



HAL
open science

**La numération décimale de position à l'école primaire.
Une ingénierie didactique pour le développement d'une
ressource.**

Frédérick Tempier

► **To cite this version:**

Frédérick Tempier. La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.. Séminaire national de didactique des mathématiques ARDM, Mar 2015, Paris, France. hal-01724591

HAL Id: hal-01724591

<https://hal.science/hal-01724591>

Submitted on 6 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION À L'ÉCOLE PRIMAIRE. UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE POUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE RESSOURCE

Frédéric TEMPIER

Université Cergy-Pontoise, LDAR

frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé

Cette recherche étudie la prise en compte du principe décimal de la numération lors de l'introduction des nombres supérieurs à mille, en troisième année d'école primaire. En nous appuyant sur les cadres de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques, nous avons d'abord construit une organisation mathématique de référence et une situation fondamentale de la numération, pour étudier les différentes étapes de la transposition didactique. Un premier résultat est le constat d'un manque de prise en compte du principe décimal de la numération de position dans les manuels et programmes actuels ainsi que dans les pratiques. Notre étude se poursuit par la détermination de conditions que devrait vérifier une ressource pour aider les enseignants à améliorer la prise en compte de ce principe. Pour cela nous utilisons la méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource visant à étudier à la fois la pertinence des situations construites et leur adaptabilité à l'enseignement ordinaire. Différents cycles de conception-usage sont prévus : élaborer une première version, analyser son utilisation par des enseignants, l'adapter en une seconde version, etc. Les résultats de l'étude concernent la pertinence des situations et leur appropriation par les enseignants.

Mots clés

Numération, nombre entier, école primaire, ressource, ingénierie didactique, enseignant.

INTRODUCTION

Dans cette thèse (Tempier 2013), je m'intéresse à l'apprentissage de la numération écrite chiffrée, qui est une notion essentielle pour les mathématiques de l'école primaire. Elle s'appuie sur deux principes qui sont indissociables : un principe décimal selon lequel chaque unité de numération est définie comme étant égale à dix unités de l'ordre inférieur et un principe de position définissant le rang d'écriture de chaque unité dans l'écriture chiffrée (EC).

L'apprentissage de la numération pose des difficultés aux élèves que ce soit pour les nombres à deux chiffres ou pour les nombres plus grands. S'approprier la signification de l'écriture en chiffres demande dans un premier temps de comprendre la notion d'*unité* (Fosnot & Dolk 2001, Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2010, Houdement et Chambris 2013), à la base des systèmes de numération, c'est-à-dire l'idée que dix peut former un tout, une nouvelle unité, la dizaine, dont on écrit le nombre au deuxième rang (à partir de la droite). Or beaucoup d'élèves ne font pas le lien entre le deuxième chiffre de l'EC et la quantité correspondante. La dizaine fait référence uniquement à une position (Ross 1989, Kamii & Joseph 1988, Thompson & Bramald 2002, Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2010). Et comme l'a montré Mounier (2010), la numération parlée peut ne pas être une aide pour l'apprentissage

des règles de fonctionnement de la numération écrite.

Pour les nombres supérieurs à cent, de nouvelles relations entre les unités apparaissent. Par exemple la centaine peut être interprétée à la fois comme cent unités ou encore dix dizaines (Fuson et al. 1997, Thanheiser 2009). Le nombre 123 peut alors être considéré comme 123 unités (simples), 1 centaine 2 dizaines et 3 unités ou 12 dizaines 3 unités. Le dernier type de décomposition semble plus difficile à acquérir car la numération parlée n'aide pas puisqu'on ne dit pas « douze-dix-trois » à l'oral (Brissiaud 2005).

On peut recenser de nombreuses difficultés relatives à l'appropriation du principe décimal dans les travaux de recherches sur les nombres supérieurs à cent, comme par exemple :

- difficulté à s'approprier les relations entre unités et interpréter une écriture chiffrée en lien avec ces unités (Bednarz et Janvier 1984, DeBlois 1996)
- difficultés à généraliser des relations entre unités malgré une connaissance de groupements matériels (DeBlois 1996, Thomas 2004).

Ces relations entre unités peuvent pourtant être utiles pour comprendre les techniques de calcul posé des quatre opérations. La tâche de conversion entre unités, comme par exemple écrire 30 centaines en milliers ou inversement, qui pourrait permettre aux élèves de mieux s'approprier les relations entre unités, a disparu à partir des années 1980 environ (Chambris 2008), remplacée en partie par le type de tâche *nombre de*, qui en est un cas particulier (« quel est le nombre de centaines dans 3280 ? » par exemple).

Tout cela m'a amené à chercher à mieux comprendre l'enseignement de la numération actuel en France concernant en particulier la prise en compte de ce savoir essentiel qu'est le principe décimal et à essayer d'étudier des conditions pour tenter d'améliorer l'existant.

1. PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE, MÉTHODOLOGIE

Ma problématique peut s'énoncer selon deux axes :

- préciser ces premiers constats sur la façon dont est pris en charge le principe décimal de la numération dans les programmes et manuels actuels ainsi que dans les classes,
- étudier des possibilités pour amener les enseignants à mieux prendre en compte le principe décimal dans leur pratique en utilisant une ressource.

Un enjeu de la thèse est aussi de concevoir une ressource pour l'enseignement ordinaire qui soit à la fois :

- utile, c'est-à-dire qui permette aux enseignants de s'approprier les enjeux de l'enseignement de la numération et aux élèves de construire les connaissances visées,
- utilisable par les enseignants, donc compatible avec leurs pratiques,
- et acceptée par les enseignants.

Pour aborder cette double problématique j'ai fait le choix de restreindre mon objet d'étude à l'enseignement de la numération en classe de CE2, lors du travail sur les nombres à quatre chiffres, car il y a de nombreuses relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs et donc de nombreuses décompositions de nombres possibles. De plus, c'est une étape essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Pour mon premier axe de recherche j'utilise principalement la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard 1999, Bosch et Chevallard 1999). Elle s'avère bien adaptée puisqu'elle permet d'étudier des praxéologies mathématiques à la fois du côté de l'institution didactique ainsi que celles mises à l'étude dans les classes. La notion de transposition didactique (Chevallard 1991) permet, dans ce cadre, de rendre compte des phénomènes de transformations des savoirs depuis leur production jusqu'à leur enseignement, ce que l'on peut résumer par ce schéma de Bosch et Gascon (2005) :



Figure 1 : schéma de la transposition didactique

Elle permet aussi d'éclairer certains aspects des pratiques des enseignants en prenant en considération leur assujettissement aux praxéologies institutionnelles. Mes premières questions concernent alors la prise en compte du principe décimal de numération aux différentes étapes de la transposition didactique.

Pour le deuxième axe de recherche je m'appuie principalement sur la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau 1998). Elle fournit des outils pour concevoir et étudier des situations à usage didactique (notamment situation fondamentale, milieu, variables didactiques) ainsi que leur réalisation en classe en appui sur les couples contrat/milieu et dévolution/institutionnalisation. Dans ce cadre les questions portent à la fois sur les situations permettant de mettre en scène les savoirs visés et sur leur description dans une ressource. En particulier se pose la question des éléments essentiels des situations qu'il faut décrire aux enseignants pour en permettre une gestion adaptée. Pour cela je m'appuie sur la méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource, définie par Perrin-Glorian (2011). Ce qui fait la spécificité de cette ingénierie par rapport à une ingénierie pour la recherche est le fait de considérer deux niveaux d'étude : celui des situations et de leur validité et celui de la conception d'une ressource pour les enseignants.

On peut résumer la méthodologie générale de la thèse par le schéma suivant.

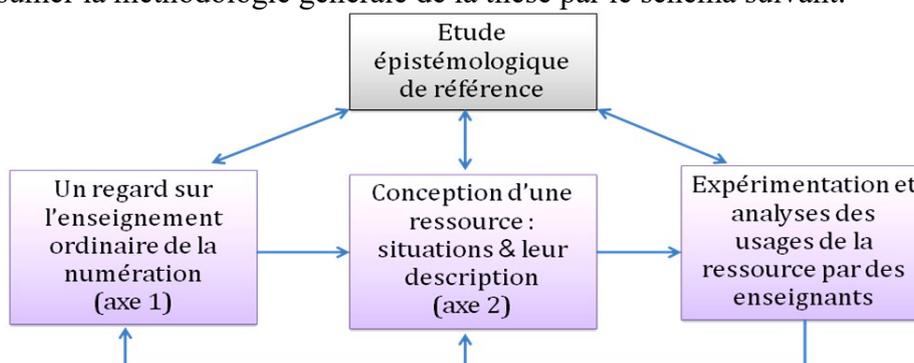


Figure 2 : schéma général de la méthodologie

On peut y voir les relations entre les deux axes de recherche qui s'enrichissent l'un l'autre : l'étude de la transposition didactique sert de point d'appui pour la conception d'une ressource afin que cette ressource s'insère au mieux dans les pratiques des enseignants. Et réciproquement les analyses effectuées suite à l'expérimentation de la ressource par différents enseignants permettent de préciser les constats sur l'enseignement de la numération dans les classes et des contraintes institutionnelles.

J'utilise une méthodologie par cycles pour l'ingénierie. Il est en effet essentiel de réaliser des allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique.

Que ce soit en TAD ou en TSD l'étude de l'enseignement ordinaire de la numération ou la conception de situations nécessitent de se donner un point de vue épistémologique. Cela se fait respectivement par la recherche d'une Organisation Mathématique de référence en TAD (Bosch & Gascon 2005) et d'une Situation Fondamentale en TSD (Brousseau 1998, Bloch 2005, Bessot 2011). La situation fondamentale permet d'enrichir le modèle de l'OM de référence en fournissant des raisons d'être à certains types de tâches de cette OM.

2. UN REGARD SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION

Une première partie de mon travail a consisté à chercher à se donner un regard sur

l'enseignement actuel de la numération.

Les données de l'étude

Je me suis appuyé sur différents types de données pour étudier les différentes étapes de la transposition didactique. Pour l'OM apprise, j'ai proposé une évaluation sur les nombres à trois chiffres en début d'année de CE2 afin de faire le point sur les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres. Entre 103 et 187 élèves ont passé les différents items. Pour l'OM à enseigner je me suis appuyé sur les programmes officiels depuis 2002, les évaluations nationales CE2, 6^{ème} et CM2, ainsi que sur quatre manuels scolaires de CE2. Pour l'OM enseignée, j'ai mené une étude de cas de trois enseignants de CE2 sur le travail sur les nombres à 4 chiffres, sans intervention du chercheur. Il s'agissait d'étudier à la fois leur projet de séquence (à travers l'OM locale qu'ils concevaient) ainsi que la mise en œuvre de séances dans la classe. J'ai analysé en particulier les séances susceptibles de mettre en jeu le principe décimal, si possible.

L'OM de référence

Pour faire ces analyses je me suis appuyé sur l'OM de référence. La recherche d'une OM de référence commence d'abord avec la recherche d'une théorie de la numération qui soit adaptée à l'écologie des savoirs à l'école primaire. Je me réfère à la théorie « classique » mise en avant par Chambris (2008), construite de façon itérative et qui utilise l'ostensif unités de numération. Il présente l'intérêt de besoins trophiques peu élevés (par rapport aux puissances de dix) ainsi qu'une valence instrumentale pour les conversions. Le travail s'est poursuivi par la recherche d'une situation fondamentale de la numération pour étudier des mises en fonctionnement de ces savoirs.

L'OM régionale de la connaissance des nombres entiers peut se découper selon trois OM locales, en lien avec notre situation fondamentale : l'OM_{card} et l'OM_{ord} pour les types de tâches mettant en jeu le nombre sous ses aspects cardinaux et ordinaux et l'OM_{trad} pour les types de tâches mettant en jeu des traductions d'écritures. Cette OM_{trad} est constituée de trois pôles : les traductions canoniques d'écriture, les conversions entre unités et les traductions générales d'écritures. Ces dernières permettent de mettre en jeu à la fois la position des unités dans l'EC et les conversions entre unités et permettent ainsi l'articulation de ces deux pôles de l'OM_{trad}. Il s'agit d'un type de tâche complexe. Par exemple, comment recomposer 3 milliers 27 centaines 1 unité ? La technique qui consiste à juxtaposer les nombres de chaque unité nécessite d'abord la conversion de 27C en 2M 7C¹, puis l'association du nombre d'unités obtenu à chaque ordre à leur rang avec écriture d'un 0 au rang des centaines, pour obtenir finalement l'écriture 5701.

Cette technique s'appuie sur trois conditions sur l'écriture en chiffres : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité, ce qui peut nécessiter d'utiliser le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées et présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang, ce qui peut nécessiter de faire des conversions entre unités.

Résultats de l'étude de la transposition didactique

Les difficultés des élèves pour les nombres à trois chiffres

Pour recomposer une écriture en unités de numération (EUN) en écriture en chiffres (EC), les résultats de l'évaluation sont très variables. Ils dépendent de l'ordre de présentation des unités, de l'absence éventuelle d'unité d'un certain ordre ou du nombre d'unités qui peut

¹ Nous utilisons les abréviations M, C, D et U (parfois m, c, d et u) pour désigner respectivement les milliers, centaines, dizaines et unités.

dépasser dix, ce qui met en jeu des conversions. Cela m'a amené à mettre en évidence le fait que certaines erreurs des élèves correspondent en fait à différentes techniques de juxtaposition des nombres mais ayant une portée limitée car elles ne prennent pas en compte les trois conditions énoncées précédemment. Par exemple la technique de juxtaposition avec respect de l'ordre des unités amène les élèves à écrire que $8d + 2c + 5u = 285$ mais $6c + 9u = 69$.

Traductions d'une écriture en unités de numération en écriture chiffrée	$1c + 9d + 3u = \dots$	91%
	$8d + 2c + 5u = \dots$	78%
	$6c + 9u = \dots$	65%
	$5c + 12d + 3u = \dots$	39%
Conversion entre unités	1 centaine = ... dizaines	48%
	60 dizaines = ... centaines	31%
Nombre de	Dans 764 il y a ... dizaines	39%

Figure 3 : pourcentages de réussite à certaines tâches de l'évaluation, en début d'année de CE2 (octobre/novembre).

Convertir entre unités et déterminer le nombre de dizaines dans un nombre à trois chiffres sont des tâches difficiles pour les élèves. La simple relation entre 1 centaine et 10 dizaines n'est connue que par la moitié des élèves et moins d'un tiers des élèves réussissent à convertir 60 dizaines en centaines.

Ces résultats sont à même d'interroger les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres, alors que les relations entre unités vont se complexifier du fait de l'introduction d'une unité supplémentaire : une bonne partie des élèves ne sont pas dans des conditions favorables pour aborder ce travail.

Les programmes et manuels récents

Dans tous les manuels étudiés, l'OM_{card} apparaît comme une raison d'être de l'étude de la numération. On trouve des problèmes de dénombrement ou de comparaison de collections. On peut noter une absence d'activités effectives de groupements ou d'échanges avec des objets matériels, ce qui pourrait être lié à la taille des nombres en jeu. Dans trois des manuels étudiés, le travail est ensuite centré sur OM_{trad} et OM_{ord}. Il y a une place importante accordée à deux types de tâches relevant de ces OM dans les programmes et les évaluations nationales récentes. Ce sont écrire/nommer (associer écriture en chiffres et en lettres) et comparer (des nombres écrits en chiffres). Ils mettent en jeu principalement le principe de position de la numération.

Dans les programmes de 2002 à 2008 il n'est pas fait référence aux conversions entre unités. Il en est de même dans tous les manuels étudiés pour les nombres à quatre chiffres. Il n'y a donc pas de travail spécifique de conversions entre unités à l'intérieur de l'OM_{trad}.

Cependant les conversions peuvent être en jeu dans d'autres types de tâches comme les décompositions/recompositions non canoniques ou le *nombre de*. C'est ce que nous allons maintenant regarder.

Pour le type de tâches décomposer/recomposer, il y a une évolution dans les textes des programmes de 2002 à 2008 puisque l'on passe d'une préconisation de *divers* types de décompositions/recompositions selon les puissances de dix, mettant en jeu le principe décimal à une absence des décompositions/recompositions dans les programmes de 2008.

Dans les manuels, j'ai relevé une variété importante dans le traitement de ce type de tâche. Dans un manuel il n'est pas travaillé, dans deux manuels sont proposées seulement des décompositions canoniques, dans le dernier, *ERMEL*, on trouve divers types de décompositions y compris en unités de numération. D'ailleurs *ERMEL* fournit un terrain propice à un travail sur les conversions entre unités du fait des situations proposées et du choix des variables didactiques. Pourtant dans cet ouvrage, comme dans les autres manuels, les trois conditions de la technique de juxtaposition ne sont pas explicitées ou bien sont prises

en charge par le tableau de numération. Par exemple quand il s'agit de recomposer 24D 5C 8U : dans les commentaires du guide, les auteurs semblent attendre plutôt des techniques relevant du calcul ou de l'utilisation du tableau de numération, sans que les conversions, ici de 24d en 2c 4d) ne soient explicitées. Dans le tableau de numération c'est le fait d'écrire un seul chiffre par colonne qui amène à placer le 2 dans la colonne des centaines quand on écrit 24 dizaines. Finalement, dans les programmes et les manuels, le type de tâches décomposer/recomposer n'apparaît pas comme un point d'appui pour travailler les relations entre unités.

Le type de tâche *nombre de* dont on pouvait trouver une référence dans les commentaires des programmes de 2002 disparaît dans le texte des programmes de 2008. Il est présent dans tous les manuels étudiés mais avec des traitements variés au niveau des techniques et éléments technologiques. Il n'est jamais expliqué le lien avec les conversions entre unités, comme par exemple dans 1234 il y a 12 centaines car $1M = 10C$. Dans le manuel *J'apprends les maths* on peut voir une justification que l'on peut rapprocher des conversions mais toujours contextualisée au matériel de numération utilisé : « dans une caisse il y a dix valises ». Ce type de tâches *nombre de* n'apparaît donc pas non plus comme un point d'appui pour travailler les relations entre unités dans les programmes et la plupart des manuels.

Les pratiques d'enseignement de la numération : une étude de cas

Je vais évoquer rapidement ici les pratiques de deux des enseignants observés. Pour ces deux enseignants, le principe décimal n'est pas un enjeu d'enseignement, ce qui se traduit de différentes manières : par le projet construit par les enseignants qui ne contient quasiment pas de tâche mettant en jeu les relations entre unités, par la gestion des tâches qui les mettent en jeu et par l'interprétation faite des erreurs des élèves.

Dans une classe, la seule tâche mettant en jeu des relations entre unités n'est pas gérée pour faire émerger ce savoir. Les élèves ont à disposition des étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, $\boxed{1000}$ et ils doivent recomposer les nombres suivants :

$$8c\ 4d\ 3u = \dots, 32d = \dots, 13c = \dots, 12c\ 8d\ 1u = \dots, 14c\ 2u = \dots, 12c\ 11d\ 2u = \dots$$

Pour les 5 premiers cas, les élèves se contentent de juxtaposer les chiffres sans utiliser le fait que 10 centaines = 1 millier. Cependant pour le dernier cas ce n'est plus possible car cela aboutirait à la réponse erronée 12112. Aucun élève ne trouve la solution et cela pose de réels problèmes de gestion de la mise en commun. L'utilisation des étiquettes aurait pu aider les élèves à échanger dix étiquettes 10 contre une étiquette 100, mais l'enseignant préfère amener les élèves à effectuer un comptage de cent en cent, dix en dix et un en un à l'oral. Cette approche par l'utilisation de la comptine numérique orale s'appuie sur une conception ordinale qui ne met pas en jeu de relations entre unités : par exemple le passage de « neuf-cents » à « mille » ne s'appuie pas sur la connaissance de la relation 10 centaines = 1 millier.

Dans une autre classe, une tâche mettant en jeu des relations entre unités est proposée en évaluation dans un exercice de recombinaison pour lequel les deux cas de la dernière ligne mettent en jeu des relations entre unités :

Ecris le nombre correspondant aux écritures :	
$5\ 000 + 600 + 3$: <u>5603</u>	$(2 \times 1\ 000) + (5 \times 10)$: <u>2050</u>
$(4 \times 1\ 000) + 9$: <u>4009</u>	67c 8d 9u : <u>6789</u>
9 m 8 d : <u>9080</u>	$6\ 000 + 80 + 1$: <u>6081</u>
12 centaines, 3 milliers : <u>123 400</u>	25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : <u>4625 400</u>

Figure 4 : une production d'élève (évaluation finale de la séquence)

Quand j'interroge l'enseignante sur les difficultés rencontrées par certains élèves dans cet exercice, elle explique les choix qu'elle a effectués :

« On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors je n'avais pas mis de centaines ou voilà + Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le

nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait »

Les variables indiquées par l'enseignante ne correspondent pas à celles qui permettent de mettre en jeu les relations entre unités (ici il s'agit du fait d'avoir des nombres à deux chiffres pour certaines unités) et les erreurs sont interprétées comme des erreurs d'inattention et non en référence aux savoirs en jeu.

Tout cela peut être mis en relation avec les contraintes institutionnelles et l'absence d'enjeu d'enseignement des relations entre unités, ce qui nous amène à nos questions concernant les conditions pour enrichir les pratiques.

3. CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMÉRATION

J'ai d'abord été amené à faire certains choix généraux en m'appuyant sur des résultats de recherches portant sur l'usage des ressources par les enseignants de l'école primaire voire plus généralement sur leurs pratiques.²

Choix généraux pour la ressource

La ressource est à destination des enseignants. J'y propose des situations à usage didactique. Il n'est pas visé un suivi pas à pas par l'enseignant : les usages seront nécessairement variés. Je décris donc les éléments qui semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée par l'enseignant. La détermination de ces éléments essentiels des situations fait partie des questions de recherche.

Une place importante semble devoir être faite à la description des enjeux de savoir du fait de contraintes institutionnelles actuelles qui peuvent amener les enseignants à se centrer sur les activités proposées aux élèves sans toujours se préoccuper des savoirs qu'elles pourraient permettre de faire émerger.

Des éléments sont proposés pour aider l'enseignant à construire une séquence à partir des situations proposées car les ressources ne permettent pas toujours aux enseignants de s'appropriier les progressions sur un thème donné ou plus généralement sur l'ensemble des mathématiques travaillées dans l'année. Pour la numération il semble en particulier essentiel que les enseignants soient conscient de la mise en jeu des savoirs dans d'autres thèmes mathématiques de l'école comme le calcul posé. D'autres apports généraux sur l'enseignement de la numération peuvent être proposés. La détermination des principaux apports fait aussi partie des questions de recherche et sera affinée à partir des besoins des enseignants révélés par les expérimentations.

Enfin, il faut motiver les enseignants à utiliser la ressource en leur montrant l'intérêt qu'ils peuvent y trouver. Cela peut se faire en pointant les manques au niveau des savoirs de numération observés dans certains manuels ou l'importance de la numération pour le calcul posé. Mais cette entrée par les savoirs pourrait ne pas suffire. Il est important de s'appuyer également sur les difficultés des élèves, notamment pour les tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération.

Recherche d'une situation fondamentale pour la numération

Pour la situation fondamentale je m'appuie sur le cas où la fonctionnalité recherchée du savoir ne concerne que certaines propriétés, comme dans Bloch (2005).

Je prends appui sur la situation fondamentale du nombre de Guy Brousseau qui constitue le jeu 0 : un actant A et un actant B doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps. Mais je ne considère que le cas de

² Les résultats de ces recherches sont rappelés dans le chapitre 5 de la thèse. Nous n'y revenons pas ici.

collections ayant au moins cent (voire mille) éléments et j'impose que le code de désignation utilisé soit l'écriture en chiffres.



Figure 5 : Jeux 1 et 2 de la situation fondamentale

J'ai montré qu'une variable didactique essentielle est l'organisation de la collection (en vrac, totalement groupée ou partiellement groupée). Le jeu sur cette variable peut permettre de mettre en jeu différentes connaissances liées aux deux principes de la numération.

J'ai aussi montré l'intérêt de décrire la quantité de la collection avec les unités de numération et de considérer les jeux 3 et 4 de traduction d'écritures pour mettre en jeu le principe décimal. Il s'agit alors de passer d'une écriture chiffrée à une écriture en unités de numération ou réciproquement. On retrouve les décompositions/recompositions de l'OM de référence.

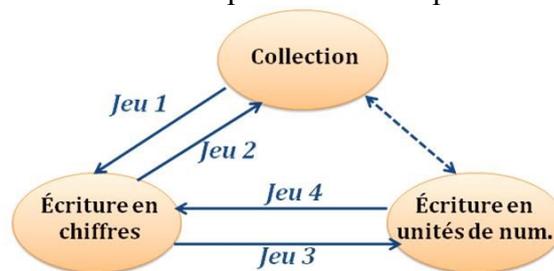


Figure 6 : Les 4 jeux de la situation fondamentale

Mise en scène de la situation fondamentale dans la ressource

J'en viens maintenant aux choix de mise en scène de cette situation fondamentale dans la version 1 de la ressource³.

Concernant la progression générale, j'ai choisi de partir des jeux 1 et 3, c'est à dire de la situation de dénombrement, avant de proposer les jeux 2 et 4, la situation de commande.

³ La ressource est disponible en ligne (<http://numerationdecimale.free.fr>). C'est la version 3 qui est actuellement en ligne (le 24/04/2015).

Dénombrement de collections (mise en scène des jeux 1 et 3)	D1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	D2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	D3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1ère collection : 2M 8C 1D 3U 2ème collection : 4C 1M 2U. Nombres paris : 31215, 3215, 3315, 4215
Commande de collections (mise en scène des jeux 2 et 4)	C1 : Commandes de bûchettes	Il nous faut 2615 bûchettes, mais le marchand n'a plus de bûchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?
	C2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

Figure 7 : tableau récapitulatif des situations proposées dans la ressource

Pour la situation de dénombrement il y a trois variantes. Je propose un matériel de référence constitué de bûchettes en bois. La première variante permet la constitution des groupements successifs. La deuxième permet de mettre en jeu le principe de position pour dénombrer une collection totalement groupée comme 1M et 4D par exemple. C'est seulement dans la troisième variante que les conversions entre unités sont véritablement un enjeu car la réunion de deux collections amène à avoir plus de dix unités à certains ordres. Dans l'exemple donné ici en réunissant les deux collections on obtient 12C qu'il faut convertir en 1M et 2C. Il est proposé un jeu des paris pour cette troisième variante, où les élèves doivent choisir un nombre parmi ceux proposés. Cela doit permettre de faire émerger différentes erreurs dans la juxtaposition des chiffres et de donner un enjeu à la phase de discussion collective.

La situation de commande permet de réinvestir les connaissances en partant cette fois de la donnée de l'EC pour produire une écriture en unités de numération en tenant compte de différentes contraintes sur le stock du marchand qui permettent de mettre en jeu les conversions entre unités. Cela est ensuite à réinvestir dans un problème similaire dans un contexte de timbres où il s'agit de déterminer le nombre de plaques de 100 timbres ou de carnets de 10 timbres à commander pour obtenir le nombre de timbres désiré.

Dans ces situations il n'y a pas de travail spécifique sur les conversions entre unités mais les trois dernières variantes mettent en jeu les conversions et constituent donc ce qui m'intéresse tout particulièrement.

On trouvera ci-dessous la page d'accueil de la version 1 de la ressource où on peut voir sur le menu de gauche les trois parties : des apports sur la numération, des propositions de situations (les 2 situations principales avec leurs variantes et des situations complémentaires), des aides pour construire une séquence.

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE
Une ressource pour les enseignants de CE2

Accueil | Mode d'emploi | Imprimer | Faire les commentaires | Contact | Liens

LA NUMÉRATION DÉCIMALE

- Les deux aspects de la numération
- Les constats
- Le matériel, les unités, le tableau
- Liens avec d'autres notions

LES SITUATIONS

- Présentation générale
- 1. Combien de bûchettes ?
- 2. Comptes de bûchettes
- 3. Le jeu des paris
- 4. Marchand de bûchettes
- 5. Commandes de timbres
- Situations complémentaires

LA SÉQUENCE

- Objectifs généraux
- Objectifs des 5 situations clés
- Les autres tâches de numération
- Place dans la programmation

IDENTIFICATION

Bonjour admin, **DÉCONNEXION**

AVIS

Apports sur la numération

Propositions de situations (situations principales & complémentaires)

Aides pour construire une séquence

Les situations

décimale

Accéder à l'emploi du site

Une grande aide pour l'enseignant

Pour permettre la dimension formative du site, le choix a été fait de donner une **marge de manœuvre importante** à l'enseignant dans la mise en œuvre des situations proposées et dans la construction de sa séquence.

Ainsi par exemple pour les situations proposées, aucune indication de temps ni d'organisation de la classe ne sont fournies. Il faudra compléter les situations proposées par des exercices d'entraînement, des traces écrites, des évaluations ... **Tout cela est entièrement à la charge de l'enseignant.**

Figure 8 : page d'accueil de la version 1 de la ressource.

4. RÉSULTATS DE L'EXPÉRIMENTATION

Quelques précisions sur la méthodologie

Dès le début de mon travail j'ai envisagé une évolution du contrat d'expérimentation. J'ai fait le choix de donner de plus en plus de liberté aux enseignants dans la mise en œuvre des situations pour progressivement s'approcher des conditions « réelles » d'utilisation d'une ressource par des enseignants, hors contexte de recherche.

J'ai commencé par mener une pré-expérimentation avec seulement deux enseignants qui devaient suivre la ressource proposée tout en l'adaptant si besoin. Je ne présente pas ce travail ici.

La version 1 de la ressource, dont je viens d'indiquer les grandes lignes, a fait l'objet d'une expérimentation avec 7 enseignants. J'ai réalisé un entretien avant et un autre après la séquence pour tous ces enseignants. Quatre font partie d'un groupe dit « de travail » qui accepte ma présence dans la classe pour quelques séances et participent à une réunion collective avant et après la séquence. Les trois autres enseignants font partie d'un groupe dit « libre » qui utilise la ressource dans des conditions plus ordinaires. Dans les deux groupes les enseignants doivent faire les cinq situations principales proposées mais il reste à leur charge la construction complète de la séquence avec exercices, traces écrites et évaluations.

Lors de ces expérimentations j'ai fait passer des évaluations aux élèves avant et après la séquence. L'évaluation initiale porte sur les nombres à trois chiffres et l'évaluation finale sur les nombres à quatre chiffres. La comparaison des résultats à ces deux évaluations doit permettre d'étudier les apprentissages éventuels et de s'assurer *a minima* que l'utilisation de la ressource n'a pas d'effet négatif sur les apprentissages.

<i>Expérimentation</i>	<i>Nombre d'enseignants</i>	<i>« Contrat » d'expérimentation pour le suivi de la ressource</i>	<i>Nombre de séances observées</i>	<i>Evaluations des élèves</i>
Pré-expérimentation (version 0)	2	Suivi de la ressource proposée avec adaptations possibles.	La plupart des séances mises en œuvre.	Avant/après
Expérimentation (version 1)	4 (groupe de travail GT) / 3 (groupe libre GL)	Suivi des 5 problèmes principaux. Adaptations possibles pour la mise en œuvre. Construction d'une séquence à la charge de l'enseignant.	3 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après

Figure 9 : dispositif expérimental

Concernant l'analyse des situations, la méthodologie consiste à faire une analyse *a priori* puis, suite à l'expérimentation, une analyse *a posteriori* pour chacune des séances observées. En mettant en relation les analyses des séances réalisées par différents enseignants je fais un retour sur mes hypothèses de départ : les constats effectués dans les analyses correspondent-ils à ces hypothèses ? Si ce n'est pas le cas je cherche à faire des hypothèses les raisons de ces décalages :

- effet de la mise en scène de la situation fondamentale ;
- effet de la description des situations ;
- effets de niveau supérieur : des connaissances professionnelles didactiques des enseignants, des contraintes institutionnelles, ...

Cela m'amène à dire ce qu'il manque, voire à proposer des améliorations de la mise en scène de la situation fondamentale ou de nouveaux choix de description des situations ou encore décrire des besoins pour la formation des enseignants.

Je vais maintenant présenter quelques résultats obtenus concernant les situations (mise en scène de la situation fondamentale et description dans la ressource) et les séquences construites par les enseignants.

La situation de dénombrement d'une collection (variantes 2 et 3)

Pour la variante de dénombrement d'une collection totalement groupée (D2, cf. figure 7) qui met en jeu essentiellement le principe de position, les deux variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « présence/absence d'unités isolées à chaque ordre » sont apparues essentielles pour l'apprentissage des élèves pour leur permettre de dépasser des erreurs de juxtaposition des chiffres sans prise en compte de la position des unités. De plus, les élèves dépassent ces erreurs dans toutes les classes observées, malgré des mises en œuvre différentes des enseignants.

La variante de dénombrement d'une réunion de collections (D3), comme par exemple dénombrer une réunion de collections composées de : 2M 8C 1D 3U et de 4C 1M 2U, vise l'émergence de conversions entre unités. Comme cela était prévu dans l'analyse *a priori*, quand les élèves ajoutent les unités de même ordre, cela fait apparaître des erreurs de juxtaposition sans prise en compte des conversions qui amènent les élèves à écrire par exemple 31215. Mais, les mises en œuvre dans les classes ne permettent pas l'émergence de la nécessité des conversions entre unités à cause :

- du recours à l'addition posée qui finalement s'avère être plus rapide et moins source d'erreur,
- et aussi du fait des évaluations (Margolinas 1993) des réponses des élèves par les enseignants dans les phases de conclusion. Il n'y a donc pas d'enjeu de validation

possible, contrairement à ce qui était prévu.

Au cours des différentes variantes de cette situation de dénombrement devraient apparaître les trois conditions de la technique de juxtaposition. Finalement, les enseignants institutionnalisent les deux conditions liées au principe de position : le respect du rang de chaque unité et la présence de chaque unité dans l'écriture chiffrée. La première à travers le tableau de numération et la deuxième en expliquant parfois le rôle du chiffre 0 pour marquer l'absence d'unité isolée à un certain rang. Ils s'appuient pour cela sur les erreurs des élèves. Par contre la variante 3 n'a pas permis de faire émerger la nécessité des conversions entre unités, qui ne sont donc pas travaillées ni institutionnalisées. Cette absence des conversions risque de compromettre le travail prévu pour la situation de commande, dont l'objectif est de réinvestir ces connaissances pour faire des décompositions variées de nombres.

Concernant les résultats des élèves à l'évaluation finale (figure 9), on peut noter une progression plus ou moins importante pour les recompositions et les conversions par rapport à l'évaluation initiale. Mais les types de tâches mettant en jeu les conversions restent source de difficultés importantes puisqu'ils sont réussis par moins de la moitié des élèves.

Evaluation initiale (nombres à trois chiffres, 103 élèves)	Evaluation finale (nombres à quatre chiffres, 96 élèves)
3 dizaines + 6 centaines = ... 54%	3 dizaines + 1 millier = ... 73%
21 dizaines + 3 centaines = ... 21%	12 centaines + 3 milliers = ... 47%
60 dizaines = centaines 34%	40 centaines = milliers 49%

Figure 10 : résultats des élèves aux évaluations (avant/après la séquence)

La situation de commande d'une collection

Pour la situation de commande, dans trois classes on peut observer des difficultés importantes chez les élèves pour les commandes avec contraintes. Les erreurs principales sont celles prévues dans l'analyse *a priori* : les élèves ne tiennent pas compte des conversions et cherchent à écrire des nombres à un seul chiffre pour chaque unité, comme dans une décomposition canonique. Par exemple pour une commande de 2615 bâchettes sans millier de disponible des élèves commandent 6C 1D 5U (difficulté à prendre en compte les centaines qui sont dans les milliers).

Malgré la description dans la ressource d'une technique de conversion à institutionnaliser, dans trois classes aucune technique « directe » (pour passer de l'écriture chiffrée à l'écriture en unités de numération) n'est formulée. Les enseignants donnent seulement à voir des techniques de vérification des réponses produites par les élèves, ce qui n'était pas le cas pour la situation de dénombrement. Cela permet, certes, de laisser une responsabilité aux élèves pour l'élaboration d'une technique mais aucune technique directe n'est finalement institutionnalisée.

Les résultats de l'évaluation (figure 10) finale témoignent de difficultés résistantes chez les élèves pour la tâche « nombre de ». Il y a globalement peu d'amélioration des pourcentages de réussite par rapport à l'évaluation initiale. Pour le problème donné en contexte les difficultés restent importantes mais il semble que les élèves ont mieux identifié, dans l'évaluation finale, que ce problème relève du nombre de.

Evaluation initiale (nombres à trois chiffres, 104 élèves)	Evaluation finale (nombres à quatre chiffres, 96 élèves)
Dans 764 il y a dizaines : 38%	Dans 1052 il y a centaines : 48%
Problème de « nombre de » en contexte : 26 %	Problème de « nombre de » en contexte : 44 %

Figure 11 : suite des résultats des élèves aux évaluations (avant/après la séquence)

Pour illustrer le fait que les enseignants ne font pas émerger une technique pour passer de l'écriture chiffrée à l'écriture en unités de numération, je montre ici un exemple de gestion d'une phase collective par Mme A, suite à la recherche d'une commande de 3167 bâchettes sans millier de disponible.

Un élève propose 31 sachets, 6 paquets de dix, 7 bâchettes seules.

Mme A : « combien de bâchettes dans trente-et-un sachets ? »

Un élève : « trois-mille-cent. »

Mme A écrit : « 31 sachets de 100 -> 3100 ».

Mme A : « combien il y a de sachets dans une boîte ? »

Un élève : « dix sachets ».

Un autre élève a fait une commande de 12 sachets ...

Mme A : « combien ça fait de bâchettes ? Combien il y a de sachets dans une boîte ? »

L'élève répond « dix » puis comprend que ça fait mille-deux-cent bâchettes.

Mme A ne laisse pas les élèves exprimer comment passer de l'EC de 3167 à la commande de 31 sachets, 6 paquets et 7 bâchettes. On peut aussi constater, lors des vérifications, qu'il y a bien un travail qui est fait autour des relations entre groupements matériels (sachets, boîtes et bâchettes). Cela se fait sous la responsabilité de l'enseignante.

Quels ostensifs pour les conversions entre unités ?

Dans des problèmes mettant en jeu les relations entre unités (D3 et C1) nous avons observé des résistances à une utilisation adaptée des unités de numération par les enseignants. Ces résistances sont de trois types : évitement de l'utilisation des unités pour décrire les groupements matériels, référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu et absence d'utilisation des unités de numération à l'écrit pour faire des conversions.

La première résistance a été observée dans une seule classe, celle de Mme A. Malgré les propositions de la ressource, l'enseignante utilise les expressions « boîtes », « sachets », etc. pour décrire les groupements matériels. Pourtant elle utilise toujours les unités de numération pour décrire les rangs du nombre écrit en chiffres. Cet extrait montre comment elle revient sur la retenue de l'addition dans le problème D3.

Mme A : huit plus quatre qu'est-ce qui se passe ici dans les centaines ?

Elève : douze

Mme A : on retrouve nos douze sachets sauf qu'est-ce qui se passe ?

Elève : on met une retenue

L'enseignant fini d'écrire l'addition posée au tableau :

Th	H	T	O
1	7	2	4
+ 1	8	1	0
3	5	3	4

Mme A : et bien voilà pourquoi on met une retenue parce qu'on va garder que deux sachets pour les centaines et qu'ici avec nos dix ça va nous faire une boîte de mille en plus. [...] On comprend mieux maintenant la retenue : c'est notre petite boîte de mille en plus.

Dans la classe de Mme A, les unités sont utilisées pour désigner les rangs de l'écriture chiffrée, mais pas les groupements matériels, ce qui empêche les conversions.

Dans les autres classes, les unités de numération sont utilisées pour décrire les groupements, conformément aux propositions de la ressource. Par contre lorsqu'il y a plus de dix unités à certains ordres, l'enseignant fait une référence quasi systématique aux groupements matériels (réels ou dessinés). Par exemple dans la mise en œuvre de D3 dans la classe de Mme B :

Un élève (Marc) vient dessiner la réunion des deux collections au tableau (boîtes de mille, sachets de cent, etc.). L'enseignante demande à cet élève comment on peut trouver le résultat. Face à la difficulté liée à la prise en compte des 12 sachets dessinés au tableau, Mme B demande à un autre élève (Joris) de l'aider « sans lui donner la bonne réponse, juste le mettre sur la voie » :

Joris : en fait comme t'en as douze, ça fait plus de centaines [...] Si t'as dix centaines ça revient à quoi ?

E : qu'est-ce que tu peux faire ? Si t'as dix pochettes qu'est-ce que tu peux faire ?

Marc : ah oui un millier. *L'élève dessine une nouvelle boîte au tableau.*

E : Les dix tu vas les mettre dans une boîte. Alors enlève-les maintenant les dix que tu as mis dans la boîte. Barre-les ou efface-les. Ah. [...] Quand on a dix sachets on peut les mettre dans une boîte.

Et là le problème c'est qu'on n'en avait pas dix, on en avait douze. Donc dès que ça dépasse dix on peut les mettre dans une boîte de mille.

Alors que les élèves utilisent les unités à l'oral, l'enseignante reformule en ramenant au matériel et aux actions sur le matériel (mettre dix sachets dans une boîte).

Dans les quatre classes on observe le troisième type de résistance, l'absence d'utilisation à l'écrit des unités de numération pour faire des conversions, même si elles sont utilisées à l'oral. Par exemple Mme C n'écrit jamais de conversion (comme 1 millier 2 centaines = 12 centaines), même si elles sont dites ; excepté les conversions basiques comme 1 millier = 10 centaines. Mme B raisonne au tableau sur les dessins des groupements sans jamais écrire les conversions. On le voit dans l'extrait précédent quand elle ne poursuit pas à l'écrit l'idée suggérée par Joris : 12 centaines = 1 millier 2 centaines. Quand un autre élève explique ce qu'il a fait pour trouver le nombre total de bûchettes (« sept centaines et trois centaines ça fait dix »), l'enseignante n'écrit pas la conversion associée ($7C + 3C = 10C = 1M$), mais continue de faire référence au matériel (« j'ai transformé mes sacs, je les ai mis dans une boîte puisque j'en ai dix »).

Enfin, trois enseignants sur les quatre observés ne se servent pas du tableau de numération pour les conversions alors qu'ils l'utilisaient tous pour la situation de dénombrement de collections totalement groupées. Le tableau n'est donc pas un instrument pour faire des conversions entre unités. En général, on peut observer que les enseignants appliquent au tableau de numération les mêmes règles que pour l'écriture chiffrée. Par exemple ils écrivent un 0 en cas d'absence d'unité isolé à un rang : pour écrire un nombre comme 2M 3D 5U dans le tableau, un 0 est systématiquement écrit au rang des centaines. Pour les conversions, le seul enseignant qui utilise le tableau ne s'autorise pas à laisser un nombre à deux chiffres dans une colonne : il efface tout de suite, ce qui ne permet pas de laisser une trace de la conversion effectuée. Finalement le tableau de numération a pour fonction principale de montrer le lien entre chaque unité et son rang dans l'écriture chiffrée.

Les séquences des enseignants

Les enseignants des deux groupes (donc 7 au total) avaient à construire une séquence à partir des 5 situations principales proposées dans la ressource.

Concernant les exercices proposés, on observe peu d'exercices de conversions entre unités (deux classes seulement). Le changement de contexte ne semble pas être un enjeu important pour certains enseignants, malgré les préconisations faites dans la ressource. Il est possible que cela soit un effet involontaire du fait d'avoir proposé quatre situations-clés à la suite dans le même contexte, celui des bûchettes. La ressource n'est donc pas une aide sur ce point.

Concernant les traces écrites, il y a des variations importantes entre les enseignants mais globalement on observe le plus de traces écrites sur le principe de position, au début de la situation de dénombrement. On peut penser qu'il y a une influence forte de contraintes institutionnelles à ce sujet car la ressource proposait pourtant des éléments sur lesquels les

enseignants pouvaient s'appuyer pour construire ces traces.

Enfin, pour les évaluations, les trois enseignants qui en ont proposé pendant la séquence s'appuient sur les mêmes que les années passées. Ainsi, certaines ne tiennent pas compte d'une partie du travail réalisé dans cette séquence. On retrouve les types de tâches écrire/nommer, comparer, décomposer de manière canonique, etc. Ce que l'on peut encore interpréter comme un effet d'assujettissement institutionnel.

Enfin, la comparaison des séquences des enseignants des deux groupes expérimentaux suggère qu'il est possible qu'il y ait un effet de l'expérimentation sur la construction des séquences des enseignants. Les enseignants du groupe libre prennent davantage de libertés avec ce qui est proposé dans la ressource, se détachent plus facilement des situations-clés. Les enseignants du groupe de travail cherchent à faire leur séquence tout en testant les situations, ce qui pourrait les amener à surinvestir les situations-clés. Mme F explique par exemple qu'elle a cherché à suivre au plus près de ce qui était proposé.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Tout d'abord, concernant les conditions sur une ressource pour enseigner la numération, voici ce que je peux retenir de mon travail. Pour motiver les enseignants à s'engager dans un travail plus approfondi sur le principe décimal de la numération, il est important de faire le lien avec d'autres notions et de montrer l'intérêt pour le travail sur les décimaux en CM1. Mais l'expérimentation, a aussi montré l'intérêt, même si ce n'était pas pensé pour cela au départ, de l'évaluation initiale. Elle a en effet permis aux enseignants de prendre conscience des difficultés de leurs propres élèves. Une enseignante m'a même expliqué récemment que ce qu'elle avait principalement appris avec ce travail était de mieux reconnaître les difficultés des élèves et de ne pas se satisfaire de la réussite à certaines tâches comme les décompositions canoniques.

Voici des principes que j'ai retenus pour la description de la ressource :

- une présentation claire des objectifs,
- des variantes des situations principales qui guident la progression,
- une description des éléments essentiels des situations,
- des exemples d'exercices d'entraînement et d'évaluation,
- des aides pour l'institutionnalisation,
- des apports pour l'enseignant sur la numération, des prolongements possibles en lien avec d'autres notions.

Concernant la mise en scène de la situation fondamentale, les situations de dénombrement et de commande de collections s'avèrent pertinentes car elles permettent de faire émerger les connaissances prévues. La situation de dénombrement de collections a permis la construction dans les classes de connaissances liées au principe de position. La situation de commandes de collections permet de travailler les décompositions différentes d'un même nombre en unités de numération.

Mais dans les deux situations, j'ai montré certaines résistances des enseignants que l'on peut interpréter comme des conséquences des contraintes institutionnelles, comme par exemple :

- une résistance, quand les conversions sont en jeu, à se détacher du matériel utilisé, à utiliser les unités de numération ;
- à faire travailler et à institutionnaliser les relations entre unités.

J'ai aussi montré certains obstacles liés aux pratiques usuelles des enseignants comme par exemple la gestion des phases de mise en commun qui peut compromettre l'enjeu de validation prévu ou encore l'absence de formulation d'une technique et donc d'institutionnalisation.

Cela m'amène à pointer des questions à approfondir, à proposer des pistes pour améliorer la ressource mais aussi à mettre en évidence des limites d'une ressource.

Les questions à approfondir concerne notamment l'appropriation des conversions entre unités par les enseignants. Comment amener les enseignants à faire formuler (oral/écrit) les relations (avec unités de numération) et à les institutionnaliser dans les deux situations ? Comment amener les enseignants à proposer des exercices de conversions entre unités entre les variantes des situations principales ?

On peut envisager certaines pistes pour améliorer la ressource. Pour la variante 3 de dénombrement, il est possible de proposer le dénombrement d'une collection partiellement groupée (2M 15C 8U) pour amener à faire des conversions entre unités. On peut aussi mettre en avant une écriture en abrégé des unités de numération (U, D, C, M, ...) pour faciliter leur utilisation. On peut prévoir une institutionnalisation à plusieurs niveaux : des synthèses de fin de séances mais aussi une reprise sur l'ensemble de la situation de dénombrement, ce qui permettrait de revenir sur les trois conditions de la technique de juxtaposition. Pour la situation de commande, dans un 1^{er} temps on peut limiter les contraintes à seulement « pas de millier ». Une situation de formulation permettrait de contraindre la formulation (ce qui n'est pas le cas dans une phase de formulation d'une situation d'action). Pour éviter une formulation prématurée de la technique de troncature il est alors possible de prévoir d'abord une formulation des conversions, le but étant de faire formuler aux élèves les décompositions obtenues avec les conversions en jeu. Mais cela est-il adapté à une utilisation dans l'enseignement ordinaire ?

Il semble nécessaire de proposer dans la ressource des exemples d'exercices à proposer aux élèves. Notamment des exercices de conversions entre unités. Mais aussi des exercices dans des contextes variés et hors contexte pour le *nombre de*, les recompositions, etc. Enfin, il faut donner une meilleure visibilité au canevas didactique en s'appuyant sur les deux situations principales, dénombrement et commande de collections. Et décrire les variantes qui guident la progression avec le jeu sur l'organisation de la collection mais aussi le jeu sur la variable de contexte : les bâchettes, les cubes, la monnaie, etc. et pas de contexte. Pour illustrer ce dernier point, on trouvera en annexe la page d'accueil de la version 2 de la ressource qui prend en compte ces modifications.

Mais les résistances rencontrées pour la mise en œuvre des situations témoignent aussi des limites d'une ressource. Par exemple concernant les relations entre unités qui sont un nœud de mon travail, on peut identifier des besoins pour la formation des enseignants :

- pour comprendre l'enjeu du travail sur les relations entre unités,
- pour comprendre comment elles interviennent dans le canevas didactique proposé,
- pour comprendre l'intérêt d'entraîner les élèves à faire des conversions dans des exercices,
- pour formuler les conversions (avec les unités de numération) et les institutionnaliser dans les mises en œuvre des séances,
- ...

Dans les perspectives, il reste des points sensibles à approfondir pour la mise en scène de la situation fondamentale et pour ses prolongements : le type de tâches convertir entre unités, les décompositions des nombres, le tableau de numération, les prolongements pour l'étude des grands nombres, voire des décimaux, les liens avec le calcul posé et le calcul mental, ... Par exemple, concernant le tableau de numération, c'est un ostensif déjà utilisé par les enseignants. Plutôt que de questionner sa présence dans la ressource, on peut s'interroger sur sa place dans la progression ainsi que sur la façon dont on pourrait amener les enseignants à utiliser la valence instrumentale du tableau pour les conversions.

Il est possible d'envisager la poursuite des cycles afin d'avancer sur les questions posées dans la thèse et discuter la pertinence des pistes d'amélioration de la ressource qui ont été proposées. Concernant le dispositif expérimental, nous avons vu que la présence du chercheur pourrait contraindre la liberté de l'enseignant sur les adaptations de la ressource. De plus j'avais choisi de laisser « parler » la ressource, donc de me mettre un peu en retrait, afin de mieux comprendre ce que la ressource pouvait apporter. Cela présente certaines limites. Par

exemple pour les conversions entre unités, cela m'a permis de faire certains constats de manque mais pas de construire avec les enseignants des propositions pratiques pour que les conversions s'intègrent dans leur travail, ce qui pourrait permettre une meilleure appropriation par d'autres enseignants. Il pourrait donc y avoir un intérêt à chercher une véritable collaboration avec les enseignants. La poursuite des cycles n'exige pas la conservation du même type de dispositif expérimental. Des adaptations peuvent être faites en fonction des besoins repérés. Il peut même être envisagé, en progressant dans les cycles, de ne plus prévoir d'observations de classe mais seulement un travail de préparation collaboratif avec les enseignants, tout en continuant d'évaluer les élèves au début et à la fin afin d'avoir un retour sur leurs apprentissages. Il est aussi possible de prévoir d'inclure au dispositif d'autres acteurs de l'enseignement et de la formation : formateurs, inspecteurs, etc.

Enfin, les limites d'une ressource pour combler certains besoins des enseignants que j'ai pointées m'amènent à considérer l'usage possible de cette ressource dans le cadre de la formation des enseignants. Cette ressource (ou une version future) peut en effet être un support pour la formation initiale ou continue des enseignants. Je sais par exemple que des collègues formateurs d'enseignants l'utilisent. Une réflexion pourrait maintenant être menée sur la formation des enseignants sur la numération décimale en lien avec l'usage de cette ressource.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BEDNARZ, N., JANVIER, B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, 33, 5-31
- BESSOT, A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009 (pp.29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.
- BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-123
- BOSCH, M., GASCÓN, J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRISSIAUD, R. (2005) Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.
- BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHAMBRIS, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
- CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- DEBLOIS, L. (1996) Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(1), 71-128.
- FOSNOT, C-T., DOLK, M. (2001) *Young mathematicians at work : Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH : Heineman.
- FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E. (1997) Children's conceptual structures for multidigit numbers and

- methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.
- HOUEMENT, C., CHAMBRIS, C. (2013) Why and how to introduce numbers units in 1st and 2nd grades. *Actes du colloque CERME 8, Manavgat-Side, Antalya – Turkey*.
- KAMIL, C., & JOSEPH, L. (1988) Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher* 35 (6): 48- 52.
- MARGOLINAS, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MOUNIER, E. (2010) *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
- PERRIN-GLORIAN, M.J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROSS, S.H. (1989) Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 47-51.
- TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7.
- THANHEISER, E. (2009) Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigt Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 40, 251-281.
- THOMAS, N. (2004) The Development of Structure in the Number System. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.305-312). Bergen : Bergen University College Press.
- THOMPSON, I., BRAMALD, R. (2002) An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition. *Report for the Nuffield Foundation*. Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.
- VAN DE WALLE, J.A., KARP, K.S., & BAY-WILLIAMS, J.M. (2010) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh edition). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Manuels scolaires

- BRISSIAUD R. (2003) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz
- BRISSIAUD R. (2004) J'apprends les maths CE2, livre du maître, Paris : Retz
- BRISSIAUD R. (2010) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz
- CHARNAY R. (2011) Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Paris : Hatier
- CHARNAY R. (2011) Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Paris : Hatier
- DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP. (2008) La tribu des maths CE2, livre de l'élève, Paris : Magnard
- DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP. (2008) La tribu des maths CE2, Guide du maître, Paris : Magnard
- ERMEL (1995) Apprentissages numériques, CE2, Paris : Hatier
- ERMEL (2005), Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, Guide pour l'enseignant, Paris : Hatier

Textes des programmes, documents d'applications et évaluations nationales

- MEN (2002) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n°1 du 14 février 2002
- MEN (2007) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n° 5 du 12 avril 2007
- MEN (2008) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n°3 du 19 juin 2008

MEN Direction de l'évaluation et de la prospective, sous-direction de l'évaluation (2005) Evaluations nationales CE2 et sixième.

MEN Direction générale de l'enseignement scolaire (2009) Evaluation nationale des acquis des élèves de CM2.

ANNEXE : PAGE D'ACCUEIL DE LA VERSION 2 DE LA RESSOURCE

The screenshot shows the top navigation bar of a website. The main title is 'ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE' in white on a dark blue background. Below it is the subtitle 'Une ressource pour les enseignants de CE2'. On the right, there is a search bar with a magnifying glass icon and the text 'recherche...'. Below the title bar is a horizontal menu with five items: 'ACCUEIL' (highlighted in black), 'DÉNOMBRER UNE COLLECTION', 'COMMANDER UNE COLLECTION', 'PROLONGEMENTS', and 'EN SAVOIR PLUS'. To the right of the menu is an image of a calculator.

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants ([en savoir plus](#)), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

1. Dénombrer une collection

Plusieurs cas à envisager :

Une collection « en vrac » (avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de [bûchettes](#) dans cette collection qui est devant nous ? »

Une collection totalement groupée (les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de [cubes](#) dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».

Une collection partiellement groupée : « Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »

Dénombrements et conversions sans contexte : « 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = ... ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = ... ? » ou encore : « 4 milliers = ... centaines ? ».

2. Commander une collection

Plusieurs cas à envisager :

Commandes sans contrainte : « des [bûchettes](#) sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »

Commandes avec contraintes :

- « le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».

- « le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.

- Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.

Sans contexte : Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, ...).