique  $\zeta$  est partiellement de type fini pour  $x \in \mathcal{M}$  si  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} < +\infty$ .

**Theorem 4.** Pour tout  $x \geq \frac{1}{2}$ , la fonction de Riemann  $\zeta$  est partiellement de type fini avec pour valeur d'abscisse de convergence  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = 0$ .

*Proof.* Pour  $x \geq \frac{1}{2}$ , en utilisant par exemple la majoration de Selberg [5]

$$\mathbf{N}_x(t) = \mathcal{O}\left(t^{1-\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})} \log(t)\right),$$

et

$$\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathbf{N}_x(t_n))}{t_n} \leq 0,$$

le théorème de Landau permet d'affirmer que  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}} = 0$ .  $\square$

**Remark 5.** Si on veut améliorer l'abscisse de convergence  $\sigma_{\mathcal{Z}_{\zeta,x}}$ , on peut en fonction de la localisation de  $x$  utiliser les majorations développées dans [2], [3], [4] et [7].

**Problem 1.**  $\mathbf{N}(t) \geq \mathbf{N}_x(t)$  et si on note

$$\tilde{\mathbf{N}}(t) = \operatorname{card} \left\{ z \in \mathcal{Z}(\zeta) : \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ et } 0 < \operatorname{Im}(z) < t \right\},$$

on a  $\tilde{\mathbf{N}}(t) \geq Ct \log(t) \geq C\mathbf{N}(t)$  avec

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\mathbf{N}}(t)}{\mathbf{N}(t)} \geq 0.4077 [1].$$

A-t-on,  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\mathbf{N}}(t)}{\mathbf{N}(t)} = 1$  ?

L'ordre lexicographique sur les zéros de  $\zeta$  est défini par, si  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $\mathcal{Z}(\zeta)$  alors  $\alpha \preccurlyeq \beta$  si et seulement si  $\operatorname{Im}(\alpha) < \operatorname{Im}(\beta)$  et si  $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\beta)$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) \leq \operatorname{Re}(\beta)$ . On définit la suite  $\{\rho_n\} = \mathcal{Z}(\zeta)$  avec  $\rho_n \preccurlyeq \rho_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant l'ordre lexicographique on a pour la fonction de Riemann  $\zeta$

$$t_n \approx \frac{2\pi n}{\log(n)}, \quad (3.3)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n)}{t_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log^2(n)}{2\pi n} = 0,$$

la série de Dirichlet

$$\mathbf{Z}_\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-t_n z},$$

où  $\alpha_n$  est l'ordre de multiplicité du zéro  $\frac{1}{2} + it_n$ , a une abscisse de convergence nulle. La série de Dirichlet associée aux zéros de la fonction  $\zeta$ ,  $\mathbf{Z}_\zeta$  a une abscisse de convergence nulle, l'hypothèse de Riemann s'énonce sous la forme  $\mathbf{Z}_\zeta = \mathbf{Z}_\zeta$ .

#### 4. LA TRANSFORMÉE DE RIEMANN ET SON NOYAU

On note

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \zeta(x + iy) f(y) \in L^1(\mathbb{R}, dy)\},$$

et  $\tilde{f}$  l'application définie par

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x + iy) f(y) dy, \forall x \in \mathcal{D}.$$

**Definition 5.** L'application  $L_\zeta$  définie sur l'ensemble des fonctions mesurables par

$$L_\zeta(f) = \tilde{f}$$

est la transformée de Riemann et l'application

$$(x, y) \rightarrow K(x, y) = \zeta(x + iy)$$

est le noyau de Riemann.

**Lemma 3.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$  alors pour  $x > 1$ ,

$$L_\zeta(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\log(n))}{n^x} \quad (4.1)$$

où  $\widehat{f}$  est la transformée de Fourier de  $f$ .

*Proof.* Pour  $x > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{f(y)}{n^{x+iy}} = f(y) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{x+iy}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(y) \zeta(x + iy)$$

et

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{f(y)}{n^{x+iy}} \right| \leq |f(y)| \zeta(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, dy),$$

le théorème de convergence dominée implique pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x + iy) f(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(y)}{n^{x+iy}} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{n^{x+iy}} dy \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i \log(n)y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\log(n))}{n^x}. \end{aligned}$$

□

Par exemple, si  $\widehat{f}(x) = -x$ , le terme de droite de l'équation 4.1 est la valeur de la fonction dérivée de  $\zeta$  en  $z = x$  pour  $x > 1$

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^x},$$

cette fonction ne vérifie pas les hypothèses du lemme, on se ramène aux hypothèses du lemme si on prend  $\widehat{f}_t(x) = -x \mathbf{1}_{[0,t]}(x)$ . Pour  $f_t$ , on a

$$f_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_t(u) e^{iux} du = 1 - e^{itx}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x+iy) (1 - e^{ity}) dy = - \sum_{\log(n) \leq t} \frac{\log(n)}{n^x}, \forall t > 0$$

par passage à la limite,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x+iy) (1 - e^{ity}) dy = \zeta'(x), \forall x > 1.$$

**Definition 6.** La série de Dirichlet associée à  $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$  est

$$f_\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\log(n))}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(\log(n)) e^{-z \log(n)}.$$

**Theorem 5.** L'abscisse de convergence  $\sigma_f$  de  $f_\zeta$  vérifie l'inégalité  $\sigma_f \leq 1$ . Si  $\sigma_f < 0$  alors

$$\sigma_f = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \widehat{f}(\log(k)) \right| \right)}{\log(n)} \quad (4.2)$$

et

$$f_\zeta(z) = z \int_1^{+\infty} \frac{\sum_{n \leq x} \widehat{f}(\log(n))}{x^{1+z}} dx. \quad (4.3)$$

*Proof.* On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \widehat{f}(\log(k)) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i \log(k)u} du \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{iu}} du \right| \\ &\leq n \|f\|_1 \end{aligned}$$

et

$$\sigma_f = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \left| \sum_{k=1}^n \widehat{f}(\log(k)) \right| \right)}{\log(n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n \|f\|_1)}{\log(n)} = 1.$$

Les équations 4.2 et 4.3 sont des conséquences de la théorie des séries de Dirichlet.  $\square$

Les fonctions d'Hermite-Gauss

$$\phi_k(t) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k!}} e^{-\pi t^2} H_k(2t\sqrt{\pi})$$

où  $H_n$  sont les polynômes de Hermite définis par

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  et sont des fonctions propres pour la transformation de Fourier définie par

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt,$$

on a

$$\widehat{\phi_k} = (-i)^k \phi_k.$$

On remarque que  $\phi_k \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ , on peut évaluer la transformée de Riemann sur cette base Hilbertienne, les valeurs propres de la transformée de Fourier sont  $\pm 1, \pm i$ . On a

$$L_\zeta(\phi_k)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widehat{\phi_k}(\log(n))}{n^x} = (-i)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi_k(\log(n))}{n^x}, \quad x > 1$$

et

$$\phi_{k,\zeta}(z) = (-i)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi_k(\log(n))}{n^z},$$

or

$$\begin{aligned} A_k(n) &= (-i)^k \sum_{m=1}^n \phi_k(\log(m)) \\ &= (-i)^k \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k!}} \sum_{m=1}^n e^{-\pi(\log(m))^2} H_k(2 \log(m) \sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_k(n) = (-i)^k \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k!}} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\pi(\log(m))^2} H_k(2 \log(m) \sqrt{\pi})$$

est une série converge de somme  $A_k$ . On a

$$L_k = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(|A_k(n)|)}{\log(n)} = 0,$$

donc l'abscisse de convergence  $\sigma_{\phi_{k,\zeta}}$  de  $\phi_{k,\zeta}$  vérifie  $\sigma_{\phi_{k,\zeta}} \leq 0$ . Pour  $z > \sigma_{\phi_{k,\zeta}}$ , on a

$$\phi_{k,\zeta}(z) = z \int_1^{+\infty} \frac{A_k(x)}{x^{1+z}} dx, \quad \text{avec } A_k(x) = (-i)^k \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k!}} \sum_{1 \leq m \leq x} e^{-\pi(\log(m))^2} H_k(2 \log(m) \sqrt{\pi}).$$

De plus, si  $\sigma_{\phi_{k,\zeta}} < 0$  alors

$$\sigma_{\phi_{k,\zeta}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k!}} \left| \sum_{m=n+1}^{+\infty} e^{-\pi(\log(m))^2} H_k(2 \log(m) \sqrt{\pi}) \right| \right)}{\log(n+1)}.$$

Toute fonction  $\phi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \cap L^1(\mathbb{R}, dx)$  s'écrit

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \phi_k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$$

et

$$\widehat{\phi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \widehat{\phi_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-i)^k \lambda_k \phi_k,$$

pour  $\operatorname{Re}(z) > 1$

$$L_\zeta(\phi)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k \lambda_k \phi_k(\log(n))}{n^z}.$$

Calculons l'abscisse de convergence de  $L_\zeta(\phi)$ . Si

$$A_\phi(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-i)^k \lambda_k \phi_k(\log(m)),$$

soit

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(|\sum_{m=1}^n A_\phi(m)|)}{\log(n)}$$

alors si  $L \in ]0, +\infty]$ , l'abscisse de convergence est  $\sigma_{L_\zeta(\phi)} = L$  et si  $L \leq 0$  alors  $\sigma_{L_\zeta(\phi)} \leq 0$  avec pour  $\sigma_{L_\zeta(\phi)} < 0$ ,

$$\sigma_{L_\zeta(\phi)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(|\sum_{m=n+1}^{+\infty} A_\phi(m)|\right)}{\log(n+1)}.$$

**Remark 6.** *L'intérêt de la transformée de Riemann  $L_\zeta$  est lié au fait que sous certaines hypothèses sur  $f$ , la fonction  $L_\zeta(f)$  est représentable, pour  $x > 1$ , par une série de Dirichlet. L'unicité de l'extension analytique de cette série, si elle existe, permet de décrire entièrement  $L_\zeta(f)(x)$  sur son domaine de convergence.*

Dans ce qui suit, on généralise la notion de noyau de Riemann et on cherche les conditions pour que l'opérateur, défini à partir de ce noyau, devienne un opérateur hermitien de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ , on peut consulter [6]. Soit  $\phi$  une application

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow \phi(z)$$

le noyau de Riemann associé à  $\phi$  est un endomorphisme  $L_\phi$  de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, dx)$

$$L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), L_\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+iy) f(y) dy,$$

de domaine  $\operatorname{dom}(L_\phi)$  défini par

$$\operatorname{dom}(L_\phi) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, dx) : L_\phi(f) \in L^2(\mathbb{R}, dx)\}.$$

**Lemma 4.** *Si  $\operatorname{dom}(L_\phi)$  est dense, l'opérateur autoadjoint est  $L_\phi^* = L_{\overline{\phi \circ \theta}}$  où  $\theta$  est l'application*

$$\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \theta(z) = \overline{iz},$$

de domaine  $\operatorname{dom}(L_\phi^*)$  défini par

$$\operatorname{dom}(L_\phi^*) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \mid \exists \kappa \in L^2(\mathbb{R}, dx) : \forall \psi \in \operatorname{dom}(L_\phi), \langle L_\phi(\psi) \mid \varphi \rangle = \langle \psi \mid \kappa \rangle\}.$$

On a le résultat suivant.

**Lemma 5.** *Si les applications  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient*

$$\alpha : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x+iy)| dy \leq M_1 \text{ p.p} \quad (4.4)$$

et

$$\beta : y \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x+iy)| dx \leq M_2 \text{ p.p} \quad (4.5)$$

alors l'application  $L_\phi$  est un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  pour lequel  $\|L_\phi\| \leq \sqrt{M_1 M_2}$ .

**Theorem 6.** *Si  $\phi$  vérifie les inégalités 4.4, 4.5 et l'équation  $\bar{\phi} \circ \theta = \phi$  alors  $L_\phi$  est un opérateur hermitien.*

On s'intéresse à un cas particulier de noyau de Riemann, ce sont les noyaux de Riemann associé à des séries de Dirichlet

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

qui vérifient

$$L_\phi(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+iy) f(y) dy$$

est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  pour un ensemble de fonctions  $f$  dense dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . Sous l'hypothèse de permutation des symboles  $\sum$  et  $\int$  on a

$$L_\phi(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \widehat{f}(\lambda_n) e^{-x\lambda_n}, \quad x > \sigma_\phi,$$

cette représentation permet de définir la notion de transformation de Dirichlet.

**Definition 7.** *La transformation de Dirichlet associée à une application  $\phi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$  est définie par*

$$T_\phi : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \rightarrow T_\phi f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \widehat{\phi}(\lambda_n) e^{-\lambda_n z}.$$

**Theorem 7.** *On a si  $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$*

$$T_\phi \circ T_\psi = T_{\phi * \psi},$$

et si

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| : n \in \mathbb{N}^* \right\} < +\infty \quad (4.6)$$

alors  $\sigma_{T_\phi f} \leq 0$ . Sous l'hypothèse  $\sigma_{T_\phi f} < 0$ ,

$$\sigma_{T_\phi f} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \widehat{\phi}(\lambda_k) \right| \right)}{\lambda_{n+1}}.$$

*Proof.* Si l'inégalité 4.6 est réalisée, on peut appliquer le critère de convergence d'Abel à la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \widehat{\phi}(\lambda_k),$$

le lemme de Riemann-Lebesgue donne la deuxième condition

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{\phi}(\lambda_k) = 0$$

pour réaliser la convergence de la série. Le reste de l'énoncé résulte de la transformée de Fourier d'un produit de convolution et de la théorie des séries de Dirichlet.  $\square$

**Proposition 2.** *Sous l'hypothèse de permutation des symboles  $\sum$  et  $\int$ ,*

$$T_\phi(\psi)(x) = L_\psi(\phi)(x), \quad x > \sigma_\phi.$$

**Remark 7.** *L'opérateur de Dirichlet  $T$  est un opérateur*

$$T : L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow \text{End}(\mathcal{D}),$$

où  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des séries de Dirichlet, qui envoie un produit de convolution de deux fonctions de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, dx)$  sur une composition d'endomorphismes de l'espace des séries de Dirichlet.

### 5. LES $\zeta$ -INTÉGRALES ET LE NOYAU DE MELLIN

Pour  $f \in L^2([0, 1]) \cap L^1([0, 1])$  on note  $\mathbf{f}$  le prolongement périodique de  $f|_{[0, 1[}$ .

**Definition 8.** *La  $\zeta$ -intégrale associée à  $f$  est définie, quand elle existe, par*

$$\zeta_f(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^z} du$$

**Lemma 6.** *Pour  $f \in L^2([0, 1])$  alors  $\zeta_f(x)$  est définie pour  $x > 1$  et*

$$|\zeta_f(x)| \leq \|f\|_2 \zeta(x). \quad (5.1)$$

*Proof.* On a

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} du \right| &\leq \int_1^{+\infty} \frac{|\mathbf{f}(u)|}{u^x} du, \\ \int_1^{+\infty} \frac{|\mathbf{f}(u)|}{u^x} du &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\mathbf{f}(u)|}{u^x} du = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{|f(u)|}{(u+k)^x} du, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} du \right| &\leq \|f\|_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\int_0^1 \frac{du}{(u+k)^{2x}}} \\ &\leq \|f\|_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \|f\|_2 \zeta(x) \text{ pour } x > 1. \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.** *Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, 1[$  telle que*

$$F(0^+) = F(1^-) = \kappa$$

*alors*

$$\zeta_f(x) = \kappa + x\zeta_F(x+1) \text{ pour } x > 0. \quad (5.2)$$

*Proof.* Pour montrer l'équation 5.2, on intègre par parties comme suit, si  $\mathbf{F}$  est le prolongement périodique d'une primitive  $F$  de  $f|_{[0, 1[}$  vérifiant

$$F(0^+) = F(1^-) = -\kappa$$

alors pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} \zeta_f &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \left[ \frac{\mathbf{F}(u)}{u^x} \right]_{k^+}^{(k+1)^-} + x \int_k^{k+1} \frac{\mathbf{F}(u)}{u^{x+1}} dx \right), \\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{\mathbf{F}((k+1)^-)}{(k+1)^x} - \frac{\mathbf{F}(k^+)}{k^x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{F}(u)}{u^{x+1}} dx, \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{F(1^-)}{(k+1)^x} - \frac{F(0^+)}{k^x} \right) + x \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{F}(u)}{u^{x+1}} dx$$

$$\zeta_f(x) = \kappa + x\zeta_F(x+1)$$

$\zeta_F(x+1)$  est défini pour  $x > -1$ , ainsi  $\zeta_f(x)$  est défini pour  $x > -1$ .  $\square$

**Remark 8.** Si  $F(0^+) \neq F(1^-)$ , avec les notations précédentes, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(u)}{u^x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{F}(1^-)}{(k+1)^x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{F}(0^+)}{k^x} + x\zeta_F(x+1)$$

$$\zeta_f(x) = -F(1^+) + \zeta(x) \int_0^1 f(t) dt + x\zeta_F(x+1).$$

**Corollary 1.** Si  $f$  est de classe  $C^n$  et vérifie  $f^{(k)}(0^+) = f^{(k)}(1^-) = -\kappa_k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  alors

$$\zeta_{f^{(n)}}(x) = \sum_{k=1}^n \kappa_{n-k} \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{x}^n \zeta_f(x+n) \text{ où } \mathbf{x}^n = \prod_{p=0}^{n-1} (x+p) = \frac{\Gamma(x+n-1)}{\Gamma(x)}, \mathbf{x}^0 = 1.$$

**Lemma 8.** Si  $f$  est de classe  $C^n$  et vérifie  $f^{(k)}(0^+) = f^{(k)}(1^-)$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  alors  $\zeta_{f^{(n)}}$  a une extension sur  $]-n, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On en déduit le théorème suivant,

**Theorem 8.** Si  $f$  est une fonction périodique de période 1 et de classe  $C^n$

$$\zeta_f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-k-1)} + \frac{\zeta_{f^{(n)}}(z-n)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}, \forall z > 0$$

en particulier si  $f$  est de classe  $C^\infty$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta_{f^{(n)}}(z-n)}{(z-1)\cdots(z-n-1)} = 0$$

alors

$$\zeta_f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(z-1)\cdots(z-n-1)}, \forall z \notin \mathbb{N}^*.$$

*Proof.* Si  $f$  est une fonction de classe  $C^n$  et vérifie  $f^{(k)}(0^+) = f^{(k)}(1^-) = -\kappa_k$  pour tout  $k < n$  on a

$$\zeta_f(x+n) = -\sum_{k=1}^n \kappa_{n-k} \frac{\mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^n} + \frac{1}{\mathbf{x}^n} \zeta_{f^{(n)}}(x)$$

et pour  $z = x+n$

$$\zeta_f(z) = \sum_{k=1}^n -\frac{\kappa_{n-k}}{(z-1)(z-2)\cdots(z-(n-k)-1)} + \frac{\zeta_{f^{(n)}}(z-n)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}$$

$$\zeta_f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-k-1)} + \frac{\zeta_{f^{(n)}}(z-n)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}.$$

$\square$

**Theorem 9.** *Si*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2|k|\pi)^n |c_k(f)|}{|z-1| \cdots |z-n-1|} < +\infty$$

alors

$$\zeta_f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{(z-1) \cdots (z-n-1)}, \quad \forall z \notin \mathbb{N}^* \quad \text{où } \alpha_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2ik\pi)^n c_k(f) \quad (5.3)$$

et  $\{c_k(f)\}$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ .

*Proof.* On a pour  $f \in L^2([0, 1])$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k(x), \quad c_0(f) = \int_0^1 f(x) dx \text{ et}$$

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2ik\pi x} dx \text{ avec } e_k(x) = e^{-2ik\pi x},$$

on peut appliquer le théorème précédent aux fonctions  $e_k$

$$\zeta_{e_k}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2ik\pi)^n}{(z-1) \cdots (z-n-1)}, \quad \forall z \notin \mathbb{N}^*$$

si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2|k|\pi)^n |c_k(f)|}{|z-1| \cdots |z-n-1|} < +\infty$$

alors

$$\begin{aligned} \zeta_f(z) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^z} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k(u) du = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \zeta_{e_k}(z) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2ik\pi)^n c_k(f)}{(z-1) \cdots (z-n-1)} \end{aligned}$$

et

$$\zeta_f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{(z-1) \cdots (z-n-1)}$$

où

$$\alpha_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2ik\pi)^n c_k(f), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Supposons que  $f \in L^2([0, 1])$ , les  $\zeta$ -intégrales

$$\zeta_f(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x^z} dx, \quad \text{Re}(z) > 0$$

s'écrivent,

$$\zeta_f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathbf{f}(x)}{x^z} dx,$$

sur chaque intégrale sur  $[n, n+1[$  par changement de variable, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathbf{f}(x)}{x^z} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+n)^z} dx$$

si les symboles d'intégration et de somme sont permutables

$$\zeta_f(z) = \int_0^1 f(x) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^z} \right) dx.$$

**Definition 9.** Le noyau de Mellin est défini par la fonction

$$\varsigma(z, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^z} = \zeta(z, x) - x^{-z},$$

où  $\zeta$  est la fonction zêta d'Hurwitz.

**Remark 9.** On a

$$\varsigma(z, x) = \zeta(z, x) - x^{-z} = \zeta(z, x+1) = -\frac{\zeta'_x(z, x)}{z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.4)$$

Pour un entier  $k \geq 2$  quelconque

$$\varsigma(z, k) = \zeta(z) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^z},$$

si  $k = \frac{p}{q}$  avec  $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$  alors

$$\varsigma\left(\frac{p}{q}, z\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{q} + n\right)^z} = q^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+nq)^z} = q^z \sum_{m \equiv p[q]} \frac{1}{m^z}.$$

**Definition 10.** Soit  $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ , la fonction  $r$ -zêta de Riemann est définie par l'extension analytique de la fonction

$$\zeta_r(z) = \sum_{m \equiv p[q]} \frac{1}{m^z}, \quad r = \frac{p}{q} \text{ avec } \operatorname{pgcd}(p, q) = 1$$

et si  $r = 0$ ,  $\zeta_0(z) = \zeta(z)$ .

**Remark 10.** La densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  permet de reconstruire le noyau de Mellin  $\varsigma$  à partir des fonctions  $\zeta_r$  pour  $r \in [0, 1]$ .

On note  $\widehat{\varsigma}$  l'opérateur défini par

$$\widehat{\varsigma}(f) = \zeta_{\widehat{P}_1(f)}|_{[0,1]}$$

pour toute fonction  $f \in L^2([0, 1])$  où  $\widehat{P}_1$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{C}1^\perp$ .

**Theorem 10.** L'opérateur  $\widehat{\varsigma} \oplus \widehat{P}_1$  est un opérateur borné de  $L^2([0, 1])$ .

*Proof.* Si

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k \text{ et } f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k e_k$$

alors

$$\begin{aligned} \widehat{\varsigma} \oplus \widehat{P}_1(f) &= \zeta_{f_0} + c_0, \\ \left\| \widehat{\varsigma} \oplus \widehat{P}_1(f) \right\|_2^2 &= \|\zeta(f)\|_2^2 + \left\| \widehat{P}_1(f) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sur la base hilbertienne  $e_k(x) = e^{2ik\pi x}$  on a, en utilisant deux fois l'intégration par partie, pour  $x > 0$

$$\zeta_{e_k}(x) = -\frac{1}{2ik\pi} - \frac{x}{(2ik\pi)^2} + \frac{x(x+1)}{(2ik\pi)^2} \zeta_{e_k}(x+2),$$

en appliquant 5.1, pour  $x \in [0, 1]$

$$|\zeta_{e_k}(x+2)| \leq \frac{\pi^2}{6}$$

donc

$$\left| \widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1 e_k(x) \right| \leq 2 + \frac{\pi^2}{6},$$

et pour  $k \in \mathbb{Z}^*$

$$\|\widehat{\zeta} e_k\|_2 \leq \sqrt{2 + \frac{\pi^2}{6}} \|e_k\|_2.$$

Si  $k = 0$  on a  $\widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1(e_0) = e_0$ . En utilisant 5.5 on en déduit que

$$\left\| \widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1(f) \right\|_2 \leq \sqrt{3 + \frac{\pi^2}{6}} \|f\|_2.$$

l'opérateur  $\widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1$  est un opérateur borné de  $L^2([0, 1])$ . □

Dans la base canonique  $e_k$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1 e_0 &= e_0 \\ \widehat{\zeta} \oplus \widehat{P}_1 e_k &= \zeta_{e_k} |_{[0,1]} \end{aligned}$$

en utilisant 5.3 on a

$$\zeta_{e_k}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2ik\pi)^n}{(z-1) \cdots (z-n-1)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2ik\pi)^n}{(z-2) \cdots (z-n-1)}$$

$$\psi_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2ik\pi)^n}{(z-2) \cdots (z-n-1)},$$

$$\psi_k(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2ik\pi)^n}{(1-2) \cdots (1-n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2ik\pi)^n}{n!} = e^{-2ik\pi} - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \zeta_{e_k}(z) &= \frac{\psi_k(z) - \psi_k(1)}{z-1} \\ \lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{e_k}(z) &= \psi'_k(1), \end{aligned}$$

1 n'est pas un pôle pour la fonction  $\zeta_{e_k} |_{[0,1]}$ . Formellement, si

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k(x)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} \zeta_f |_{[0,1]}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \psi'_k(1)$$

si les symboles  $\lim$  et  $\sum$  permutent, c'est-à-dire, si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f) \psi'_k(1)| < +\infty.$$

**Remark 11.**

$$\begin{aligned} \psi'_k(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) (2ik\pi)^n \\ |\psi'_k(1)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} (2|k|\pi)^n = 2|k|\pi e^{2|k|\pi} < +\infty. \end{aligned}$$

## 6. CONCLUSION

Tous les outils mathématiques, présentés dans cet article, ont été développés à partir de la fonction zêta de Riemann et ses zéros non triviaux. Dans la première partie, on définit les séries de Dirichlet des fonctions analytiques associées aux zéros de ces fonctions. On démontre que la fonction zêta est de type fini, avec abscisse de convergence nulle. Ensuite, on s'intéresse à la transformée de Riemann qui permet de décrire l'image d'une fonction  $f$  par la formule 4.1, on calcule les transformées de Riemann dans la base hilbertienne formée des fonctions de Hermite-Gauss. On définit la notion de noyau de Riemann et on donne des conditions pour que ce noyau soit hermitien. Le noyau de Mellin est décrit à partir de l'opérateur de Volterra et de la notion de  $\zeta$ -intégration, on en déduit les résultats démontrés dans 5.3 et la description des extensions analytiques de  $\zeta$  sur  $\operatorname{Re}(z) > -n$  et  $z \neq 1$ .

## REFERENCES

- [1] J. B. Conrey. More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. Reine Angew.Math.* 399 (1989),1-26.
  - [2] A.Ivic. *The Riemann zeta function.* (Wiley Interscience, New York, 1985).
  - [3] H.L.Montgomery. *Topics in multiplicative number theory.* Lectures Notes in Math.227 (springer, Belin, 1971).
  - [4] D.R.Heath-Brown. Zero density estimates for the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions. *J.London Math. Soc.* (2), 20 (1979), 221-232.
  - [5] A.Selberg. Contributions to the theory of the Riemann zeta function. *Arch for Mathog Naturv.* B, 48 (1946), no.5.
  - [6] M.S. Birman. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.*
  - [7] A.E.Ingham. On the estimation of  $N(\sigma, T)$ . *Q.J.O.* 11 (1940), 291-2.
- Email address:* jean-louis.jonot@ac-versailles ou j.jonot@gmail.com