



HAL
open science

Quels besoins de formation sur la numération des entiers à l'école primaire ? D'une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource à la formation des enseignants.

Frédéric Tempier

► To cite this version:

Frédéric Tempier. Quels besoins de formation sur la numération des entiers à l'école primaire ? D'une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource à la formation des enseignants.. Etude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants., 2017. hal-01724743

HAL Id: hal-01724743

<https://hal.science/hal-01724743>

Submitted on 6 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre 7

Quels besoins de formation sur la numération des entiers à l'école primaire ? D'une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource vers la formation des enseignants

Frédéric Tempier

Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de Didactique André Revuz

frederick.tempier@u-cergy.fr

Introduction

La numération écrite chiffrée des nombres entiers est un savoir tellement naturalisé chez les adultes que la perception de ses enjeux d'enseignement est difficile, notamment pour les enseignants débutants. Il s'agit pourtant d'une notion essentielle pour les mathématiques de l'école primaire. Elle s'appuie sur deux principes qui sont indissociables :

- à chaque rang de l'écriture en chiffres correspond une unité de numération (par exemple au troisième rang on écrit des centaines) : c'est le principe de position ;
- chaque unité est égale à dix unités de l'ordre inférieur (par exemple une centaine = dix dizaines) : c'est le principe décimal.

Les difficultés d'apprentissage ou d'enseignement de la numération ne sont pas nouvelles (Bednarz & Janvier, 1984; DeBlois 1996; Fuson et *al.*, 1997; Ma, 1999; ...). Un point notamment partagé dans ces travaux concerne l'enseignement/apprentissage du principe décimal, notamment pour les nombres supérieurs à cent. Par exemple, la centaine peut être interprétée à la fois comme une centaine, dix dizaines ou cent unités.

Concernant les enseignants en formation initiale, Thanheiser (2009) a montré qu'ils ne mobilisent pas toujours ces relations quand elles sont en jeu dans les techniques de calcul posé : certains considèrent la centaine uniquement comme cent unités ; d'autres interprètent l'écriture chiffrée uniquement comme une juxtaposition de chiffres. Ces conceptions ne sont pas suffisantes pour permettre de développer chez les élèves une compréhension fine de notre système de numération écrit.

En France, l'étude de la transposition didactique de la numération à travers les programmes officiels et des manuels de 3^{ème} primaire récents (Chambris, 2008; Tempier, 2010) montre qu'une place centrale est donnée aux tâches mettant en jeu le principe de position de la numération : l'association entre l'écriture en chiffres et le nom du nombre, la comparaison et les décompositions canoniques du type $1304 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 4$. Cela a des conséquences :

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

- sur les pratiques des enseignants français pour qui le principe décimal n'est pas toujours un enjeu d'enseignement (Tempier, 2013) ;
- sur les apprentissages des élèves : un certain nombre d'élèves rencontrent des difficultés dans des tâches mettant en jeu les relations entre unités (Tempier, 2013), comme « 1 centaine = ... dizaines » (48% de réussite¹), « 60 dizaines = ... centaines » (31% de réussite) et « dans 764 il y a ... dizaines » (39% de réussite).

Ces constats nous ont amené à faire le choix de nous lancer dans la conception d'une ressource qui permettrait d'enrichir les pratiques des enseignants et de surmonter ces difficultés. Cette ressource devait être à la fois :

- utile, c'est à dire permettre aux enseignants de s'appropriier les enjeux de l'enseignement de la numération et aux élèves de construire les connaissances visées,
- acceptée et utilisable par les enseignants pour leur permettre de se l'approprier facilement pour leur travail de préparation et lors de la mise en œuvre en classe.

Au cours de nos expérimentations, la comparaison des analyses *a priori* et *a posteriori* des séances menées par différents enseignants nous ont amené à identifier certains décalages entre nos prévisions et les mises en œuvre effectives dans les classes et à faire des hypothèses sur les raisons de ces décalages : était-ce un effet des choix de mise en scène de la situation fondamentale (valeurs des variables didactiques, milieu, ...) ou bien un effet de la description des situations dans la ressource ? Nous avons pris en compte ces décalages afin de faire des améliorations des situations et de la ressource. Mais il est aussi apparu que ce qui était parfois en jeu concernait les connaissances didactiques des enseignants ou les contraintes institutionnelles. Dans ces deux cas, une simple modification de la ressource pourrait s'avérer insuffisante.

L'objectif de ce texte est de questionner les connaissances nécessaires des enseignants pour un enseignement adapté de la numération à l'école primaire. Quels besoins de formation des enseignants est-il possible de dégager de ces expérimentations ?

Nous avons restreint notre objet d'étude à l'enseignement de la numération en classe de 3^{ème} primaire (élèves de 8/9 ans) pour les nombres à quatre chiffres car il y a de nombreuses relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs. De plus, c'est une étape essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Nous allons commencer par présenter la méthodologie et les cadres théoriques utilisés ainsi que la ressource construite. Ensuite nous présenterons des besoins essentiels de formation des enseignants que nous avons identifiés.

¹ Sur 104 élèves de 8/9 ans en France.

1. Cadre théorique et méthodologie

Nous nous appuyons sur différentes expérimentations (Tempier, 2013) :

- une première étude de cas des pratiques de trois enseignants « ordinaires » qui utilisent leurs ressources usuelles, sans intervention du chercheur ;
- une ingénierie didactique de développement d'une ressource construite initialement par le chercheur et qui a donné lieu à trois expérimentations.

Nous ne détaillerons ici que le cadre théorique et la méthodologie utilisés pour l'ingénierie didactique. La conception de la ressource s'appuie sur différents cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques auxquels nous empruntons des « outils de conception » (Ruthven et al., 2009) : la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) pour la notion de milieu, et de variable didactique et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) pour la notion d'organisation mathématique (ou praxéologie) et d'ostensif. Ces outils sont aussi mobilisés pour l'analyse des mises en œuvre en classe et sont alors associés à l'analyse des couples contrat/milieu et dévolution/institutionnalisation (Brousseau, 1998; Perrin-Glorian & Hersant, 2003).

Nous utilisons une méthodologie d'« ingénierie didactique pour le développement d'une ressource et la formation des enseignants » (Perrin-Glorian, 2011) afin de questionner la diffusion, dans l'enseignement ordinaire, d'une ingénierie didactique « pour la recherche », ce qui demande de prévoir deux niveaux de questionnement indissociables :

- celui de la pertinence des situations : les situations proposées permettent-elles de produire les connaissances prévues chez les élèves ? (comme dans une ingénierie didactique « pour la recherche ») ;
- celui de « l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire » (Perrin-Glorian, 2011) qui demande d'étudier les adaptations réalisées par les enseignants lors de la mise en œuvre des situations.

Plusieurs cycles d'expérimentations sont nécessaires à la mise au point de la ressource (allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique dans des classes). Le dispositif expérimental pour les trois cycles d'expérimentation est décrit dans le tableau ci-dessous (figure 1). Pour mieux associer certains enseignants à la conception de la ressource, en plus des entretiens individuels avec chaque enseignant, nous avons organisé des réunions de travail avec une partie des enseignants avant et après l'utilisation de la ressource (« groupe de travail », GT). Nous observons également certaines séances réalisées par les enseignants de ce groupe. Les autres enseignants utilisent la ressource dans des conditions plus ordinaires (« groupe libre », GL), sans observation du chercheur. Des évaluations des élèves sont réalisées dans les deux groupes. La première ressource construite par le chercheur s'enrichit donc au fur et à mesure des expérimentations par les analyses des observations de classe ainsi que par les échanges et réunions avec les enseignants. Le chercheur reste responsable des modifications apportées progressivement à la ressource.

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

Expérimentation	Nombre d'enseignants	« Contrat » d'expérimentation pour le suivi de la ressource	Nombre de séances observées	Évaluations des élèves
Pré-expérimentation (version 0)	2	Suivi de la ressource proposée avec adaptations possibles.	La plupart des séances mises en œuvre.	Avant/après
Expérimentation 1 (version 1)	4 (GT) / 3 (GL)	Suivi des 5 problèmes principaux. Adaptations possibles pour la mise en œuvre. Construction d'une séquence à la charge de l'enseignant.	3 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après
Expérimentation 2 (version 2)	3 (GT) / 3 (GL)	Liberté totale dans l'utilisation de la ressource.	2 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après

Figure 2 : tableau du dispositif expérimental de l'ingénierie didactique

Il y a une évolution des conditions d'expérimentation avec les enseignants au cours des cycles. De plus en plus de liberté est donnée aux enseignants dans la mise en œuvre des situations pour progressivement s'approcher des conditions « réelles » d'utilisation d'une ressource par des enseignants, hors contexte de recherche.

Pour l'analyse des séances nous faisons une comparaison entre l'analyse *a priori* des situations de la ressource et l'analyse des déroulements observés, et nous cherchons à identifier les raisons des décalages éventuellement observés. Pour l'analyse des séquences, nous comparons les séquences réalisées au canevas didactique proposé dans la ressource. Pour répondre à la question posée dans ce texte sur les besoins de formation des enseignants en numération, nous utilisons ces analyses et nous nous appuyons sur les décalages apparus entre les analyses *a priori* et *a posteriori* des séances menées par les enseignants, notamment lorsqu'ils entraînent une gestion inadaptée des situations. Cela permet de mettre en évidence des connaissances pour l'enseignement de la numération qui posent des difficultés aux enseignants, et donc des besoins de formation.

2. Présentation de la ressource

2.1. Principes généraux

La ressource est disponible en ligne². Elle porte uniquement sur l'enseignement de la numération. Elle est donc destinée à un usage ponctuel par les enseignants. Il n'est pas envisagé qu'elle soit suivie à la lettre par les enseignants ; les usages qu'ils pourront en faire seront nécessairement variés. Nous y proposons des éléments qui nous semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée des situations par l'enseignant. La détermination de ces éléments essentiels fait partie des

² La version actuelle est consultable à l'adresse suivante : <http://numerationdecimale.free.fr>.

questions de recherche. Une place importante est faite à la description des enjeux de savoir. Des éléments sont aussi proposés pour aider l'enseignant à construire une séquence à partir des situations proposées et à situer l'utilisation de ces savoirs dans la progression mathématique travaillée au cours de l'année, notamment en lien avec des thèmes comme le calcul posé.

2.2. Choix des situations et de leur mise en scène dans la ressource

Pour la conception des situations, nous nous appuyons sur la situation fondamentale du nombre de Brousseau (1995) : un actant A et un actant B doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes. Mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps (la seule correspondance terme à terme ne suffit pas pour réussir). Sous ces contraintes, l'utilisation du nombre (parlé ou écrit) est la solution la plus économique à ce problème. Pour ce travail sur la numération écrite, nous ne considérons que le cas de collections ayant au moins cent (voire mille) éléments et nous imposons que le code de désignation utilisé soit celui de l'écriture en chiffres. Une condition essentielle pour un travail sur la numération écrite (en particulier pour le principe décimal) est l'introduction dans cette situation des unités de numération (que nous noterons UN pour simplifier) pour décrire les quantités (unités, dizaines, centaines, milliers). En effet, elles permettent de décrire (à l'oral comme à l'écrit) des nombres d'unités supérieurs à dix contrairement aux mots de la numération parlée en France (Brissiaud, 2005; Chambris 2008) : on peut dire « vingt centaines » alors que l'on ne peut pas dire « vingt cents » dans notre système de numération parlée.

Pour la construction des situations et du canevas didactique de la ressource, nous prendrons appui sur cette situation fondamentale en faisant des choix pour sa « mise en scène ». Concernant la progression générale, le choix a été fait de commencer par une situation de « dénombrement », (passer d'une collection ou d'une écriture en unités de numération à une écriture chiffrée), avant de proposer une situation de « commande » (passer d'une écriture chiffrée à une écriture en unités de numération). Le tableau ci-dessous (figure 2) montre les différentes variantes de ces deux situations qui sont à considérer. Pour la situation de dénombrement, c'est seulement dans la troisième variante que les conversions entre unités sont véritablement un enjeu car la réunion de deux collections amène à avoir plus de dix unités à certains ordres³. Dans l'exemple donné ici en réunissant les deux collections on obtient 12C (12 centaines) qu'il faut convertir en 1M et 2C. La situation de commande permet de réinvestir les connaissances en partant cette fois de la donnée de l'écriture chiffrée pour produire une écriture en unités en tenant compte de différentes contraintes sur le stock du marchand. Cela permet de travailler les décompositions de nombres selon différentes unités.

³ Dans la version 2 de la ressource nous proposons de dénombrer directement une collection partiellement groupée plutôt qu'une réunion de deux collections.

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

Situation de dénombrement de collections	V1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	V2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	V3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1 ^{re} collection : 2M 8C 1D 3U 2 ^e collection : 4C 1M 2U. Nombres possibles proposés : 31215, 3215, 3315, 4215
Situation de commande de collections	V1 : Commandes de bâchettes	Il nous faut 2615 bâchettes, mais le marchand n'a plus de bâchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bâchettes, de dizaines de bâchettes et de bâchettes seules ?
	V2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

Figure 3 : les situations (version 1 de la ressource)

À partir d'une première étude de la transposition didactique de la numération (Tempier 2010) et de ces cycles d'expérimentation dans des classes ordinaires, nous allons maintenant présenter les connaissances pour l'enseignement de la numération qui sont source de difficultés chez enseignants et les besoins de formation associés (de manière conjointe).

3. Identification de besoins pour la formation des enseignants

3.1. Comprendre l'intérêt d'un travail sur les deux aspects de la numération.

Ce premier point a émergé de nos premiers travaux (Tempier, 2010) et a été une des raisons qui nous ont amené à nous intéresser à la conception d'une ressource sur la numération. Les programmes et certains manuels ne font pas de l'aspect décimal de la numération un enjeu essentiel pour l'enseignement de la numération (*Ibidem*). Cela a une influence sur le projet des enseignants que nous avons observés (*Ibid.*, 2013). Cela a aussi des influences sur la mise en œuvre de ce projet et même jusqu'à la façon dont les enseignants interprètent les erreurs ou difficultés des élèves.

Il est donc nécessaire que les enseignants prennent conscience de l'insuffisance de ce qui est proposé actuellement en numération dans les programmes et dans certains manuels et le déficit que cela peut entraîner pour l'apprentissage des élèves. Nous avons pu constater lors de nos différentes expérimentations que les enseignants étaient sensibles aux difficultés qu'ils pouvaient

constater chez leurs propres élèves à l'issue de l'évaluation initiale qu'ils avaient dû leur faire passer. Ce constat a été déterminant dans l'engagement des enseignants participant à l'expérimentation. Ils ont pris conscience de difficultés non perçues jusqu'alors car les tâches proposées couramment dans les exercices ou évaluations ne permettent pas de les faire émerger.

Il est important que les enseignants perçoivent aussi l'intérêt pour les élèves d'une meilleure compréhension de la numération au-delà du seul travail sur les entiers, pour l'apprentissage du calcul posé, du calcul mental et des grandeurs et mesures. De plus, ces connaissances s'approfondissent lors du travail sur les grands nombres et sur les nombres décimaux. Le principe décimal s'étend par prolongement des relations entre unités d'ordres supérieurs (avec cependant des noms d'unités s'appuyant sur certains ordres particuliers : milliers, millions, etc.) et dans l'autre sens sur les décimaux, pour ce qui concerne les relations entre unités/dixièmes, dixièmes/centièmes, etc.

3.2. Concevoir ou s'appropriier la logique d'une progression sur la numération prenant en compte un travail sur les relations entre unités.

Lors de l'expérimentation 2, les enseignants ont eu une liberté totale dans l'utilisation de la ressource. Nous avons pu étudier comment ils se sont appuyés sur le canevas didactique proposé pour construire leur séquence. Nous avons alors pu observer ce qui suit : certains enseignants prennent plus ou moins de libertés avec le canevas didactique ; par exemple des enseignants suivent la chronologie générale mais « sautent » certains passages de la progression, d'autres « piochent » des exercices alternativement dans chaque situation principale sans prendre appui sur la logique de l'organisation didactique proposée dans la ressource. Tout se passe comme si, pour certains enseignants, la ressource était utilisée comme une banque d'exercices dans laquelle ils viennent « piocher » en fonction de leurs envies ou de leurs besoins.

Tous les enseignants n'utilisent ni la variante de dénombrement d'une collection partiellement groupée, ni les exercices de conversion⁴ : il y a donc toute une partie de la ressource qui n'est pas utilisée. Ceci n'est pas sans lien avec le fait que ce sont des situations/exercices qui sont peu présents dans les manuels actuels (Tempier, 2010).

Pour prendre en compte l'intérêt du travail sur les relations entre unités (principe décimal) pour leurs élèves, les enseignants devront être amenés à modifier leur progression sur la numération en jouant sur certaines variables didactiques (notamment le nombre d'unités de chaque ordre) dans les situations de dénombrement ou de commandes mais aussi en introduisant un travail spécifique de conversion entre unités. La ressource semble constituer une aide sur le premier point. Pour le second, des apports de formation seront nécessaires pour amener les enseignants à s'appropriier la tâche de conversion entre unités et l'intégrer à leur séquence. En effet,

⁴ Conversions entre unités de numération, comme par exemple : 60 centaines = ... milliers ou 3 milliers = ... centaines.

l'expérimentation a montré que les élèves ont besoin de connaissances sur les relations entre unités avant d'aborder des situations de commandes de collections pour que les décompositions qu'ils utilisent s'appuient sur ces relations (dans 1234 il y a 12 centaines car 1 millier c'est 10 centaines). Si le travail sur les commandes vient trop tôt, le risque est que l'on ne cherche qu'un « découpage » adéquat de l'écriture chiffrée.

3.3. Comprendre le rôle du matériel et des unités de numération pour en faire un usage adapté en classe

Le troisième besoin de formation identifié est davantage lié aux mises en œuvre des situations de la ressource dans les classes. En effet, il est proposé dans la ressource d'utiliser :

- Un matériel de numération constitué de bâchettes en bois dont les groupements successifs se font : avec un élastique (1 dizaine), un sachet (1 centaine) et une boîte (1 millier). Les entretiens avec les enseignants montrent que cela n'est pas une pratique courante pour des nombres au-delà du millier.
- Les unités de numération (Chambris, 2008) : pour décrire les groupements et pour faire des conversions d'unités. Les unités semblent actuellement principalement utilisées dans les manuels pour nommer les colonnes du tableau de numération.

Dans la ressource, les unités de numération sont utilisées à la fois dans la présentation des situations pour décrire les groupements (par exemple « 2 milliers de bâchettes, 8 centaines de bâchettes ... »), dans les éléments de savoirs associés aux situations et dans les apports généraux pour l'enseignant où le choix de leur utilisation est justifié par comparaison avec les écritures chiffrées des puissances de 10 (1, 10, 100, 1000, ...) qui sont actuellement davantage utilisées dans les manuels (Chambris, 2008).

Lors des expérimentations 1 et 2, nous avons pu remarquer que les enseignants considèrent que le matériel constitue la plus grande nouveauté apportée par cette ressource. Notamment, la première variante de dénombrement d'une collection en vrac apparaît pour certains comme centrale dans le processus alors qu'elle vise surtout à poser le problème à l'étude et à constituer différents groupements qui seront utiles pour la suite de la séquence (pour les vérifications notamment). Il y a peu de savoirs mathématiques construits dans cette première variante.

Au cours de l'expérimentation 1, nous avons pu étudier l'utilisation faite par les enseignants des unités de numération (UN) dans les séances observées. Pour le dénombrement d'une collection totalement groupée (variante 2), nous avons pu constater une utilisation des UN par les enseignants pour décrire les rangs de l'écriture chiffrée (tableau de numération), conformément à ce qui est proposé dans la ressource. Mais pour les situations mettant en jeu le principe décimal (dénombrement d'une réunion de deux collections et situation de commande), plusieurs types de résistance à l'utilisation des UN sont apparus :

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

- rejet de l'utilisation des UN pour décrire les groupements;
- référence prégnante au matériel de numération quand les relations entre unités sont en jeu;
- absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions.

Le rejet d'utilisation des unités de numération pour décrire les groupements a été observé dans une seule classe, celle de Mme A. Malgré les propositions de la ressource, l'enseignante utilise les expressions "boîtes", "sachets", etc. pour décrire les groupements matériels. Elle utilise pourtant toujours les UN pour décrire les rangs de l'écriture chiffrée comme l'illustre cet extrait d'une séance (dénombrement, variante 3) où Mme A. revient sur la conversion de 12 centaines en 1 millier 2 centaines en lien avec la retenue de l'addition (nous avons souligné le vocabulaire relatif aux groupements ainsi que l'utilisation des UN) :

Mme A. : huit plus quatre qu'est-ce qui se passe ici dans les centaines ?

Un élève : douze

Mme A. : on retrouve nos douze sachets sauf qu'est-ce qui se passe ?

Un élève : on met une retenue.

L'enseignante finit d'écrire l'addition posée au tableau :

Mme A. : et bien voilà pourquoi on met une retenue parce qu'on va garder que deux sachets pour les centaines et qu'ici avec nos dix, ça va nous faire une boîte de mille en plus. [...] On comprend mieux maintenant la retenue : c'est notre petite boîte de mille en plus.

On voit qu'il y a bien un vocabulaire pour parler des rangs (UN) et un autre pour les groupements ("boîtes", "sachets" ...).

Le deuxième type de résistance, liée à une référence prégnante au matériel de numération quand les relations entre unités sont en jeu, a été observé dans des classes où les enseignants acceptent d'utiliser les unités de numération pour décrire les groupements, conformément aux propositions de la ressource. Dans ces classes, lorsqu'il y a plus de dix unités à certains ordres, l'enseignant fait une référence quasi systématique aux groupements matériels (réels ou dessinés). Ce phénomène peut se constater par exemple dans cet extrait de la mise en œuvre de la variante 3 de la situation de dénombrement dans la classe de Mme B. (nous soulignons les éléments du discours de Mme B. qui ramène vers le matériel). Un élève (Mar) vient dessiner la réunion des deux collections au tableau (boîtes, sachets, etc.). Mme B. demande à cet élève comment on peut trouver le résultat. Face à la difficulté liée à la prise en compte des 12 sachets dessinés au tableau, Mme B. demande à un autre élève (Jor) de l'aider « sans lui donner la bonne réponse, juste le mettre sur la voie » :

Jor : en fait comme t'en as douze, ça fait plus de centaines [...] Si t'as dix centaines, ça revient à quoi ?

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

Mme B. : qu'est-ce que tu peux faire ? Si t'as dix pochettes, qu'est-ce que tu peux faire ?

Mar : ah oui un millier. *L'élève dessine une nouvelle boîte au tableau.*

Mme B. : Les dix, tu vas les mettre dans une boîte. Alors enlève-les maintenant, les dix que tu as mis dans la boîte. Barre-les ou efface-les. Ah. [...] Quand on a dix sachets, on peut les mettre dans une boîte. Et là, le problème, c'est qu'on n'en avait pas dix, on en avait douze. Donc, dès que ça dépasse dix, on peut les mettre dans une boîte de mille.

Alors que les élèves utilisent les UN à l'oral, l'enseignante reformule en ramenant au matériel et aux actions sur le matériel (mettre dix sachets dans une boîte). Elle montre aussi le matériel qui est posé sur son bureau pour illustrer ce qu'elle dit. Cette prégnance du matériel pourrait être guidée par une volonté des enseignants d'aider les élèves les plus fragiles (comme Mar) pour lesquels ils anticipent les difficultés liées aux relations entre unités.

Enfin le troisième type de résistance, l'absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions, a été observé dans les quatre classes, même dans celles où, par moments, les unités de numération ont été utilisées à l'oral pour faire des conversions. En reprenant l'extrait de séance précédent, on voit par exemple que Mme B. raisonne sur le dessin des groupements au tableau sans jamais écrire la conversion suggérée par l'élève Mar (12 centaines = 1 millier 2 centaines). Un peu plus tard dans cette même séance, alors qu'un élève explique les relations entre unités qu'il a utilisées pour trouver le nombre total de bûchettes (« sept centaines et trois centaines ça fait dix »), l'enseignante n'écrit pas ces conversions mais continue de faire référence au matériel (« j'ai transformé mes sacs, je les ai mis dans une boîte puisque j'en ai dix. »). Il aurait été possible ici, au contraire, d'utiliser l'écriture $7C + 3C = 10C = 1M$, ce qui aurait permis à la fois de souligner le raisonnement utilisé par cette élève, d'en garder une trace et de permettre aux autres élèves de se l'approprier. L'utilisation d'une écriture abrégée des unités de numération (contrairement aux exemples proposés dans la ressource) pourrait faciliter leur utilisation pour les élèves.

Tout cela nous permet de penser qu'il y aurait besoin de travailler sur les unités de numération en formation pour en comprendre l'intérêt. Il faut pour cela faire la distinction entre ce qu'on appelle couramment les « groupements/échanges » et les relations entre unités. Le premier type d'activités se situe dans une problématique matérielle : grouper/dégrouper pour organiser une collection (grouper 12 sachets en 1 boîte et 2 sachets) et le deuxième type, dans une problématique mathématique (convertir entre unités pour changer d'écriture : $3M\ 12C\ 5U = 4M\ 2C\ 5U$) permettant de justifier la réalisation des groupements/échanges. Ce sont les relations entre unités qui ont un caractère général (que l'on utilise des bûchettes, de la monnaie, un boulier, ... on convertit toujours 10 dizaines en 1 centaine) alors que pour chacun de ces matériels on effectue des activités de groupements/échanges spécifiques (grouper dix paquets dans un sachet, échanger dix billets contre un billet, activer une boule de la colonne située à gauche, ...). Pourtant, pour accéder aux relations entre unités on peut penser qu'il est important de s'appuyer sur de telles activités de

groupements/échanges. Les résistances observées chez les enseignants pourraient témoigner d'un rapport empirique aux objets mathématiques comme cela a été observé chez des enseignants du secondaire par Job et Schneider (dans cet ouvrage). Un travail en formation pourrait consister à s'interroger sur le rôle des unités de numération pour amener les élèves à un travail sur les relations entre unités à partir d'activités de groupements et échanges.

3.4. Connaître les techniques pour décomposer/recomposer un nombre et les savoirs qui les justifient afin d'identifier les éléments à institutionnaliser en classe.

Dans la version 1 de la ressource, une tentative a été faite de description des savoirs en jeu pour chaque situation. Voici les constats que nous avons pu faire dans les classes, sur la formulation des techniques permettant de traduire une écriture en unités en écriture chiffrée et réciproquement.

Pour la situation de dénombrement (passer d'une écriture en unités à l'écriture chiffrée), tout se passe comme si on avait affaire à deux techniques différentes : une technique quand on a moins de dix unités, une autre quand on en a plus. Le tableau de numération est seulement utilisé dans le cas où il y a moins de dix unités à tous les ordres d'unités donc quand c'est le principe de position qui est en jeu.

Pour la situation de commande (passer d'une écriture chiffrée à une écriture en unités), nous avons constaté une absence de formulation de technique dans toutes les classes. Plus précisément, lors des phases collectives de conclusion, nous n'avons vu que des vérifications des commandes proposées par les élèves, c'est-à-dire un travail qui s'est toujours réalisé de l'écriture en unités vers l'écriture chiffrée et très rarement dans l'autre sens, celui visé par la situation de commande.

En formation des enseignants, il nous semble important de rendre explicite, en appui sur la situation de dénombrement, les techniques de traduction d'une écriture en unités en écriture chiffrée (et réciproquement) en lien avec les savoirs mathématiques qui les justifient. Pour traduire une écriture en unités en écriture chiffrée par la technique dite « de position » il faut tenir compte de trois conditions :

- respect du rang de chaque unité dans l'écriture en chiffres ;
- présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres ;
- présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres (afin d'assurer l'unicité de l'écriture en chiffres d'un nombre).

La deuxième technique à expliciter, en appui sur la situation de commande, est la technique de décomposition (une écriture en unités en écriture chiffrée → écriture en unités). Elle est justifiée en appui sur le principe de position mais aussi sur les relations entre unités. Elle consiste à faire un « découpage » (troncature) approprié de l'écriture chiffrée. Par exemple $1234 = 12C\ 34U$. Le nombre de centaines s'obtient directement à partir de l'écriture chiffrée en considérant le rang des

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

centaines comme nouvelle référence (et non le rang des unités simples) : on obtient 12 centaines. On peut lire les unités simples restantes en reprenant le rang des unités simples comme référence et en considérant le nombre qui reste : 34 unités. La formulation est complexe. Un travail en formation, peut aussi consister à rechercher des formulations plus adaptées.

Conclusion

L'objectif de ce texte était d'identifier des besoins de formation des enseignants sur la numération des nombres supérieurs à mille à l'école primaire. L'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource permet d'identifier de tels besoins car certaines résistances rencontrées dans la mise en œuvre de situations semblent difficiles à dépasser spontanément. Par exemple, concernant les relations entre unités qui sont un nœud de notre travail, nous avons montré des besoins de formation : pour comprendre l'enjeu de ce travail dans la compréhension de la numération ; pour comprendre comment ces relations entre unités interviennent dans les situations de dénombrement et de commande par un jeu sur l'organisation de la collection ; pour formuler ces relations entre unités (avec les unités de numération) et les institutionnaliser dans les mises en œuvre des séances.

Ce travail nous a aussi amené à mieux comprendre les attentes des enseignants sur la numération. Il apparaît notamment une forte sensibilité des enseignants aux difficultés des élèves mais aussi à l'utilisation d'un matériel de numération. Ces deux points pourraient ne pas être indépendants : les enseignants utilisent le matériel dans le but d'aider les élèves à surmonter leurs difficultés, dans une logique de réussite immédiate (Butlen, Pezard & Masselot, 2004). Cela pourrait être un point d'appui important pour la formation : on peut considérer ces questions comme des « portes d'entrée possibles » sur le terrain des pratiques professionnelles des enseignants « pouvant servir de base à la discussion et au déclenchement d'une réflexion mathématique ancrée dans la pratique » (Bednarz & Proulx, 2010, p. 23). La prise en compte du lien entre l'utilisation du matériel (activités de groupements/échanges) et le travail sur les relations entre unités est une question essentielle pour la formation.

Les besoins identifiés ont émergé dans le contexte des expérimentations de l'ingénierie didactique, mais ils ont une portée qui dépasse le cadre de cette ressource. Et il y aurait aussi d'autres besoins à étudier concernant des aspects moins développés dans cette ressource (aspect ordinal du nombre, lien entre numération écrite et numération parlée, etc.). De plus, se pose la question de l'adaptation des besoins identifiés aux enseignants débutants. Les choix effectués pour cette ressource ayant été fait pour des enseignants expérimentés, sont-ils adaptés également pour des novices ? Existe-t-il des besoins de formation plus spécifiques pour ce public ?

Les cadres théoriques utilisés dans cette ingénierie didactique - la Théorie des Situations Didactiques et la théorie anthropologique du didactique - ont eu une influence essentielle sur l'identification des besoins de formation. Ceux-ci concernent, en effet, la compréhension des enjeux mathématiques et didactiques en lien avec les situations proposées et les variables didactiques

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

associées, une certaine vigilance vis-à-vis de la constitution et de l'utilisation d'un milieu adapté (matériel de numération, unités de numération) pour la dévolution et la régulation, et enfin l'identification des savoirs mathématiques à formuler et à institutionnaliser.

Tout cela constitue des points d'appui pour la formation des enseignants, sans toutefois donner les clés de leur appropriation par les enseignants en formation. À ce stade de notre travail, la diffusion à des formateurs laisserait à leur charge une grande partie de l'organisation de la formation : mise en place de scénarios de formation, présentation de la ressource aux enseignants, etc. Il existe des scénarios « classiques » de formation initiale ou continue des enseignants visant à mieux comprendre les enjeux de la numération par des activités dans d'autres systèmes de numération (additifs ou hybrides) ou dans des systèmes positionnels non décimaux. Un exemple est développé dans Thanheiser (2015). Même s'ils permettent de faire évoluer les conceptions des enseignants sur la numération, la question de leur influence sur les pratiques professionnelles des enseignants reste posée. Le cadre d'analyse des situations de formation proposé par la COPIRELEM (Braconne-Michoux dans cet ouvrage; Mangiante et *al.*, à paraître;) nous semble fournir une piste intéressante pour enrichir ce type de situations de formation puisqu'il est prévu différents niveaux d'exploitation possibles ne se limitant pas à une analyse de l'activité mathématique mais envisageant des analyses didactiques et pédagogiques plus ou moins décontextualisés et amenant les formés à investir différentes postures vis-à-vis des savoirs en jeu.

Une perspective pour la poursuite de la conception de cette ressource pourrait être de l'enrichir en prévoyant deux niveaux d'utilisation, pour les enseignants et pour les formateurs ; ce qui amènerait à poursuivre les expérimentations par des ingénieries de formation. Cela amènerait aussi à réfléchir à une articulation entre situations de formation et situations d'enseignement de la numération présentées dans la ressource. Enfin cela permettrait plus généralement de questionner l'usage d'une ressource d'enseignement dans la formation des enseignants, que la formation soit initiale ou continue.

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

Références bibliographiques

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, 33, 5-31
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2010). Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation. e-293*, 21-36.
- Braconne-Michoux, A (2017). Une ressource pour le développement des compétences professionnelles : le manuel. Un exemple d'exploitation en formation initiale. Dans A. Braconne-Michoux, P. Gibel & I. Oliveira (coord.), *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants*. (pp. 169-193). Québec : CRIRES.
- Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.
- Brousseau, G. (1995). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP*, 400, 831-850.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Butlen D., Pezard M. & Masselot P. (2004). *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP*. Dans M.L. Peltier (dir). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
- Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, 89, 39-70.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques* 16(1), 71-128.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.
- Ma, L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Mahwah, New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates.
- Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. & Winder, C. (à paraître). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. *Actes du colloque de l'Association pour la Recherche en Didactique Comparée (ARCD) de 2016 à Toulouse*.
- Perrin-Glorian, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. Dans C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants

- Perrin-Glorian, M.J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en didactique des mathématiques* 23(2), 217-276.
- Ruthven, K., Leach, J., Laborde, C. & Tiberghien, A. (2009). Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher*, 38(5), 329-342.
- Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86, 59-90.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7.
- Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 251–281.
- Thanheiser, E. (2015). Developing prospective teachers' conceptions with well-designed tasks: explaining successes and analyzing conceptual difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 141-172.