

LA TABLE DE MORTALITE

et

LA POPULATION STATIONNAIRE

(approche infinitésimale)

N.Brouard

1.0 LA TABLE DE MORTALITE EN CONTINU

1.1 Force de mortalité

On définit et note $\mu(x)dx$, la probabilité pour qu'un individu d'âge x décède entre les âges x et $x + dx$. μ est alors appelé "force de mortalité" selon la définition donnée par Gompertz.

On déduit de cette définition, l'équation différentielle fondamentale de la fonction de survie $S(x)$:

$$S(x+dx) = S(x) - S(x) \mu(x)dx \quad [1]$$

Partant d'un âge origine 0, $S(x)$ désigne la probabilité de survivre jusqu'à l'âge x et $1-S(x)$ est donc la probabilité d'être décédé avant cet âge. (l'équation [1] équivaut à: le nombre des survivants à l'âge $x+dx$, est égal au nombre des survivants à l'âge x diminué des décédés durant l'instant infinitésimal dx).

$$\text{Cette équation différentielle s'intègre facilement: } \frac{S'}{S} = -\mu(x) \quad [2]$$

$$\text{d'où } S(x) = S(0) e^{-\int_0^x \mu(t)dt} \quad [3]$$

$S(0)$ vaut 1, mais figure d'une manière explicite dans l'équation [2] pour le cas où on choisit un âge autre que zéro comme "racine" de la table.

Désormais lorsque les bornes de l'intégration ne sont pas explicites, il s'agit de l'intervalle $[0, \infty[$.

1.2 Distribution des décès

Partant d'un effectif à la naissance N , $NS(x)$ désigne alors le nombre des survivants à l'âge x . Généralement on confondra la probabilité $S(x)$ avec "les survivants à l'âge x " faisant abstraction du facteur multiplicateur que constitue l'effectif N .

Partant d'un effectif unitaire $N=1$, le nombre des décès attendus entre les âges x et $x+dx$, provient des $S(x)$ survivants à l'âge x et vaut: $S(x) \mu(x)dx$.

La distribution des décès est donc la fonction $d(x) = S(x)\mu(x)$ qui vaut en raison de l'équation [2] $d(x) = -S'(x)$. [4]

On vérifie que $\int_0^{\infty} d(x)dx = 1$.

1.3 Espérance de vie à la naissance

On résume généralement une distribution statistique par ses premiers moments, sa moyenne et son écart-type par référence à la loi normale. L'espérance de vie, résumé de la distribution des décès est définie comme l'espérance mathématique de cette distribution. Ce résumé n'est d'ailleurs pas excellent car la distribution des décès a deux modes et est donc bien éloignée d'une loi normale.

$$e_0 = \int_0^{\infty} x d(x) dx \quad [5]$$

On va montrer en intégrant par partie que l'espérance de vie est aussi l'intégrale de la fonction de survie $S(x)$.

Effectuons une intégration par partie de [5]:

$$e_0 = \int_0^{\infty} x d(x) dx = [xS(x)]_0 - \int_0^{\infty} -S(x) dx$$

$$e_0 = \int_0^{\infty} S(x) dx \quad [6]$$

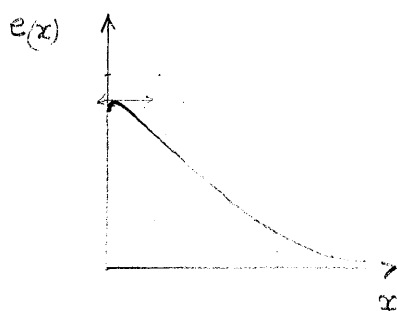
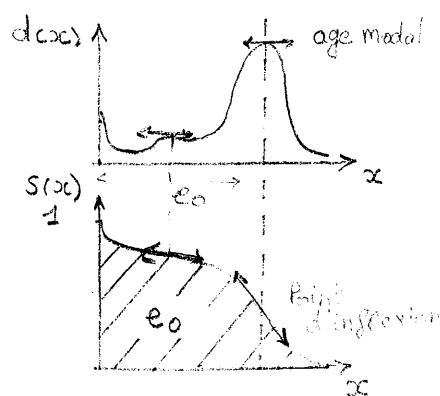
1.3.1 Espérance de vie à un âge quelconque. -

Soit $S(a)$ individus d'âge a , la moyenne des âges de leur décès est:

$$e_a = \int_a^{\infty} x d_a(x) \text{ avec } d_a(x) = \frac{S(x)}{S(a)} \mu(x) \text{ soit aussi:}$$

$$e_a = \frac{1}{S(a)} \int_a^{\infty} S(x) dx \quad [7]$$

Quand la mortalité infantile est forte, l'espérance de vie à 1 an peut être plus grande que l'espérance de vie à la naissance.



2.0 POPULATION STATIONNAIRE

2.1 Définition

Une population stationnaire est une population dont :

1. la force de mortalité peut varier avec l'âge mais reste constante dans le temps
2. le nombre des naissances est constant par unité de temps.

Soit Ndt le nombre de naissances entre les instants $t-dt$ et t .

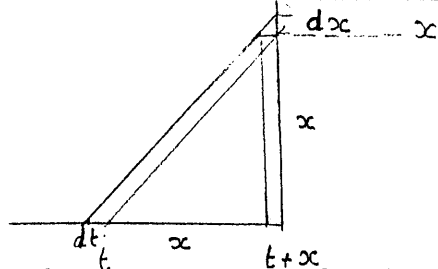


Diagramme de Lescis

Le nombre de lignes de vie parmi les Ndt qui atteindront l'âge exact x entre les dates $t+x-dt$ et $t+x$ est donc $NdtS(x)$.

Le nombre d'individus à la date $t+x$ d'âge compris entre x et $x+dx=x+dt$ est donc $NdxS(x)$, car les décès survenus durant cette durée infinitésimale sont des infiniment petits du deuxième ordre. Notons $P(x)dx$ la population agée entre l'âge x et l'âge $x+dx$, elle vaut :

$$P(x)dx = NS(x)dx \quad [8]$$

et est indépendante du temps. La population totale est donc: $P_{t+x} = \int_0^{\infty} P(x)dx = N \int_0^{\infty} S(x)dx$, soit compte tenu de [6] :

$$P = Ne_0 \quad [9]$$

La structure par âge est: $C(x)dx = \frac{NS(x)dx}{Ne_0}$ soit $C(x) = \frac{S(x)}{e_0}$. Il en résulte que la taille de la population est aussi constante dans le temps, et que sa structure par âge est identique à celle des survivants à une constante multiplicative près ($1/e_0$).

Le taux brut de natalité, b , rapport des naissances dans l'instant dt à la valeur moyenne de la population à cette même date vaut donc : $b = \frac{Ndt}{Pdt} = \frac{1}{e_0}$ [10]

Le taux de natalité b est égal à l'inverse de l'espérance de vie.

Comme la taille de la population est constante, le taux de croissance instantané est nul; le taux instantané de mortalité est donc aussi constant, égal au taux de natalité, c'est à dire encore à l'inverse de l'espérance de vie. Vérifions ce résultat d'une autre manière: le nombre total des décès dans

l'instant dt est la somme des décès survenus à tous les âges soit :

$$\begin{aligned} Ddt &= \int P(x) dx \mu(x) dt \\ &= \int NS(x) \mu(x) dx dt \\ &= \int NS'(x) dx dt \\ &= N \int dS(x) dt \\ &= Ndt \end{aligned}$$

2.2 Age moyen de la population stationnaire

2.2.1 Proposition 1. -

L'âge moyen d'une population stationnaire n'est pas rigoureusement égal à la moitié de la durée moyenne de vie, mais lui est supérieur d'une quantité qui n'est pas négligeable en général :

$$\bar{x} = \frac{e_0}{2} + \frac{\sigma^2}{2e_0}$$

2.2.2 Démonstration: -

Par définition:

$$\bar{x} = \frac{\int xP(x) dx}{\int P(x) dx} = \frac{\int xS(x) dx}{\int S(x) dx} = \frac{1}{e_0} \int xS(x) dx$$

or en intégrant par partie:

$$\int xS(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} S(x) \right]_0 - \int \frac{x^2}{2} S'(x) dx$$

soit encore en utilisant la relation [4] $\int xS(x) dx = \frac{1}{2} \int x^2 d(x) dx$ comme de plus

la variance de la distribution des décès vaut par définition:

$$\sigma^2 = \int (x - e_0)^2 d(x) dx = \int x^2 d(x) dx - e_0^2$$

nous avons finalement $\bar{x} = \frac{1}{e_0} \left[\frac{\sigma^2}{2} + e_0^2 \right]$

2.3 Proposition 2:

L'âge moyen d'une population stationnaire est aussi égal à la moyenne des espérances de vie à chaque âge pondérées par l'effectif de la population à cet âge.

$$\bar{x} = \frac{\int P(x) e(x) dx}{\int P(x) dx}$$

2.3.1 Démonstration - Par définition :

$$\bar{x} = \frac{\int xP(x)dx}{\int P(x)dx} = \frac{N \int xS(x)dx}{\int P(x)dx}$$

l'intégrale $xS(x)dx$ peut s'intégrer par partie de la

manière symétrique à la proposition précédente:

$$x = u, \quad dv = S(x)dx$$

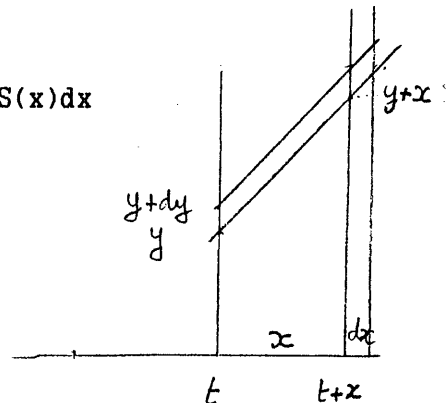
$$\text{d'où } dx=du \text{ et } v = \int_{\infty}^x S(t)dt = -e(x)S(x)dx$$

et enfin

$$\int xS(x)dx = [-xe(x)S(x)]_0^{\infty} - \int -e(x)S(x)dx = \int e(x)S(x)dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int e(x)P(x)dx}{\int P(x)dx}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.4 Pyramide des durées de vie restante

2.4.1 Théorème: -

Dans une population stationnaire on peut dénombrer autant d'individus agés de x années, que d'individus ayant x années à vivre.

2.4.2 Démonstration -

Dans une population stationnaire, le nombre d'individus agés entre x et $x+dx$ années à un instant quelconque t est $P(x)dx = NS(x)dx$.

Il suffit de calculer le nombre de décès attendus entre les instants $t+x$ et $t+x+dx$, parmi la seule population présente à l'instant t .

- sur les $P(y)dy = NS(y)dy$ individus présents à l'instant t , $NS(y)dy$.

$$\frac{S(y+x)}{S(y)} \text{ survivront } x \text{ années, et } NS(y)dy \cdot \frac{S(y+x)}{S(y)} \cdot \mu(y+x) \cdot dx$$

décèderont entre les instants $t+x$ et $t+x+dx$.

- sur l'ensemble de la population présente à l'instant t nous aurons:

$$\begin{aligned} N \int_y S(y)dy \cdot \frac{S(y+x)}{S(y)} \cdot \mu(y+x) \cdot dx &= N \int_y S(y+x) \mu(y+x) dy \cdot dx \\ &= -N \int_y S'(y+x) dy \cdot dx = -N [S(x+u)]_{u=0}^{\infty} = NCS(y+x) \\ &= NS(x) \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

Autrement dit dans une population stationnaire, la pyramide des âges et la pyramide des durées de vie restante sont identiques.

Exercice

Montrer que si la courbe de l'espérance de vie suivant l'âge a un maximum il est atteint pour un âge y vérifiant la relation :

$$\mu(y) = \frac{1}{e_y}$$

2.5 Relations entre le taux de mortalité, la force et le quotient.

2.5.1 Théorème -

Un taux de mortalité ${}_hM_x$ à l'âge x défini sur un intervalle d'âge fini h est voisin de la force de mortalité à l'âge $x + \frac{h}{2}$.

2.5.2 Démonstration -
$$\text{Rapellons que } S(x) = e^{-\int_x^{x+h} \mu(t) dt} \quad [1]$$

et
$${}_hM_x = \frac{S(x) - S(x+h)}{\int_x^{x+h} S(t) dt} \quad [2]$$

enfin
$${}_h^q x = 1 - e^{-\int_x^{x+h} \mu(t) dt} = \frac{S(x) - S(x+h)}{S(x)} \quad [3]$$

Nous devons trouver la relation ${}_hM_x \approx \mu(x + \frac{h}{2})$.

La démonstration fait appel à deux approximations, ou hypothèses sur la linéarité des fonctions S et μ . Ainsi:

1)
$$\int_x^{x+h} S(t) dt \approx h \cdot \frac{S(x) + S(x+h)}{2} \Rightarrow \frac{1}{{}_hM_x} = \frac{1}{{}_h^q x} - \frac{1}{2} \quad [4]$$

2)
$$\int_x^{x+h} \mu(t) dt \approx h \mu(x + \frac{h}{2}) \Rightarrow \mu(x + \frac{h}{2}) = \frac{1}{h} \cdot \text{Log}\left(\frac{1}{{}_h^q x}\right) \quad [5]$$

La relation [4] entre le taux et le quotient s'écrit aussi:
$${}_hM_x = \frac{1}{h} \cdot \frac{{}_h^q x}{1 - \frac{{}_h^q x}{2}} \quad [6]$$

Montrons que les équations [4] et [6] ont même développement limité au second ordre en ${}_h^q x$ (noté x seulement dans la suite):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow -\text{Log}(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \text{ Soit:}$$

$${}_hM_x = \frac{1}{h} \left[\frac{{}_h^q x}{h^q x} + \frac{{}_h^q x^2}{2} + \frac{{}_h^q x^3}{4} + \dots + \frac{{}_h^q x^{n+1}}{2^n} + \dots \right] \text{ et}$$

$$\mu\left(x+\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h} \left[h^q x + \frac{h^q x^2}{2} + \frac{h^q x^3}{3} + \dots + \frac{h^q x^{n+1}}{n+1} + \dots \right]$$

CQFD