



HAL
open science

EXPOSANTS CRITIQUES ET MOYENNABILITÉ

Thomas Roblin, Samuel Tapie

► **To cite this version:**

Thomas Roblin, Samuel Tapie. EXPOSANTS CRITIQUES ET MOYENNABILITÉ. European Mathematical Society. Géométrie ergodique, 43, , pp.57-88, 2013, Monographie de L'Enseignement Mathématique, 978-2-940264-10-0. hal-01729750

HAL Id: hal-01729750

<https://hal.science/hal-01729750>

Submitted on 12 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EXPOSANTS CRITIQUES ET MOYENNABILITÉ

THOMAS ROBLIN AND SAMUEL TAPIE

INTRODUCTION

Soit X une variété riemannienne simplement connexe à courbures sectionnelles au plus -1 , ou plus généralement un espace métrique CAT(-1) propre. Considérons un groupe Γ_0 discret d'isométries de X , et un sous-groupe Γ distingué dans Γ_0 et non élémentaire (c'est-à-dire tel que l'ensemble limite $L(\Gamma)$ est infini). On se reportera à l'exposé de Marc Peigné ci-dessus pour les notions élémentaires, en particulier celle d'exposant critique (noté $\delta(\Gamma)$).

Ces notes reprennent le contenu d'un mini-cours donné par les deux auteurs à l'occasion d'une rencontre du GDR Platon à Neuchâtel en février 2011. Leur objet est d'établir le théorème ci-dessous, ainsi que la réciproque partielle qu'en donne le théorème suivant.

Théorème 0.1. ([Rob05]) *Si Γ_0/Γ est moyennable, alors $\delta(\Gamma) = \delta(\Gamma_0)$.*

La notion de moyennabilité est rappelée dans la section 1 ci-dessous.

Le théorème 0.1 sera montré dans la section 2 à l'aide des densités conformes à la Patterson-Sullivan. Il est à noter que la même démarche se généralise immédiatement au cas où X est un espace hyperbolique au sens de Gromov (voir remarque 2.1).

Dans cette généralité, la question d'une réciproque sous une restriction raisonnable concernant Γ_0 , ne fût-ce que l'hypothèse que Γ_0 soit convexe-cocompact, reste à ce jour un problème ouvert. Il est cependant possible de l'établir dans le cas suivant.

Théorème 0.2. ([Bro85]) *Supposons que $X = \mathbb{H}^{n+1}$ l'espace hyperbolique de dimension $n+1$, que Γ_0 est de co-volume fini, ou bien convexe-cocompact avec $\delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$. Si Γ_0/Γ n'est pas moyennable, alors $\delta(\Gamma) < \delta(\Gamma_0)$.*

La démonstration de ce théorème fait appel à la théorie spectrale du Laplacien, ce qui suppose d'avoir établi au préalable un lien entre le bas du spectre du Laplacien et l'exposant critique du groupe sous-jacent : c'est l'objet de la section 3 où nous exposerons une démonstration nouvelle et élémentaire d'une extension du célèbre théorème suivant, où $\lambda_0(M)$ désigne le bas du spectre du Laplacien (hyperbolique).

Théorème 0.3. ([Sul87])

Soit $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ une variété hyperbolique géométriquement finie de dimension $n+1$.

(1) *Si $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$, alors $\lambda_0(M) = \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$, et est une valeur propre isolée.*

(2) Si $\delta_\Gamma \leq \frac{n}{2}$, alors $\lambda_0(M) = \frac{n^2}{4}$.

Remarque 0.1. Il est prouvé dans [Sul87] que dès que $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ avec $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$, alors $\lambda_0(M) = \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$, sans hypothèse géométrique sur M . Cependant, $\lambda_0(M)$ n'est plus nécessairement une valeur propre isolée dès que M n'est pas géométriquement finie.

La démonstration du théorème 0.2 s'étend sur les sections 4 et 5 ; elle est organisée comme suit.

Plan de la démonstration du théorème 0.2. Soit $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$ une variété hyperbolique de volume fini, ou convexe-cocompacte avec $\delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$. Soit $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ tel que Γ_0/Γ n'est pas moyennable. Grâce au théorème 0.3 et à la remarque qui le suit, il suffit pour obtenir le théorème 0.2 de montrer que

$$(1) \quad \lambda_0(\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma) > \lambda_0(\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0).$$

A la section 4, nous montrerons le résultat suivant, première étape pour démontrer (1). Soit $p : N \rightarrow M$ un revêtement riemannien de groupe d'automorphisme G . On suppose de plus que

- (1) G n'est pas moyennable ;
- (2) le bas du spectre $\lambda_0(M)$ est une valeur propre isolée ;
- (3) il existe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset N$ pour l'action de G , qui soit *spectralement optimal* et dont la première valeur propre $\lambda_0(\mathcal{D})$ est isolée.

Alors $\lambda_0(N) > \lambda_0(M)$. La terminologie *spectralement optimal* est définie à la section 4.

A la section 5, nous montrons que si $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$, de volume fini ou convexe-cocompacte avec $\delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$, et si $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ n'est pas moyennable, alors il existe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ spectralement optimal et dont la première valeur propre est isolée. Ceci conclut la preuve de (1), et donc du théorème 0.2. □

S. Tapie remercie Gilles Carron pour lui avoir appris le Lemme de Barta, ainsi que pour de nombreuses discussions autour des problèmes spectraux évoqués dans cette note.

1. MOYENNABILITÉ

Un groupe dénombrable G est dit *moyennable* s'il admet une *moyenne* (disons à droite), c'est-à-dire une forme linéaire M sur $l^\infty(G)$ invariante à droite, positive (i.e. croissante), telle que $M\mathbb{1} = 1$.

On doit à Følner une caractérisation très importante de la moyennabilité, qui s'énonce comme suit.

Proposition 1.1 (Følner). *Un groupe dénombrable G est moyennable si et seulement si pour toute partie finie $K \subset G$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \subset G$ fini tel que pour tout $g \in K$, $|A\Delta Ag| < \epsilon|A|$.*

On utilisera une moyenne pour la démonstration du théorème 0.1, et la caractérisation de Følner pour celle du théorème 0.2.

Démonstration. La réciproque est facile : ayant choisi une suite de parties finies K_n croissant vers G et une suite ϵ_n tendant vers 0, ce qui nous fournit une suite de Følner A_n , n'importe quelle valeur d'adhérence de la suite des probabilités uniformes p_{A_n} sur les A_n constitue une moyenne sur G .

Pour l'implication directe, étant donné une moyenne M sur G , on commence par prendre une suite de probabilités finies λ_n sur G convergeant vers M au sens faible-*, en s'appuyant sur la densité de $l^1(G)$ dans $l^\infty(G)^*$ pour cette topologie, avec quelques réajustements reposant sur les caractéristiques de M .

Considérons une partie $K = \{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ et $\epsilon > 0$. On a, pour tout j , convergence faible-* vers 0 de $\lambda_n - \lambda_n g_j$ quand $n \rightarrow \infty$; quitte à modifier λ_n par des combinaisons convexes finies (en procédant successivement pour $j = 1, \dots, k$), on peut même supposer que $\|\lambda_n - \lambda_n g_j\|_1 \rightarrow 0$ pour tout j . Fixons maintenant n assez grand pour que $\|\lambda - \lambda g_j\|_1 < \frac{\epsilon}{k}$, où $\lambda = \lambda_n$, puis écrivons λ comme combinaison convexe de probabilités uniformes sur une suite finie décroissante de parties A_i de G : $\lambda = \sum_{i=1}^m a_i p_{A_i}$. Considérons $B_j = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid |A_i \Delta A_i g_j| < \epsilon |A_i|\}$ pour $j = 1, \dots, k$. On voit alors facilement que

$$\frac{\epsilon}{k} > \|\lambda - \lambda g_j\|_1 = \sum_{i=1}^m a_i \frac{|A_i \Delta A_i g_j|}{|A_i|} \geq \epsilon \sum_{i \notin B_j} a_i.$$

Comme $\sum a_i = 1$, cela prouve que $\bigcap_{j=1}^k B_j \neq \emptyset$, d'où la conclusion voulue (on prendra $A = A_i$ pour un i commun aux B_j). \square

2. DENSITÉS CONFORMES INVARIANTES

Rappelons (voyez l'exposé de Marc Peigné ci-dessus) qu'on appelle *densité* (à l'infini) une application μ qui à chaque $x \in X$ associe une mesure μ_x positive finie sur ∂X ; elles seront ici normalisées en demandant que μ_o soit une probabilité, où $o \in X$ est un point dorénavant fixé. Une densité μ est dite *conforme* de dimension $\delta \geq 0$ si pour tous x et y dans X , la mesure μ_y est absolument continue par rapport à μ_x , avec rapport de Radon-Nikodym donné par :

$$(2) \quad \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{\delta \mathcal{B}_\xi(x,y)}$$

($\mathcal{B}_\xi(x, y)$ désigne la fonction de Busemann). Une densité μ est dite *invariante* par Γ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $x \in X$, on a¹ :

$$\gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x} .$$

Le point fondamental, dû à Patterson (cf [Pat]), est l'*existence* d'une densité conforme invariante par Γ et de dimension $\delta(\Gamma)$ l'exposant critique de Γ . Ce seul fait montre déjà que $\delta(\Gamma) > 0$.

Proposition 2.1. *Il existe une densité conforme de dimension $\delta(\Gamma)$ et invariante par Γ .*

Si en outre Γ n'est pas cocompact, il en existe de toute dimension $\delta \geq \delta(\Gamma)$.

L'ombre d'une boule $B(y, r)$ dans X vue d'un point $x \in X$ sera notée $\mathcal{O}_x(y, r)$. Voici une extension du fameux lemme de l'ombre de Sullivan (cf [Sul79]) :

Proposition 2.2. ([Rob05], [Rob11]) *Soit $\delta \geq 0$. Pour $r > 0$ assez grand, il existe une constante $C > 1$ telle que pour toute densité μ conforme de dimension δ et invariante par Γ , pour tout $\phi \in \Gamma_0$, on a*

$$\frac{1}{C} \|\mu_{\phi o}\| e^{-\delta d(o, \phi o)} \leq \mu_o(\mathcal{O}_o(\phi o, r)) \leq C \|\mu_{\phi o}\| e^{-\delta d(o, \phi o)} .$$

Démonstration. Pour $\xi \in \mathcal{O}_o(\phi o, r)$, on a $d(o, \phi o) - 2r < \mathcal{B}_\xi(o, \phi o) \leq d(o, \phi o)$, grâce à l'inégalité triangulaire pour la distance d . Avec la conformité de μ , l'inégalité de droite en résulte aussitôt.

On choisira désormais $r > 0$ assez grand pour que toute ombre $\mathcal{O}_r(x, o)$ ($x \in \overline{X}$) rencontre l'ensemble limite $L(\Gamma)$, lequel n'est pas réduit à un point du fait que Γ n'est pas élémentaire.

Notons $\mathcal{C}(\Gamma, \delta)$ l'ensemble des densités conformes de dimension δ invariantes par Γ . On voit aisément que l'ensemble $K = \overline{X} \times \mathcal{C}(\Gamma, \delta)$ muni du produit de la topologie de \overline{X} et de la topologie faible-* est compact, et que l'application de K dans \mathbb{R} qui à (x, μ) associe $\mu_o(\mathcal{O}_x(o, r))$ est semi-continue inférieurement ; elle admet donc un minimum, qui est nécessairement strictement positif, disons $\frac{1}{C}$, puisque le support fermé de μ_o , contenant $L(\Gamma)$, rencontre chaque ombre $\mathcal{O}_x(o, r)$ qui est ouverte dans \overline{X} .

Considérons maintenant $\mu \in \mathcal{C}(\Gamma, \delta)$, et $\phi \in \Gamma_0$. Soit $\nu_x = \|\mu_{\phi o}\|^{-1} \phi_*^{-1} \mu_{\phi x}$ ($x \in X$) ; il est facile de voir que ν est encore une densité conforme de dimension δ ; de plus, ν est invariante par Γ , puisque pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma_* \phi_*^{-1} \mu_{\phi x} = \phi_*^{-1} (\phi \gamma \phi^{-1})_* \mu_{\phi x} = \phi_*^{-1} \mu_{\phi \gamma x}$, car $\phi \gamma \phi^{-1} \in \Gamma$; enfin $\nu \in \mathcal{C}(\Gamma, \delta)$. Donc $\nu_o(\mathcal{O}_{\phi^{-1}o}(o, r)) \geq \frac{1}{C}$ par ce qui précède, ce qui donne $\mu_{\phi o}(\mathcal{O}_o(\phi o, r)) \geq \frac{1}{C} \|\mu_{\phi o}\|$, puis

$$\mu_o(\mathcal{O}_o(\phi o, r)) \geq \frac{1}{C} \|\mu_{\phi o}\| e^{-\delta d(o, \phi o)}$$

comme voulu. □

1. $\gamma_*\mu_x$ désigne la mesure définie par $\gamma_*\mu_x(B) = \mu_x(\gamma^{-1}B)$ pour tout borélien B

Corollaire 2.3. ([Rob05]) *Si $\sigma > \delta$, alors la série $\sum_{\phi \in \Gamma_0} \|\mu_{\phi o}\| e^{-\sigma d(o, \phi o)}$ converge.*

Démonstration. Observons d'abord que le recouvrement par les $\mathcal{O}_o(\phi o, r)$ où $\phi o \in \mathcal{R}_n = \{\phi o \in \Gamma_0 o \mid n-1 \leq d(o, \phi o) < n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) a une multiplicité bornée par une constante M (ne dépendant que de r), puisque Γ_0 est discret. La proposition précédente montre alors que

$$\sum_{\phi o \in \mathcal{R}_n} \|\mu_{\phi o}\| \leq C e^{\delta n} \sum_{\phi o \in \mathcal{R}_n} \mu_o(\mathcal{O}_o(\phi o, r)) \leq M C e^{\delta n}.$$

La conclusion s'ensuit. \square

Démonstration du Théorème 0.1. Considérons une moyenne M sur Γ_0/Γ invariante à droite. Le lemme suivant est un avatar de l'inégalité classique de Jensen.

Lemme 2.4. *Si $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tout $\alpha \in l^\infty(\Gamma_0/\Gamma)$, $\Theta(M\alpha) \leq M\Theta(\alpha)$.*

Prenons une densité μ conforme, invariante par Γ et de dimension $\delta(\Gamma)$, puisqu'il en existe d'après la proposition 2.1. Définissons $\chi([\phi])$ ($\phi \in \Gamma_0$) comme l'image par M de l'application qui à $[\gamma]$ associe $\log \|\mu_{\gamma \phi o}\| - \log \|\mu_{\gamma o}\|$, laquelle est bien bornée par $\delta d(o, \phi o) = \delta d(\gamma o, \gamma \phi o)$. Il est clair que χ est un caractère de Γ_0/Γ dans \mathbb{R} , du fait de l'invariance à droite de M .

Définissons une densité μ^* sur X de la façon suivante : pour φ continue de \bar{X} dans \mathbb{R} , $\int \varphi d\mu_x^*$ sera l'image par M de l'application qui à $[\gamma]$ associe $\|\mu_{\gamma o}\|^{-1} \int \varphi d\gamma_*^{-1} \mu_{\gamma x}$. Il est encore clair que μ^* est une densité conforme, invariante par Γ et de dimension $\delta(\Gamma)$.

Le lemme ci-dessus (avec la fonction exponentielle à la place de Θ) entraîne que $\|\mu_{\phi o}\| \geq e^{\chi([\phi])}$. On en conclut, grâce au corollaire précédent, que

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in \Gamma_0} e^{-\sigma d(o, \phi o)} &\leq \sum_{\phi \in \Gamma_0} \cosh \chi([\phi]) e^{-\sigma d(o, \phi o)} = \sum_{\phi \in \Gamma_0} e^{\chi([\phi])} e^{-\sigma d(o, \phi o)} \\ &\leq \sum_{\phi \in \Gamma_0} \|\mu_{\phi o}\| e^{-\sigma d(o, \phi o)} < \infty \end{aligned}$$

pour $\sigma > \delta(\Gamma)$, c'est-à-dire que $\delta(\Gamma_0) \leq \delta(\Gamma)$, d'où l'égalité. \square

Remarque 2.1. Toute cette section se généralise au cas où X est seulement un espace hyperbolique au sens de Gromov. Pour ce faire, il convient de remplacer la notion de densité conforme par celle plus lâche de densité quasi-conforme (selon [Coo]), qui consiste à remplacer l'égalité dans (2) par une double inégalité avec constantes multiplicatives. Le cours des démonstrations ci-dessus reste inchangé, à cet élargissement près.

3. BAS DU SPECTRE DU LAPLACIEN ET EXPOSANT CRITIQUE

Cette section est consacrée au théorème 0.3, où $X = \mathbb{H}^{n+1}$ et Γ est un groupe d'isométries de X , discret et non élémentaire.

Commençons par introduire la notion de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan dont nous allons avoir besoin. On note SX le fibré unitaire tangent de X , $\pi : SX \rightarrow X$ la projection canonique, et g^t ($t \in \mathbb{R}$) le flot géodésique sur SX . Pour $u \in SX$, on note $u(-\infty)$ et $u(+\infty)$ les extrémités à l'infini de la géodésique déterminée par u . Soit $o \in X$ un point base fixé une fois pour toutes. On a alors une identification entre SX et $\partial X \times \partial X \times \mathbb{R}$ donnée par

$$SX \ni u \mapsto \mathcal{I}_o(u) = (u(-\infty), u(+\infty), \mathcal{B}_{u(-\infty)}(\pi u, o)).$$

Notons que $g^t(\xi, \eta, s) = (\xi, \eta, s + t)$ ($t \in \mathbb{R}$) dans ces coordonnées.

Etant donnée une densité μ conforme de dimension δ et invariante par Γ , on appellera *mesure de Bowen-Margulis associée à μ* la mesure (localement finie) m^μ sur SX définie par

$$dm^\mu(u) = e^{\delta \mathcal{B}_\xi(\pi u, o) + \delta \mathcal{B}_\eta(\pi u, o)} d\mu_o(\xi) d\mu_o(\eta) ds \text{ où } u = (\xi, \eta, s).$$

Par construction, m^μ ne dépend pas de o , et est invariante par le flot géodésique ainsi que par Γ .

Elle induit donc une mesure (localement finie) sur le fibré unitaire tangent SM de $M := X/\Gamma$, que nous noterons m_Γ^μ . On dit que M est *de mesure de Bowen-Margulis finie* si la masse totale de m_Γ^μ est finie. Lorsque la masse de m_Γ^μ est finie, on montre qu'alors $\delta = \delta(\Gamma)$ et que μ est unique (à normalisation près). La mesure m_Γ normalisée est alors la *mesure de Bowen-Margulis pour le flot géodésique* au sens classique du terme, c'est-à-dire l'unique mesure de probabilité invariante par le flot géodésique et d'entropie maximale. On pourra consulter [Rob03] et [O-P04] pour plus de détails.

La mesure de Bowen-Margulis de M est finie dès que M est convexe-cocompacte. Une variété hyperbolique est de mesure de Bowen-Margulis finie dès qu'elle est géométriquement finie (cf [Sul79]). Il existe des exemples de variétés hyperboliques dont le groupe fondamental n'est pas de type fini, qui ne sont donc pas géométriquement finies, mais dont la mesure de Bowen-Margulis est de masse finie, d'après [Pei].

L'objectif de cette section est de donner une preuve complète élémentaire de l'extension suivante du Théorème de Patterson-Sullivan sur le bas du spectre du Laplacien. On note $\lambda_0(M)$ le bas du spectre du Laplacien riemannien Δ sur M , et $\lambda_0^{ess}(M)$ le bas de son spectre essentiel. Rappelons que grâce au principe dit *du Min-Max*, le bas du spectre du Laplacien sur une variété riemannienne M s'exprime de la façon suivante :

$$\lambda_0(M) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}, f \in \mathcal{H}^1(M) \right\},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme dans $L^2(M)$ pour les fonctions et les champs de vecteurs, et $\mathcal{H}^1(M)$ et l'espace de Sobolev des fonctions L^2 dont le gradient au sens des distributions est L^2 .

Théorème 3.1. *Soit μ une densité conforme invariante par Γ et de dimension δ_Γ l'exposant critique de Γ . Pour $x \in M$, on note $\psi(x) = \|\mu_{\tilde{x}}\|$ la masse de la mesure $\mu_{\tilde{x}}$, où $\tilde{x} \in X$ est un quelconque relevé de x . Supposons que la masse de la mesure de Bowen-Margulis m_Γ^μ associée à μ soit finie.*

- (1) *Si $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$, alors le bas du spectre de Δ vérifie $\lambda_0(M) = \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$. C'est une valeur propre, associée à la fonction propre $\psi \in L^2(M)$. De plus,*

$$\|\psi\|_{L^2(M)}^2 = \|m_\Gamma^\mu\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\delta_\Gamma}}.$$

- (2) *Si $\delta_\Gamma \leq \frac{n}{2}$, alors $\lambda_0(M) = \lambda_0^{ess}(M) = \frac{n^2}{4}$.*

Nous démontrerons le Théorème 3.1 à l'aide des trois propositions suivantes.

Proposition 3.2. *Soit M une variété riemannienne. Supposons qu'il existe $\lambda \geq 0$ et une fonction $\phi : M \rightarrow]0, \infty[$ strictement positive qui vérifie*

$$\Delta\phi \geq \lambda\phi.$$

Alors $\lambda_0(M) \geq \lambda$.

La démonstration élémentaire que nous en proposons repose sur la formule suivante, connue sous le nom de formule de Barta.

Lemme 3.3 (Formule de Barta). *Soient $u, \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , avec u à support compact. Alors*

$$\int_M \|\nabla(u\phi)\|^2 dV = \int_M \phi^2 \|\nabla u\|^2 dV + \int_M u^2 \phi \Delta\phi dV.$$

Démonstration. On vérifie aisément que

$$\|\nabla(u\phi)\|^2 = \phi^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla(u^2), \nabla(\phi^2) \rangle + u^2 \|\nabla\phi\|^2.$$

Par la formule de Stokes, on a

$$\int_M \langle \nabla(u^2), \nabla(\phi^2) \rangle dV = \int_M u^2 \Delta(\phi^2) dV.$$

Enfin $\frac{1}{2} \Delta(\phi^2) = \phi \Delta\phi - \|\nabla\phi\|^2$. Le tout réuni nous donne la formule désirée. \square

Démonstration de la proposition 3.2. Soit f une fonction \mathcal{C}^2 à support compact dans M . Appliquons la formule de Barta énoncée ci-dessus avec $u = f/\phi$ (on rappelle que $\phi > 0$). On en déduit que

$$\int_M \|\nabla f\|^2 dV \geq \int_M \frac{f^2}{\phi} \Delta\phi dV \geq \lambda \int_M f^2 dV.$$

En se souvenant que $\lambda_0(M)$ est défini comme l'infimum des quotients de Rayleigh, on conclut que $\lambda_0(M) \geq \lambda$. \square

En recourant à la théorie du potentiel, il est montré dans [Sul87] que

$$\lambda_0(M) = \sup\{\lambda > 0; \exists \phi > 0, \Delta \phi \geq \lambda \phi\},$$

ce dont nous n'aurons ici pas besoin.

Proposition 3.4. *Soit μ une densité conforme invariante par Γ et de dimension $\delta \geq \delta_\Gamma$. Pour $x \in M$, on définit $\phi(x) = \|\mu_{\tilde{x}}\|$ la masse de la mesure $\mu_{\tilde{x}}$, où $\tilde{x} \in \mathbb{H}^{n+1}$ est un quelconque relevé de x . Alors*

$$\Delta \phi = \delta(n - \delta)\phi.$$

Démonstration. Identifions \mathbb{H}^{n+1} à $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^n$, en notant (x_0, x_1, \dots, x_n) les coordonnées de $x \in \mathbb{H}^{n+1}$. Soit o le point de coordonnées $(1, 0, \dots, 0)$. Notons $\phi_\xi(x) = e^{\delta \mathcal{B}_\xi(o, x)}$ ($\xi \in \partial \mathbb{H}^{n+1}$, $x \in \mathbb{H}^{n+1}$). Comme $\|\mu_x\| = \int \phi_\xi(x) d\mu_o(\xi)$, il suffit de voir que $\Delta \phi_\xi = \delta(n - \delta)\phi_\xi$ pour chaque ξ . Grâce à l'invariance par isométrie, on se ramène à $\xi = \infty$. Or le Laplacien hyperbolique a pour expression $\Delta = -x_0^2(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots) + (n - 1)x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$, et $\phi_\infty(x) = x_0^\delta$. Un calcul simple permet alors de vérifier que $\Delta \phi_\infty = \delta(n - \delta)\phi_\infty$. \square

Des propositions 2.1, 3.2 et 3.4 vient déjà que $\lambda_0(\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma) \geq \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$.

Proposition 3.5. *Soit $\mu = (\mu_x)_{x \in X}$ une densité conforme de dimension δ invariante par Γ , de mesure de Bowen-Margulis associée m^μ . Alors*

$$\int_D \|\mu_x\|^2 dV(x) = \|m_\Gamma^\mu\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\delta_\Gamma}},$$

où $D \subset X$ est un domaine fondamental borélien pour Γ .

En particulier, cette intégrale est finie si et seulement si $\delta > \frac{n}{2}$.

Remarque 3.1. L'article historique [Sul84] avançait cette formule sans preuve et sans présenter de constante multiplicative à droite.

Démonstration. Fixons un point $o \in X$. Ecrivons d'abord

$$\int_D \|\mu_x\|^2 dV(x) = \int_{\partial \mathbb{H}^{n+1} \times \partial \mathbb{H}^{n+1}} d\mu_o(\xi) d\mu_o(\eta) \int_X e^{\delta \mathcal{B}_\xi(o, x)} e^{\delta \mathcal{B}_\eta(o, x)} \mathbb{I}_D(x) dV(x).$$

Dans l'intégrale ci-dessus, notons $v_{\xi, \eta}$ le point de SX déterminé par $v_{\xi, \eta}(-\infty) = \xi$, $v_{\xi, \eta}(+\infty) = \eta$ et $\mathcal{B}_\xi(o, \pi v_{\xi, \eta}) = 0$; en identifiant X avec la variété faiblement instable de $v_{\xi, \eta}$ et en y désintégrant le volume, cette intégrale devient alors

$$\int_{\partial \mathbb{H}^{n+1} \times \partial \mathbb{H}^{n+1}} d\mu_o(\xi) d\mu_o(\eta) \int_{\mathbb{R}} dt \int_{H^+(g^t v_{\xi, \eta})} e^{\delta(\mathcal{B}_\xi(o, \pi u) + \mathcal{B}_\eta(o, \pi u))} \mathbb{I}_D(\pi u) dV_{H^+(g^t v_{\xi, \eta})}(u),$$

où $H^+(v)$ désigne l'horosphère instable de v , c'est-à-dire l'horosphère basée en $v(-\infty)$ passant par v , et $dV_{H^+(v)}$ la mesure induite sur $H^+(v)$ par le volume riemannien dV sur X . En se reportant à la définition de m^μ et en

observant que $\mathcal{B}_\xi(o, \pi u) = \mathcal{B}_\xi(o, \pi g^t v_{\xi, \eta})$ dans l'intégrale ci-dessus, on voit que cette dernière vaut

$$\int_{SX} dm^\mu(v) \int_{H^+(v)} e^{\delta \mathcal{B}_{v(+\infty)}(\pi v, \pi u)} \mathbb{1}_{\pi^{-1}(D)}(u) dV_{H^+(v)}(u).$$

Introduisons $1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{\pi^{-1}(D)}(\gamma v)$ dans cette dernière intégrale; en usant des diverses invariances par Γ , on obtient :

$$\int_D \|\mu_x\|^2 dV(x) = \int_{\pi^{-1}(D)} dm^\mu(v) \int_{H^+(v)} e^{\delta \mathcal{B}_{v(+\infty)}(\pi v, \pi u)} dV_{H^+(v)}(u).$$

Par la transitivité de l'action du groupe des isométries de X sur SX , on voit que l'intégrale $\int_{H^+(v)} e^{\delta \mathcal{B}_{v(+\infty)}(\pi v, \pi u)} dV_{H^+(v)}(u)$ ne dépend pas du point v . En particulier, on peut se ramener à v déterminé par $v(-\infty) = \infty$, $v(+\infty) = 0$ et $\pi v = o$ où o désigne le point de coordonnées $(1, 0, \dots, 0)$ dans \mathbb{H}^{n+1} identifié à $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^n$. En identifiant $H^+(v)$ à \mathbb{R}^n par $u \mapsto x$ où $(1, x)$ sont les coordonnées du point πu , le volume devient précisément la mesure de Lebesgue dx . Enfin, $e^{\mathcal{B}_0(o, \pi u)} = \frac{1}{1+|x|^2}$, ce qu'on voit en utilisant l'isométrie $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ qui échange 0 et ∞ et fixe o , et le fait évident que $e^{\mathcal{B}_\infty(o, z)} = z_0$ ($z \in \mathbb{H}^{n+1}$). On aboutit ainsi à la formule annoncée. \square

Démonstration du Théorème 3.1. (1) Supposons $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$.

D'après la proposition 3.4, on a $\Delta \psi = \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)\psi$. Avec la proposition 3.2, on en déduit que $\lambda_0(M) \geq \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$. Or la proposition 3.5 montre que ψ est dans $L^2(M)$, donnant même la formule exacte pour la norme L^2 . Par conséquent, ψ est dans l'espace de Sobolev d'ordre 1 modelé sur $L^2(M)$ noté $\mathcal{H}^1(M)$; or il est bien connu que $\lambda_0(M) = \inf \left\{ \frac{\int_M \|\nabla f\|^2 dV}{\int_M \|f\|^2 dV}; f \in \mathcal{H}^1(M) \right\}$.

D'où l'égalité $\lambda_0(M) = \delta_\Gamma(n - \delta_\Gamma)$.

(2) Supposons maintenant $\delta_\Gamma \leq \frac{n}{2}$.

Alors Γ n'est pas cocompact, et l'on peut trouver une densité μ conforme de dimension $\frac{n}{2}$ et invariante par Γ (proposition 2.1). Prenons ϕ associée à μ comme dans la proposition 3.4; cette dernière et la proposition 3.2 font voir que $\lambda_0(M) \geq \frac{n^2}{4}$. D'autre part, $\lambda_0(M) \leq \lambda_0^{ess}(M) \leq \frac{n^2}{4}$, d'après le théorème 1 de [Bro81]. \square

4. BAS DU SPECTRE DU LAPLACIEN ET REVÊTEMENTS NON-MOYENNABLES

L'objet de cette section et de la suivante est de démontrer le Théorème 0.2.

Soit (M, g) une variété riemannienne dont le bas du spectre $\lambda_0(M)$ est une valeur propre, associée à la fonction propre ϕ_0 . Par exemple, d'après le théorème 3.1, toute variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ avec $\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ et dont la mesure de Bowen-Margulis est finie vérifie ces hypothèses.

Soit $p : (N, g) \rightarrow (M, g)$ un revêtement riemannien galoisien de M , de groupe de revêtement G . Si $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$ et $N = \mathbb{H}/\Gamma$, alors $G = \Gamma_0/\Gamma$. Soit

$\mathcal{D} \subset N$ un domaine fondamental (fermé, connexe, à bords \mathcal{C}^1 par morceaux) pour l'action de G .

Définition 4.1. *Nous dirons que le domaine fondamental \mathcal{D} est spectrale-ment optimal si $\nabla(\phi_0 \circ p)$ est tangent à $\partial\mathcal{D}$.*

La justification de cette terminologie vient du lemme suivant.

Lemme 4.1. *Avec les notations précédente, pour tout domaine fondamental \mathcal{D} , on a*

$$\lambda_0(\mathcal{D}) \leq \lambda_0(M),$$

où $\lambda_0(\mathcal{D})$ désigne le bas du spectre du Laplacien sur \mathcal{D} avec condition de Neumann sur le bord. Si \mathcal{D} est spectrale-ment optimal, alors $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M)$ est une valeur propre associée à la fonction propre $\phi_0 \circ p$.

Pour simplifier les notations, nous noterons par la suite $\phi_0 = \phi_0 \circ p$.

Démonstration. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental à bords \mathcal{C}^1 par morceaux. Le principe du Min-Max appliqué à M et à \mathcal{D} donne :

$$\lambda_0(M) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|_{L^2(M)}^2}{\|f\|_{L^2(M)}^2}, f \in \mathcal{H}^1(M) \right\},$$

et

$$\lambda_0(\mathcal{D}) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{D})}^2}{\|f\|_{L^2(\mathcal{D})}^2}, f \in \mathcal{H}^1(\mathcal{D}) \right\}.$$

Comme toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se relève en $f \circ p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, de même quotient de Rayleigh, on a immédiatement

$$\lambda_0(\mathcal{D}) \leq \lambda_0(M).$$

Supposons que $\nabla\phi_0$ soit tangent à $\partial\mathcal{D}$. Alors $\phi_0 = \phi_0 \circ p$ est une fonction de $\mathcal{H}^1(\mathcal{D})$, qui vérifie $\Delta\phi_0 = \lambda_0(M)\phi_0$ et les conditions de Neumann sur $\partial\mathcal{D}$. C'est donc une fonction propre pour le problème de Neumann sur \mathcal{D} , et par l'inégalité précédente, nécessairement

$$\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M).$$

□

Notons que si M est de volume fini (donc $\lambda_0(M) = 0$ associée à la première fonction propre constante), n'importe quel domaine fondamental compact connexe à bord \mathcal{C}^1 par morceau est spectrale-ment optimal. L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne dont le bas du spectre $\lambda_0(M)$ est une valeur propre, associée à la fonction propre ϕ_0 , et $p : (N, g) \rightarrow (M, g)$ un revêtement riemannien galoisien de M , de groupe de revêtement G non-moyennable. Supposons de plus que :*

- (1) *il existe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset N$ pour l'action de G spectrale-ment optimal;*

(2) $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M)$ est une valeur propre isolée pour le problème de Neumann sur \mathcal{D} , i.e.

$$\lambda_1(\mathcal{D}) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}, f \in \mathcal{H}^1(\mathcal{D}, g), \int_{\mathcal{D}} f \phi_0 = 0 \right\} > \lambda_0(\mathcal{D}).$$

Alors

$$\lambda_0(N) > \lambda_0(M).$$

Nous démontrerons à la section 5 que dans le cas où $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$ est une variété hyperbolique de volume fini, ou convexe-cocompacte avec $\delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$ et si $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ et $G = \Gamma_0/\Gamma$ est non-moyennable, alors il existe un domaine fondamental pour l'action de G qui vérifie les hypothèses du Théorème ci-dessus. Grâce au lien établi par le Théorème 3.1 entre exposant critique et bas du spectre, le Théorème 0.2 en découlera.

Avant de démontrer ce résultat, nous aurons besoin d'une autre caractérisation de la moyennabilité d'un groupe, ou plus généralement d'un graphe. Soit \mathcal{G} un graphe (non-orienté) à valence bornée, on notera $i \in \mathcal{G}$ un sommet de \mathcal{G} , et pour $i, j \in \mathcal{G}$, on notera $i \sim j$ si $\{i, j\}$ est une arête de \mathcal{G} . Si $A \subset \mathcal{G}$ est un ensemble de sommets de \mathcal{G} , on définit son *bord* ∂A comme l'ensemble des arêtes qui relient un sommet de A à un sommet de $\mathcal{G} \setminus A$.

Définition 4.2. On appelle constante de Cheeger de \mathcal{G} la constante

$$\mathfrak{h}(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \frac{\#\partial G_f}{\#G_f}, G_f \subset \mathcal{G} \right\},$$

où G_f parcourt l'ensemble des parties finies connexes de \mathcal{G} .

Ainsi définie, cette constante est trivialement nulle si \mathcal{G} est compact.

On appelle bas du spectre combinatoire de \mathcal{G} la constante

$$\mu_0(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \frac{\sum_{i \sim j} (a_i - a_j)^2}{\sum_i a_i^2}, (a_i)_{i \in \mathcal{G}} \right\},$$

où $(a_i)_{i \in \mathcal{G}}$ parcourt l'ensemble des fonctions $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ de support fini.

Par définition, si la valence de \mathcal{G} est bornée par v , alors $\mathfrak{h}(\mathcal{G}) \leq v$. Ces deux constantes permettent de ré-exprimer la notion de moyennabilité de façon commode pour la suite de notre étude.

Proposition 4.3. Soit G un groupe de type fini, $S \subset G$ un système de générateurs finis et \mathcal{G} le graphe de Cayley de G associé à S . Alors G est moyennable si et seulement si $\mathfrak{h}(\mathcal{G}) = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la caractérisation de Følner de la moyennabilité, cf Proposition 1.1. \square

On dit d'ailleurs en général qu'un graphe (pas forcément de Cayley) est moyennable si et seulement si sa constante de Cheeger est nulle. Ceci se réexprime à l'aide du bas du spectre combinatoire, grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.4 (Inégalités de Cheeger combinatoires). *Soit \mathcal{G} un graphe de valence bornée par v . Alors*

$$\frac{\mathfrak{h}(\mathcal{G})^2}{2v} \leq \mu_0(\mathcal{G}) \leq \mathfrak{h}(\mathcal{G}).$$

Notre démonstration est inspirée de la p. 31 du mémoire de Colin de Verdière [CdV98]

Démonstration. Soit $G_f \subset \mathcal{G}$ une partie finie, posons $a = \mathbf{1}_{G_f}$, on a alors

$$\mu_0(\mathcal{G}) \leq \frac{\sum_{i \sim j} (a_i - a_j)^2}{\sum_i a_i^2} = \frac{\#\partial G_f}{\#G_f}.$$

On a donc $\mu_0(\mathcal{G}) \leq \mathfrak{h}(\mathcal{G})$, ce qui nous donne la première inégalité du lemme.

Soit maintenant $x = (x_i)_{i \in \mathcal{G}}$ une fonction à support fini. On pose,

$$S(x) = \sum_{i \sim j} |x_i^2 - x_j^2| = \sum_{i \sim j} |x_i - x_j| |x_i + x_j|.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$S(x) \leq \sqrt{\sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2} \sqrt{\sum_{i \sim j} (x_i + x_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2} \sqrt{2v} \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Minorons maintenant $S(x)$. On pose

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l$$

l'ensemble des valeurs de x^2 , et pour tout $k \in \{0, \dots, l\}$,

$$A_k = \{i \in \mathcal{G}; x_i^2 \geq a_k\}.$$

On a alors $S(x) = \sum_{i \sim j} x_i^2 - x_j^2$, où i et j sont ordonnés de sorte que $x_i^2 \geq x_j^2$, d'où

$$S(x) = \sum_{k=0}^l \sum_{(i,j) \in \partial A_k} x_i^2 - x_j^2,$$

les autres termes de la somme s'annulant. On a donc

$$S(x) \geq \sum_{k=0}^l \sum_{(i,j) \in \partial A_k} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^l \#\partial A_k (a_k - a_{k-1}),$$

donc

$$S(x) \geq \mathfrak{h}(\mathcal{G}) \sum_{k=0}^l \#A_k (a_k - a_{k-1}) = \mathfrak{h}(\mathcal{G}) \sum_{i \in \mathcal{G}} x_i^2.$$

D'où finalement,

$$\mathfrak{h}(\mathcal{G}) \sum_{i \in \mathcal{G}} x_i^2 \leq \sqrt{\sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2} \sqrt{2v} \sqrt{\sum_i x_i^2},$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Ces deux propositions nous donnent cette autre caractérisation de la moyennabilité.

Corollaire 4.5. *Soit Γ un groupe de type fini, $S \subset \Gamma$ un système de générateurs finis et G le graphe de Cayley de Γ associé à S . Alors Γ est moyennable si et seulement si $\mu_0(G) = 0$.*

Démonstration du Théorème 4.2. Soit (M, g) une variété riemannienne dont le bas du spectre $\lambda_0(M)$ est une valeur propre isolée, associée à la fonction propre ϕ_0 , et $p : (N, g) \rightarrow (M, g)$ un revêtement riemannien galoisien de M , de groupe de revêtement G non-moyennable. On note encore $\phi_0 = \phi_0 \circ p = N \rightarrow \mathbb{R}$, et on suppose que ϕ_0 est normalisée de sorte que

$$\int_M \phi_0^2 = 1.$$

Supposons de plus que :

- (1) il existe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset N$ pour l'action de G spectralement optimal ;
- (2) $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M)$ est une valeur propre isolée pour le problème de Neumann sur \mathcal{D} .

On notera

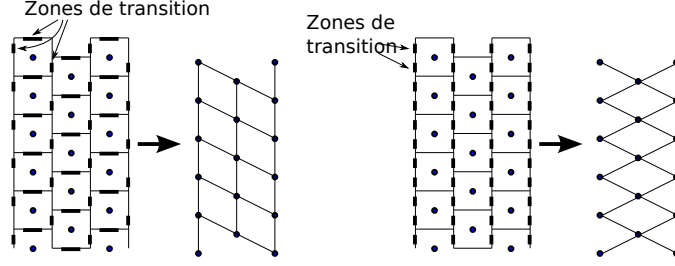
$$\lambda_1(\mathcal{D}) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}, f \in \mathcal{H}^1(\mathcal{D}, g), \int_{\mathcal{D}} f \phi_0 = 0 \right\}.$$

Par l'hypothèse (2), le *trou spectral* $\eta = \lambda_1(\mathcal{D}) - \lambda_0(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} est strictement positif. Comme \mathcal{D} est connexe à bord \mathcal{C}^1 par morceaux, il existe un système de générateurs symétriques $S = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{2v}\}$ de G , avec $\gamma_{k+v} = \gamma_k^{-1}$ et tel que pour tout $k \in \{1, \dots, 2v\}$, les domaines \mathcal{D} et $\gamma_k \mathcal{D}$ partagent un bord de codimension 1. Pour tout $k \in \{1, \dots, v\}$, fixons une hypersurface compacte à bord \mathcal{C}^1

$$H_k \subset \partial \mathcal{D} \cap \gamma_k \mathcal{D},$$

et on note $H_{k+v} = \gamma_k^{-1}(H_k) \subset \partial \mathcal{D}$. On a ainsi marqué $\partial \mathcal{D}$ de $2v$ hypersurfaces compactes à bords, qu'on peut supposer disjointes, que nous appellerons les *zones de transition* associées au revêtement \mathcal{D} . On a donc exactement une zone de transition associée à chaque générateur $\gamma \in S$. On supposera de plus (quitte à réduire les zones de transitions) que les $H_k, k \in \{1, \dots, 2v\}$ possèdent des voisinages tubulaires de largeur $R > 0$ qui sont tous disjoints. La figure 1 illustre cette construction de zones de transitions dans le cas de \mathbb{Z}^2 agissant sur le plan ; le choix des générateurs modifie le graphe de Cayley.

On notera encore G le graphe de Cayley de G associé au système de générateurs S . Pour tout sommet du graphe $i \in G$, nous noterons $\gamma_i \in G$ l'élément du groupe de revêtement correspondant à i , et $\mathcal{D}_i = \gamma_i(\mathcal{D})$.

FIGURE 1. Zones de transitions pour une action de \mathbb{Z}^2 sur le plan

Rappelons que l'objectif est de montrer que

$$\lambda_0(N) > \lambda_0(M) = \lambda_0(D).$$

Soit $f_\epsilon : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact telle que $\frac{\|\nabla f_\epsilon\|^2}{\|f\|^2} \leq \lambda_0(N) + \epsilon$. Soit $u : N \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f_\epsilon = u\phi_0$, comme $\phi_0 > 0$, le support de u est le même que le support de f_ϵ . Pour tout $i \in G$, définissons :

$$a_i^2 = \int_{\mathcal{D}_i} f_\epsilon^2; \quad b_i = \int_{\mathcal{D}_i} f_\epsilon \phi_0 \quad \text{et} \quad c_i^2 = \int_{\mathcal{D}_i} ((u - b_i)\phi_0)^2.$$

Par construction, l'application $g_i := (u - b_i)\phi_0$ est orthogonale à ϕ_0 dans $L^2(\mathcal{D}_i)$, on a donc $a_i^2 = b_i^2 + c_i^2$. Calculons l'énergie de f_ϵ sur chaque domaine \mathcal{D}_i :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla f_\epsilon|^2 &= \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla(b_i\phi_0) + \nabla g_i|^2 \\ &= b_i^2 \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla \phi_0|^2 + \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla g_i|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}_i} g_i(\nabla \phi_0, \nabla g_i). \end{aligned}$$

La formule de Green et l'égalité $\Delta \phi_0 = \lambda_0(M)\phi_0$ montrent que le dernier terme s'annule. Comme g_i est orthogonale à ϕ_0 , on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla f_\epsilon|^2 &\geq \lambda_0(\mathcal{D})b_i^2 \int_{\mathcal{D}_i} \phi_0^2 + \lambda_1(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}_i} g_i^2 \\ &= \lambda_0(\mathcal{D})b_i^2 + \lambda_0(\mathcal{D})c_i^2 + \eta \int_{\mathcal{D}_i} g_i^2, \end{aligned}$$

soit encore

$$(3) \quad \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla f_\epsilon|^2 \geq \lambda_0(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}_i} f_\epsilon^2 + \eta \int_{\mathcal{D}_i} (u - b_i)^2 \phi_0^2.$$

De plus, d'après la Formule de Barta (cf Lemme 3.3), on a

$$(4) \quad \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla f_\epsilon|^2 = \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla(u\phi_0)|^2 = \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla u|^2 \phi_0^2 + \lambda_0(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}_i} f_\epsilon^2.$$

En combinant (3) et (4), on obtient donc :

$$(5) \quad \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla f_\epsilon|^2 \geq \lambda_0(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}_i} f_\epsilon^2 + \max \left\{ \eta \int_{\mathcal{D}_i} (u - b_i)^2 \phi_0^2, \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla u|^2 \phi_0^2 \right\}.$$

La partie la plus technique de la preuve provient du lemme suivant.

Lemme 4.6. *Il existe une constante $A > 0$ telle que, avec les notations précédentes,*

$$\sum_{i \in G} \max \left\{ \eta \int_{\mathcal{D}_i} (u - b_i)^2 \phi_0^2, \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla u|^2 \phi_0^2 \right\} \geq A \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2.$$

Notons que puisque le support de f_ϵ est compact, toutes ces sommes sont finies.

Démonstration. Soit $i \sim j$ deux sommets de G reliés par une arête. La frontière commune $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$ contient une copie de l'une des zones de transition que nous avons marquées sur \mathcal{D} , que nous noterons H . C'est une hypersurface compacte, qui admet un voisinage tubulaire de largeur $R > 0$ dans $\mathcal{D}_i \cup \mathcal{D}_j$. Nous noterons ce voisinage $H \times [-R, R]$ en coordonnées de Fermi, c'est à dire que le point $(x, r) \in H \times [-R, R]$ sera identifié au point de N situé sur la géodésique orthogonale à H à distance $|r|$, avec la convention que $(x, r) \in \mathcal{D}_i$ lorsque $r > 0$. Quitte à prendre $R > 0$ suffisamment petit, les coordonnées de Fermi sont bien définies. La mesure de volume riemannienne sur $H \times [-R, R]$ s'écrit

$$dV_g(x, r) = \theta(x, r)^{n-1} dV_H(x) dr,$$

avec $\theta : H \times [-R, R] \rightarrow (0, \infty)$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $\theta_{min} : [-R, R] \rightarrow (0, \infty)$ une application lisse telle que pour tout $(x, r) \in H \times [-R, R]$, on ait $\theta(x, r) \geq \theta_{min}(r)$. Une telle application existe par compacité de H . Posons

$$E_{ij}^+ := \max \left\{ \eta \int_{H \times [0, R]} (u - b_i)^2 \phi_0^2 dV_g, \int_{H \times [0, R]} |\nabla u|_g^2 \phi_0^2 dV_g \right\},$$

on a

$$E_{ij}^+ \geq \min_{H \times [0, R]} \phi_0(x, r)^2 \max \left\{ \eta \int_H \int_0^R (u(x, r) - b_i)^2 \theta_{min}^{n-1}(r) dV_H(x) dr \right. \\ \left. + \int_H \int_0^R |\nabla u|_g^2 \theta_{min}^{n-1}(r) dV_H(x) dr \right\}.$$

Nous notons alors, pour $r \in [0, R]$,

$$U(r) := \frac{1}{\int_H \theta_{min}^{n-1}(r) dV_H(x)} \int_H u(x, r) \theta_{min}^{n-1}(r) dV_H(x) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(H)} \int_H u(x, r) dV_H(x)$$

la moyenne de u le long de chaque hypersurface équidistante à H . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie immédiatement que l'inégalité

précédente implique que

$$E_{ij}^+ \geq \min_{H \times [0, R]} \phi_0^2 \text{Vol}_{n-1}(H) \max \left\{ \eta \int_0^R (U(r) - b_i)^2 \theta_{\min}^{n-1}(r) dr, \int_0^R \left| \frac{dU}{dr} \right|^2 \theta_{\min}^{n-1}(r) dr \right\}.$$

Posons

$$\text{Vol}_{\min}(ij) = \text{Vol}_{n-1}(H) \int_0^R \theta_{\min}^{n-1}(r) dr,$$

qui est le volume de $H \times [0, R]$ pour la métrique riemannienne

$$g_{\min}(x, r) = \theta_{\min}^2(r) g_H(x) \oplus dr^2.$$

1^{er} cas

Si pour tout $r \in [0, R]$, on a $|U(r) - b_i| \geq \frac{1}{2}|U(0) - b_i|$, alors

$$E_{ij}^+ \geq \eta \min_{H \times [0, R]} \phi_0^2 \text{Vol}_{\min}(ij) \frac{1}{4} (U(0) - b_i)^2.$$

2nd cas : cas contraire.

Pour quantifier l'énergie de u dans ce second cas, nous utiliserons la notion de *capacité* suivante.

Le bord du tube $T_H^+ = H \times [0, R]$ est divisé en trois parties : les deux hypersurfaces parallèles H et $H_R = H \times \{R\}$, et le *bord latéral*

$$\partial^{\text{lat}}(T_H^+) = \partial T_H^+ \setminus (H \cup H_R) = \partial H \times (0, R).$$

Définition 4.3. La capacité de T_H^+ est

$$\text{Cap}(T_H^+) = \inf_f \left\{ \int_{T_H^+} |\nabla f|^2 dV_g; f|_H \equiv 0, f|_{H_R} \equiv 1 \right\},$$

où f toutes les applications sur T_H^+ qui sont lisses sur l'intérieur de T_H^+ , continues sur T_H^+ , et telles que $f \equiv 0$ sur H et $f \equiv 1$ sur H_R .

Des méthodes classiques d'EDP montrent qu'il existe un unique ψ lisse sur l'intérieur de T_H^+ , continu sur T_H^+ , tel que $\psi \equiv 0$ sur H , $\psi \equiv 1$ sur H_R et

$$\int_{T_H^+} |\nabla \psi|^2 dV_g = \text{Cap}(T_H^+).$$

Ce ψ est l'unique fonction harmonique pour le Laplacien issu de la métrique sur T_H^+ , qui vérifie $\psi \equiv 0$ sur H , $\psi \equiv 1$ sur H_R et les conditions de Neumann i.e. $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \equiv 0$ sur $\partial^{\text{lat}}(T_H^+)$. Ce ψ est parfois appelé *potentiel d'équilibre* de T_H^+ .

La proposition élémentaire suivante découle alors de l'unicité des fonctions harmoniques lorsque les conditions aux bords sont fixées.

Proposition 4.7. *Soit $f : T_H^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{H}^1 telle que $f \equiv a$ sur H et $f \equiv b$ sur H_R . Alors*

$$\int_{T_H^+} |\nabla f|^2 dV_g \geq (b - a)^2 \mathcal{C}ap(T_H^+).$$

Reprenons notre démonstration dans ce second cas, nous supposons donc qu'il existe $r \in (0, R]$ tel que $|U(r) - b_i| \leq \frac{1}{2}|U(0) - b_i|$. Alors

$$\text{Vol}_{n-1}(H) \int_0^R \left| \frac{dU}{dr} \right|^2 \theta_{\min}^{n-1}(r) dr \geq \mathcal{C}ap_{\min}(H \times [0, R]) \frac{1}{4} (U(0) - b_i)^2,$$

où $\mathcal{C}ap_{\min}(H \times [0, R])$ est la capacité de $H \times [0, R]$ muni de la métrique g_{\min} .

Dans les deux cas, nous obtenons

$$E_{ij}^+ \geq A'(U(0) - b_i)^2,$$

avec

$$(6) \quad A' = \min_{H \times [0, R]} \phi_0^2 \min \left\{ \eta \frac{1}{4} \text{Vol}_{\min}(ij), \frac{1}{4} \mathcal{C}ap_{\min}(H \times [0, R]) \right\}.$$

Posons

$$E_{ij}^- := \max \left\{ \eta \int_{H \times [-R, 0]} (u - b_i)^2 \phi_0^2 dV_g, \int_{H \times [-R, 0]} |\nabla u|_g^2 \phi_0^2 dV_g \right\},$$

par le même argument, on a

$$E_{ij}^- \geq A'(U(0) - b_j)^2.$$

Comme un nombre fini de zones de transitions est fixé sur \mathcal{D} une fois pour toute, et comme G agit par isométries, on peut supposer (quitte à la réduire) que cette constante A' est valable pour tous les $H \times [-R, R]$ qui correspondent à tous les $i \sim j$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in G} \max \left\{ \eta \int_{\mathcal{D}_i} (u - b_i)^2 \phi_0^2, \int_{\mathcal{D}_i} |\nabla u|^2 \phi_0^2 \right\} &\geq A \sum_{i \sim j} E_{ij}^+ + E_{ij}^- \\ &\geq A' \sum_{i \sim j} \{(U_{ij}(0) - b_i)^2 + (U_{ij} - b_j)^2\} \geq \frac{A'}{2} \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2. \end{aligned}$$

En posant $A := A'/2$, cela conclut la preuve de notre lemme. \square

D'après l'équation (5), on a

$$(7) \quad (\lambda_0(N) + \epsilon) \int_N f_\epsilon^2 \geq \int_N |\nabla f_\epsilon|^2 \geq \lambda_0(\mathcal{D}) \int_N f_\epsilon^2 + A \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2,$$

où on a vu que A vérifie

$$(8) \quad A \geq \frac{\min_{H \times [0, R]} \phi_0^2}{2} \min \left\{ \eta \frac{1}{4} \text{Vol}_{\min}(H \times [0, R]), \frac{1}{4} \mathcal{C}ap_{\min}(H \times [0, R]) \right\},$$

où H parcourt les $2v$ zones de transitions marquées sur le bord de \mathcal{D} .

De plus, on a vu en (3) que

$$(\lambda_0(N) + \epsilon) \sum_i a_i^2 \geq \lambda_0(\mathcal{D}) \sum_i b_i^2 + \lambda_1(\mathcal{D}) \sum_i c_i^2 = \lambda_0(\mathcal{D}) \sum_i a_i^2 + \eta \sum_i c_i^2.$$

On a donc

$$\sum_i a_i^2 - \sum_i b_i^2 = \sum_i c_i^2 \leq \frac{\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon}{\eta} \sum_i a_i^2.$$

L'inégalité précédente implique

$$\sum_i b_i^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon}{\eta}\right) \sum_i a_i^2.$$

Si $\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) \geq \eta$, alors comme $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M)$, le Théorème 4.2 est démontré. Sinon, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2}{\int_N f_\epsilon^2} &= \frac{\sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2}{\sum_i a_i^2} \geq \left(1 - \frac{\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon}{\eta}\right) \frac{\sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2}{\sum_i b_i^2} \\ &\geq \left(1 - \frac{\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon}{\eta}\right) \mu_0(G). \end{aligned}$$

Combiné avec (7), nous obtenons alors

$$\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon \geq A \left(1 - \frac{\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon}{\eta}\right) \mu_0(G),$$

soit

$$(\lambda_0(N) - \lambda_0(\mathcal{D}) + \epsilon) \left(1 + \frac{A\mu_0(G)}{\eta}\right) \geq A\mu_0(G),$$

qui donne finalement, puisque $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M)$,

$$(9) \quad \lambda_0(N) - \lambda_0(M) + \epsilon \geq \frac{A\eta}{\eta + A\mu_0(G)} \mu_0(G).$$

La constante $A > 0$, donnée par (8), ne dépend pas de ϵ , et d'après la Proposition 4.4, $\mu_0(G) > 0$ car G est non moyennable. Ceci conclut donc la preuve du Théorème 4.2. □

5. DOMAINES FONDAMENTAUX DES VARIÉTÉS GÉOMÉTRIQUEMENT FINIES

Dans cette section, nous montrerons que les hypothèses du Théorème 4.2 sont vérifiées dans le cas d'un revêtement

$$p : N = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma \rightarrow M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0,$$

dès que Γ_0 vérifie les hypothèses du Théorème 0.2, ce qui en conclura la preuve. La fin de ces notes est donc consacrée à la démonstration du résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$ et $N = \mathbb{H}/\Gamma$, avec $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$. Supposons que $\delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$, et que Γ_0 est convexe-cocompact ou de co-volume fini. Alors il existe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset N$ pour l'action de $G = \Gamma/\Gamma_0$, spectralement optimal et tel que $\lambda_1(\mathcal{D}) > \lambda_0(\mathcal{D})$.*

Avant d'entamer la preuve de ce théorème proprement dite, rappelons quelques points de théorie spectrale. Sur une variété Riemannienne (\mathcal{D}, g) non-compacte, éventuellement à bord. Le spectre du Laplacien (avec conditions de Neumann sur $\partial\mathcal{D}$ s'il est non-vide) est la réunion du *spectre discret*, composé de valeurs propres de multiplicités finies, et du *spectre essentiel*. On notera $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) \geq \lambda_0(\mathcal{D})$ le bas du spectre essentiel du Laplacien sur (\mathcal{D}, g) , ce n'est pas nécessairement une valeur propre. Si le bas du spectre $\lambda_0(M)$ est une valeur propre isolée, le théorème de Perron-Fröbenius nous assure que la fonction propre associée est strictement positive, et donc que $\lambda_0(\mathcal{D})$ est de multiplicité 1. On a donc la caractérisation suivante.

Lemme 5.2. *Soit (\mathcal{D}, g) une variété riemannienne (éventuellement à bord). Alors $\lambda_0(\mathcal{D})$ est une valeur propre isolée si et seulement si*

$$\lambda_0(\mathcal{D}) < \lambda_0^{ess}(\mathcal{D}).$$

De plus, le théorème de décomposition de Donnelly (cf [Don81]) nous dit que si $K \subset \mathcal{D}$ est un compact, alors

$$\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) = \lambda_0^{ess}(\mathcal{D} \setminus K),$$

où l'on a pris les conditions de Dirichlet sur ∂K , et toujours les conditions de Neumann sur $\partial\mathcal{D} \setminus \partial K$. Remarquons maintenant que lorsque \mathcal{D} a un bord, le Lemme de Barta 3.3 reste valable à condition que dans la formule, la fonction ϕ vérifie les conditions de Neumann au bord, i.e. que $\nabla\phi$ soit tangent à $\partial\mathcal{D}$. On obtient alors aisément la caractérisation suivante, analogue de la Proposition 3.2.

Lemme 5.3. *Supposons qu'il existe un compact $K \subset \mathcal{D}$, un réel $\lambda > 0$ et une fonction $\phi : \mathcal{D} \setminus K \rightarrow]0, +\infty[$, strictement positive, dont le gradient est tangent à $\partial\mathcal{D} \setminus K$, et qui vérifie*

$$\Delta\phi \geq \lambda\phi.$$

Alors $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) \geq \lambda$.

Démonstration du Théorème 5.1. Soit $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$, et $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ un sous-groupe normal avec $G = \Gamma_0/\Gamma$ non-moyennable. On note $N = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$, et $p : N \rightarrow M$ la projection canonique.

Supposons d'abord que Γ_0 est de co-volume fini. Alors $\delta(\Gamma_0) = n$ et $\lambda_0(M) = 0$ est une valeur propre associée à la fonction propre constante

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\text{Vol } M}}.$$

Soit $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ un domaine de Dirichlet pour l'action de Γ_0 . Par définition, le bord de $\tilde{\mathcal{D}}$ est constitué de segments et de rayons géodésiques. On pose

$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}/\Gamma \subset N$, par construction c'est un domaine fondamental pour l'action de G de volume fini. Si \mathcal{D} est compact, le spectre de \mathcal{D} est formé de valeurs propres isolées.

Sinon, il nous reste à montrer que $\lambda_0(\mathcal{D})$ est une valeur propre isolée ; il nous suffit donc de montrer que $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) > \lambda_0(\mathcal{D}) = 0$.

Lemme 5.4. *Le bas du spectre essentiel d'un polyèdre D de \mathbb{H}^{n+1} à bords géodésiques par morceaux et de volume fini vérifie $\lambda_0^{ess}(D) \geq \frac{n^2}{4}$.*

Démonstration. Soit $D \subset \mathbb{H}^{n+1}$ un polyèdre à bords géodésiques par morceaux, de volume fini.

Soit $H \subset \mathbb{H}^{n+1}$ une horosphère basée en un point du bord à l'infini qui ne touche pas D . On pose $K = D \cap H$. Comme D est de volume fini, lorsque H est assez grande, dans le modèle du demi-plan supérieur le domaine $D \setminus K$ est la réunion d'un nombre fini de cusps de la forme

$$C = \{(x_0, x_1, \dots, x_n); \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \leq x_i \leq b_i \text{ et } x_0 \geq c_H\},$$

où les a_i et b_i sont des constantes, et $c_H > 0$ dépend de H . Définissons sur chacun de ces cusps, la fonction $f = x_0^{n/2}$, on a vu à la Proposition 3.4 qu'alors $\Delta f = \frac{n^2}{4}f$. Cette fonction f est strictement positive, et son gradient est tangent à $\partial(D \setminus K)$. Par le Lemme 5.3, on a donc bien $\lambda_0^{ess}(D) \geq \frac{n^2}{4}$. \square

On peut montrer qu'en fait, sous les hypothèses du lemme, $\lambda_0^{ess}(D) = \frac{n^2}{4}$; nous ne nous en servons pas.

Supposons maintenant que Γ_0 est convexe-cocompact de volume infini, et $\delta = \delta(\Gamma_0) > \frac{n}{2}$. D'après le Théorème 3.1, $\lambda_0(M) = \delta(n - \delta)$ est une valeur propre associée à la fonction

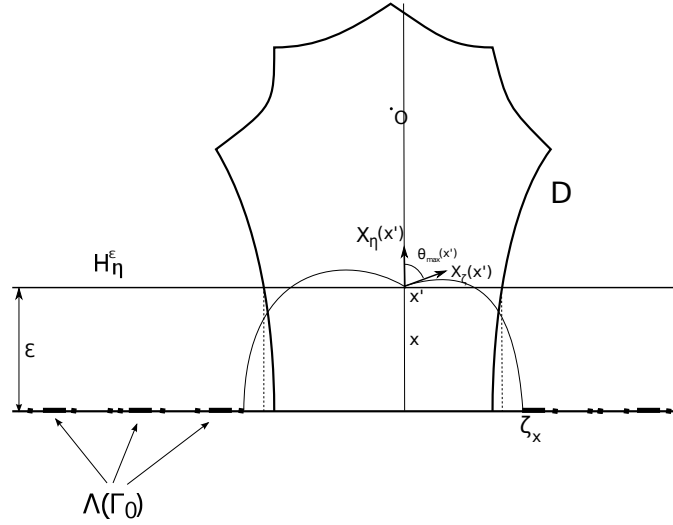
$$(10) \quad \phi_0(x) = \|\mu_{\tilde{x}}\| = \int_{\partial\mathbb{H}^{n+1}} e^{\delta\mathcal{B}_\zeta(o, \tilde{x})} d\mu_o(\zeta),$$

où $o \in \mathbb{H}^{n+1}$ est une origine arbitraire, \tilde{x} un relevé arbitraire de x , et μ_o est la mesure de Patterson-Sullivan de Γ_0 vue de o . Il nous faut donc construire un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset N$ pour l'action de G , tel que $\nabla\phi_0$ soit tangent à $\partial\mathcal{D}$, et tel que

$$\lambda_1(\mathcal{D}) > \lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M).$$

Soit $D \subset \mathbb{H}^{n+1}$ un domaine de Dirichlet pour l'action de Γ_0 . Par construction, ∂D est la réunion d'un nombre fini faces totalement géodésiques de codimension au moins 1. On note $\partial^\infty D$ son bord à l'infini : comme M est convexe-cocompacte, $\partial^\infty D$ est un compact pas nécessairement connexe de $\partial^\infty\mathbb{H}^{n+1}$. C'est par construction un domaine fondamental pour l'action de Γ_0 sur $\partial^\infty\mathbb{H}^{n+1}$, qui ne rencontre pas l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma_0)$, et qui a autant de composantes connexes que M a de bouts.

Le champ de vecteurs $\nabla\phi_0$ n'est a priori pas tangent à ∂D . Nous allons cependant montrer que, lorsque l'on se "rapproche" de $\partial^\infty D$ (en un sens

FIGURE 2. Domaine D dans le demi-espace, η à l'infini

qu'on définira), $\nabla\phi_0$ devient proche d'être tangent à ∂D . Cela nous permettra de construire un nouveau domaine \mathcal{D} , qui sera une déformation de D construite de sorte que $\nabla\phi_0$ soit tangent à $\partial\mathcal{D}$.

Plaçons-nous d'abord dans le modèle du demi-espace

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), x_0 > 0\},$$

en supposant que le point à l'infini que nous noterons η n'est pas un point de $\partial^\infty D$. Pour tout $\epsilon > 0$, notons $\text{Hb}(\eta, \epsilon)$ l'horoboule, centrée en η , donnée par

$$\text{Hb}(\eta, \epsilon) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), x_0 \geq \epsilon\},$$

comme décrit par la figure 2. On notera $\text{Hs}(\eta, \epsilon)$ l'horosphère qui la borde. Puisque $\eta \notin \partial^\infty D$, pour tout $\epsilon > 0$ l'intersection $D \cap \text{Hb}(\eta, \epsilon)$ est vide ou compacte.

Pour tout $\zeta \in \partial^\infty \mathbb{H}^{n+1}$, on pose

$$X_\zeta(x) = -\nabla\mathcal{B}_\zeta(o, x)$$

le champ de vecteur normalisé tangent aux rayons géodésiques pointant vers ζ . En particulier $X_\eta = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$ est le champ de vecteur "vertical" normalisé. Posons maintenant

$$X(x) = \frac{\nabla\phi_0}{\delta\phi_0}(x),$$

champ de vecteur sur \mathbb{H}^{n+1} colinéaire à $\nabla\phi_0$. On a le lemme suivant.

Lemme 5.5. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, il existe $\theta_{max}(\epsilon)$ tel que pour tout $x \in D \setminus H_\eta^\epsilon$, on a*

$$\cos(\theta_{max}(\epsilon)) \leq \|X(x)\| \leq 1$$

et

$$n + \delta (\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1) \leq \operatorname{div}(X)(x) \leq n.$$

De plus, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_{max}(\epsilon) = 0$.

Démonstration. D'après l'expression de ϕ_0 donnée par (10), on a pour tout $x \in \mathbb{H}^{n+1}$,

$$(11) \quad \nabla \phi_0(x) = \delta \int_{\Lambda(\Gamma_0)} (\nabla \mathcal{B}_\zeta(o, x)) e^{\delta \mathcal{B}_\zeta(o, x)} d\mu_o(\zeta),$$

où μ_0 est une mesure positive portée par l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma_0)$. D'après l'inégalité de Jensen, la norme étant convexe,

$$\|\nabla \phi_0\|(x) \leq \delta \int_{\Lambda(\Gamma_0)} \|X_\zeta\|(x) e^{\delta \mathcal{B}_\zeta(o, x)} d\mu_o(\zeta) = \delta \phi_0(x).$$

On a donc pour tout $x \in D \setminus K_\epsilon$,

$$(12) \quad \frac{\|\nabla \phi_0\|}{\delta \phi_0} \leq 1,$$

Établissons maintenant la borne inférieure. Pour cela, nous allons montrer qu'en dehors d'un compact, X_ζ est presque colinéaire à X_η (η est le point à l'infini fixé une fois pour toute). Pour tout $x \in D$, posons

$$\theta_{max}(x) = \sup \left\{ \theta \in [0, \pi] \text{ t.q. } \forall \zeta \in \Lambda(\Gamma_0), -\theta \leq \langle \widehat{X_\eta}, \widehat{X_\zeta} \rangle \leq \theta \right\}.$$

Comme l'ensemble limite est un compact de la sphère à l'infini, pour tout $x \in D$, il existe un $\zeta_x \in \Lambda(\Gamma_0)$ tel que $\theta_{max}(x) = \left| \langle \widehat{X_\eta}, \widehat{X_{\zeta_x}} \rangle \right|$. Afin de visualiser la fonction θ_{max} , plaçons-nous maintenant dans le modèle du demi-plan supérieur avec, comme point à l'infini, un élément $\xi \in \partial^\infty D$. La figure 3 est isométrique à la figure 2 après ce changement de modèle.

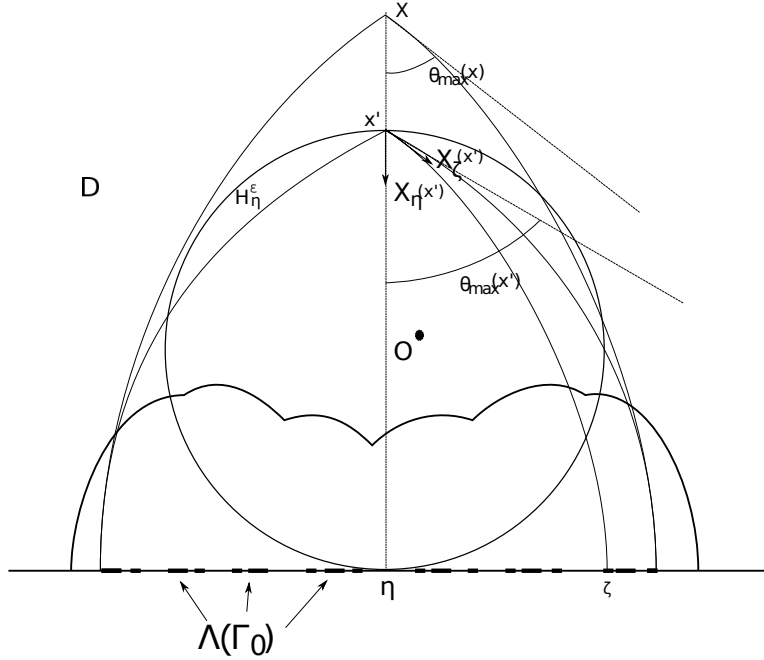
Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $D \setminus \operatorname{Hb}(\eta, \epsilon)$ soit difféomorphe à $\partial^\infty D \times]0, \epsilon[$. En particulier, $D \cap \operatorname{Hb}(\eta, \epsilon)$ est compact. Posons

$$\theta_{max}(\epsilon) = \max \{ \theta_{max}(x); x \in \operatorname{Hs}(\eta, \epsilon) \cap D \}.$$

Comme l'espace hyperbolique est à courbure négative, le lemme suivant découle de la figure 3.

Lemme 5.6. *Pour tout $x \in D \setminus \operatorname{Hb}(\eta, \epsilon)$, $\theta_{max}(x) \leq \theta_{max}(\epsilon)$. De plus,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_{max}(\epsilon) = 0.$$

FIGURE 3. Domaine D dans le demi-espace, ξ à l'infini

Démonstration. Soit $x \in D \setminus \text{Hb}(\eta, \epsilon)$, soit $\xi_{x\eta}$ le rayon géodésique issu de x pointant vers η , et soit $x' \in \xi_{x\eta} \cap \text{Hs}(\eta, \epsilon)$ le point d'intersection de $\xi_{x\eta}$ avec l'horosphère $\text{Hs}(\eta, \epsilon)$. Par comparaison des angles avec l'espace euclidien, $\theta_{max}(x) \leq \theta_{max}(x') \leq \theta_{max}(\epsilon)$.

Comme le flot géodésique contracte exponentiellement les horosphères dans la direction stable, on montre qu'il existe deux constantes $A, B > 0$ uniformes telles que

$$\theta_{max}(x) \leq A e^{-Bd(x,x')} \theta_{max}(x').$$

Nous laissons les détails (fastidieux à écrire mais sans difficulté) de ce point au lecteur. Cela implique bien que $\theta_{max}(\epsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Remarquons maintenant que d'après (11), à normalisation près $\nabla\phi_0$ est une combinaison convexe de vecteurs $\nabla\mathcal{B}_\zeta(o, x) = X_\zeta(x)$. De ce fait, dès que $\theta_{max}(\epsilon) < \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in D \setminus \text{Hb}(\eta, \epsilon)$, tous les vecteurs $X_\zeta(x)$ pointent vers le même demi-espace : on a donc nécessairement $\nabla\phi_0(x) \neq 0$. Soit $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit pour que $D \setminus \text{Hb}(\eta, \epsilon)$ soit difféomorphe à $\partial^\infty D \times]0, \epsilon[$ et pour que $\theta_{max}(\epsilon_0) < \frac{\pi}{2}$, on a donc pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$,

$$X(x) = \frac{\int_{\Lambda(\Gamma_0)} (\langle X_\eta, X_\zeta \rangle X_\eta + \sqrt{1 - \langle X_\eta, X_\zeta \rangle^2} Y(x)) e^{\delta\mathcal{B}_\zeta(o,x)} d\mu_o(\zeta)}{\phi_0(x)}$$

où $Y(x)$ est orthogonal à X_η et normalisé, et

$$|\langle X_\eta, X_\zeta \rangle| \in [\cos(\theta_{max}(\epsilon)), 1].$$

On a donc bien en particulier

$$(13) \quad \cos(\theta_{max}(\epsilon)) \leq \frac{\int_{\Lambda(\Gamma_0)} |\langle X_\eta, X_\zeta \rangle| e^{\delta \mathcal{B}_\zeta(o,x)} d\mu_o(\zeta)}{\phi_0(x)} \|X_\eta\| \leq \|X\| \leq 1,$$

ce qui montre le premier point du Lemme 5.5. Maintenant, un calcul élémentaire montre que

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{\Delta\phi_0}{\delta\phi_0} - \frac{1}{\delta} d\left(\frac{1}{\phi_0}\right) (\nabla\phi_0) = n - \delta + \frac{\|\nabla\phi_0\|^2}{\delta\phi_0^2}.$$

En reportant (13) dans cette équation, on obtient bien pour tout $x \in D \setminus \operatorname{Hb}(\eta, \epsilon)$,

$$n - \delta (\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1) \leq \operatorname{div}(X(x)) \leq n,$$

ce qui conclut la preuve du Lemme 5.5. \square

Nous allons utiliser ce Lemme pour construire notre domaine fondamental. Précisons auparavant quelques unes de ses conséquences pour notre fonction ϕ_0 .

Lemme 5.7. *La fonction ϕ_0 vérifie les propriétés suivantes.*

- (1) *Il existe un compact $K \subset M$ tel que $\nabla\phi_0$ ne s'annule pas sur $M \setminus K$.*
- (2) *L'ensemble des points critiques de ϕ_0 forme une stratification en sous-variétés analytiques compactes de M , de codimension au moins 1.*
- (3) *Chaque point critique de ϕ_0 possède au moins une direction stable, en particulier ϕ_0 n'a pas de minimum local.*

Démonstration. Le (1) découle immédiatement du Lemme 5.5.

Comme ϕ_0 vérifie l'équation $\Delta\phi_0 = \lambda_0(M)\phi_0$, et comme M est une variété hyperbolique dont la métrique est analytique, la fonction ϕ_0 est analytique réelle. Ses points critiques forment donc une stratification en sous-variétés analytiques compactes de M . Comme le volume de M est infini, ϕ_0 n'est pas constante. Par le principe d'unique continuation d'Aronszajn (cf [Aro57]), $\nabla\phi_0$ ne peut donc s'annuler sur un ouvert. La stratification est donc de codimension au moins 1. Elle est compacte d'après le point (1), ce qui conclut la preuve du point (2).

Le point (3) découle immédiatement de $\Delta\phi_0 = \lambda_0(M)\phi_0 > 0$ puisque, en un point critique, $\Delta\phi_0$ est l'opposé de la trace de la matrice hessienne de ϕ_0 . La différentielle seconde de ϕ_0 a donc, en chaque point critique, au moins une valeur propre strictement négative. \square

Soit maintenant $\epsilon_1 \in]0, \epsilon_0[$. Posons $S_{\epsilon_1} = D \cap \operatorname{Hs}(\eta, \epsilon_1)$, par construction de ϵ_0 , c'est un morceau d'horosphère ayant autant de composantes connexes que M a de bouts. De plus, d'après le Lemme 5.5, $\nabla\phi_0$ est transverse à S_{ϵ_1} , rentrant vers l'intérieur de D . Posons

$$\tilde{D} = \overline{\{\Phi_t(S_{\epsilon_1}); t \in \mathbb{R}\}} \subset \mathbb{H}^{n+1},$$

où $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de gradient associé à ϕ_0 .

Lemme 5.8. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ , à bord lisse par morceaux (i.e. sauf sur une réunion disjointe de sous-variétés de dimension au plus $n - 1$). De plus, $\nabla\phi_0$ est tangent à $\partial\tilde{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. L'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ est feuilleté par des lignes de gradient de ϕ_0 par construction, le champ de vecteurs $\nabla\phi_0$ est donc tangent à $\partial\tilde{\mathcal{D}}$.

Notons $Sing(M)$ l'ensemble des points singuliers de ϕ_0 sur M . D'après le point (3) du Lemme 5.7, l'ensemble des lignes de gradients qui relient deux points de $Sing(M)$ est de codimension au moins 1 (tout point critique a une variété stable non-vide). De ce fait, pour tout point $x \in M$ sauf pour une réunion finie de sous-variétés analytiques compactes de codimension au moins 1, la ligne de gradient $\{\Phi_t(x), t \in \mathbb{R}\}$ part à l'infini. L'adhérence dans M des lignes de gradients qui partent à l'infini est donc M . Or, par construction, $\tilde{\mathcal{D}}$ contient un (et un seul) relevé de toute ligne de gradient qui part à l'infini, et leur complémentaire est une réunion finie de variétés de codimension 1. Donc $\tilde{\mathcal{D}}$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \mathbb{H}^{n+1} .

Il reste à montrer que $\partial\tilde{\mathcal{D}}$ est lisse par morceaux. La surface S_{ϵ_1} est un morceau d'horosphère (lisse) dont le bord est un polyèdre géodésique convexe de \mathbb{H}^{n+1} de codimension 2. De plus, le flot de gradient $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe de difféomorphisme. Le bord de $\tilde{\mathcal{D}}$ est donc la réunion de l'image de ∂S_ϵ par Φ_t , qui est \mathcal{C}^∞ par morceau, des points critiques de ϕ_0 , et éventuellement de sous-variétés reliant ces points critiques entre eux. Comme les points critiques forment une réunion finie de variétés analytiques de codimension au moins 1 dans M , le bord de $\tilde{\mathcal{D}}$ est bien lisse par morceaux. \square

On pose maintenant

$$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}/\Gamma \subset \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma = N.$$

C'est par construction un domaine fondamental pour l'action de $G = \Gamma_0/\Gamma$, à bord lisse par morceaux, et $\nabla\phi_0$ est tangent à $\partial\mathcal{D}$. Pour conclure la démonstration du Théorème 5.1, il nous reste donc à prouver le lemme suivant.

Lemme 5.9. *Le bas du spectre essentiel pour le problème de Neumann vérifie*

$$\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) \geq \frac{n^2}{4}.$$

En particulier, le bas du spectre $\lambda_0(\mathcal{D}) = \lambda_0(M) = \delta(n - \delta)$ est une valeur propre isolée.

Démonstration. Soit $\epsilon \in]0, \epsilon_1[$. Posons $\tilde{K}_\epsilon = \tilde{\mathcal{D}} \cap \text{Hb}(\eta, \epsilon)$, et $K_\epsilon = \tilde{K}_\epsilon/\Gamma$.

Considérons de nouveau sur $\mathcal{D} \setminus K_\epsilon$ le champ de vecteurs

$$X(x) = \frac{\nabla\phi_0}{\delta\phi_0}.$$

D'après le Lemme 5.5, on a donc pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus K_\epsilon$,

$$\|X\|(x) \in [\cos(\theta_{max}(\epsilon)), 1] \quad \text{et} \quad \text{div}(Z) \in [n + \delta(\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1), n].$$

De plus, par construction X est tangent à $\partial\mathcal{D}$.

Rappelons que par le Principe de Décomposition (cf [Don81]), on a

$$\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) = \lambda_0^{ess}(\mathcal{D} \setminus K_\epsilon)$$

où $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D} \setminus K_\epsilon)$ désigne le bas du spectre essentiel du Laplacien sur $\mathcal{D} \setminus K_\epsilon$ avec condition de Neumann sur $(\partial\mathcal{D}) \setminus K_\epsilon$ et de Dirichlet sur ∂K . Rappelons également que la *constante de Cheeger* de $\mathcal{D} \setminus K_\epsilon$ associée à ces conditions de Dirichlet sur ∂K_ϵ et de Neumann sur $(\partial\mathcal{D}) \setminus K$ est

$$\mathfrak{h}(\mathcal{D} \setminus K) = \inf_S \frac{\text{Vol}_{n-1}(S)}{\text{Vol}_n(\text{int}(S))},$$

où S parcourt l'ensemble des hypersurfaces compactes de $\mathcal{D} \setminus K_\epsilon$ et telles que S borde une unique composante connexe compacte dont le bord n'intersecte pas K . On note $\text{int}(S)$ cette composante connexe. Notons que pour toute telle hypersurface $S \subset \mathcal{D} \setminus K_\epsilon$, l'aire du bord de $\text{int}(S)$ vérifie

$$\text{Vol}_{n-1}(\partial\text{int}(S)) \geq \text{Vol}_{n-1}(S),$$

avec égalité dès que $\partial\text{int}(S)$ ne rencontre pas $\partial\mathcal{D}$.

Enfin, d'après l'inégalité classique de Cheeger (cf [Che70]),

$$(14) \quad \lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) = \lambda_0(\mathcal{D} \setminus K) \geq \frac{\mathfrak{h}(\mathcal{D} \setminus K_\epsilon)^2}{4}.$$

Soit $S \subset \mathcal{D} \setminus K_\epsilon$ une hypersurface compacte. On a d'après la formule de Stokes

$$\{n + \delta(\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1)\} \text{Vol}_n(\text{int}(S)) \leq \int_{\text{int}(S)} \text{div}(X) = - \int_{\partial\text{int}(S)} g(X, \nu) d\text{Vol}_{n-1},$$

où ν désigne la normale rentrante à $\partial\text{int}(S)$. De plus,

$$- \int_{\partial\text{int}(S)} g(X, \nu) d\text{Vol}_{n-1} = - \int_S g(X, \nu) d\text{Vol}_{n-1} \leq \text{Vol}_{n-1}(S),$$

car X est tangent à $\partial\mathcal{D}$ et de norme inférieure à 1.

On a donc

$$\frac{\text{Vol}_{n-1}(S)}{\text{Vol}_n(\text{int}(S))} \geq n + \delta(\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1),$$

ce pour toute hypersurface compacte S de $\mathcal{D} \setminus K_\epsilon$. On a donc

$$\mathfrak{h}(\mathcal{D} \setminus K_\epsilon) \geq n + \delta(\cos^2(\theta_{max}(\epsilon)) - 1),$$

d'où en faisant tendre ϵ vers 0, d'après la minoration (14), $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) \geq \frac{n^2}{4}$. \square

En utilisant [Bro81], on montre qu'ici encore $\lambda_0^{ess}(\mathcal{D}) = \frac{n^2}{4}$. Nous n'en avons pas besoin ici. Ceci conclut donc la démonstration du Théorème 5.1 dans le cas convexe-cocompact de volume infini.

□

Notons pour finir que la démonstration précédente (et donc le Théorème 0.2) s'étend sans difficulté au cas où Γ_0 est géométriquement fini, à condition que les cusps de $M = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma_0$ soient tous de rang maximal et que le groupe de revêtement $G = \Gamma_0/\Gamma$ ne contienne pas d'éléments paraboliques. On peut prendre alors un domaine fondamental pour l'action du groupe de revêtement qui contient tout le coeur convexe, et répéter la construction précédente pour obtenir un domaine fondamental spectralement optimal. En revanche, lorsque le groupe de revêtement contient des éléments paraboliques, tout domaine fondamental pour l'action du groupe de revêtement coupe des cusps jusque dans l'ensemble limite. Une étude plus poussée de ϕ_0 dans les cusps serait donc nécessaire pour obtenir un domaine spectralement optimal. Le cas où M contient des cusps de volume infini est encore un peu plus délicat.

RÉFÉRENCES

- [Aro57] N. Aronszajn. *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. 36 :9 (1957), 235–249.
- [Bowd95] B. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J., 77 :1, (1995), 229–274.
- [Bro81] R. Brooks, *A Relation between growth and the spectrum of the Laplacian*, Math. Z. 178 (1981), 501–508
- [Bro82] R. Brooks *Amenability and the spectrum of the Laplacian*. Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 6, 87-89 (1982)
- [Bro85] R. Brooks, *The bottom of the spectrum of a Riemannian covering*, J. Reine. Angew. Math 357 (1985), 101–114
- [Che70] Jeff Cheeger. *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, in *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [CdV98] Yves Colin de Verdière. *Spectres de graphes*, volume 4 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [Coo] M. Coornaert *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. 159 :2 (1993), 241–270.
- [Don81] Harold Donnelly. *On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold*, Topology 20 :1 (1981), 1–14.
- [G-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer Universitext, 3rd ed., 2004
- [O-P04] J.P. Otal and M. Peigné, *Principes variationnels et Groupes Kleinien*, Duke Math. J., 125 :1 (2004), 15–44
- [Pat] Patterson, S. J. *The limit set of a Fuchsian group*. Acta Math. 136 (1976) 241-273
- [Pei] M. Peigné, *On the Patterson-Sullivan measure of some discrete group of isometries*, Israel J. Math. 133 (2003), 77–88.

- [Rob03] T. Roblin, *Ergodicité et équidistribution en courbure négative. (French) [Ergodicity and uniform distribution in negative curvature]* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 95 (2003).
- [Rob05] Roblin, Thomas *Un théorème de Fatou pour les densités conformes avec applications aux revêtements galoisiens en courbure négative.* Israel J. Math. 147 (2005), 333–357.
- [Rob11] T. Roblin, *Comportement harmonique des densités conformes et frontière de Martin* Bull. Soc. Math. Fr. 139 :1 (2011), 97–128.
- [Sul79] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Pub. Math. I.H.É.S 50 (1979), 171–202.
- [Sul84] D. Sullivan, *Entropy, Hausdorff measures old and new and limit set of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math. 153 (1984), 259–277.
- [Sul87] D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian Geometry*, J. Diff. Geom. 25 (1987), 327–351.

LPMA / UMR 7599, UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (P6) - BOÎTE COURRIER
188, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

E-mail address: `thomas.roblin@upmc.fr`

LABORATOIRE JEAN LERAY, UNIVERSITÉ DE NANTES, 2, RUE DE LA HOUSSINIÈRE -
BP 92208, F-44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE

E-mail address: `samuel.tapie@univ-nantes.fr`