

II POPULATION STATIONNAIRE EN CONTINU

Définition

Une population stationnaire est une population dont :

- (1) la force de mortalité peut varier avec l'âge mais reste constante dans le temps.
- (2) le nombre des naissances est constant par unité de temps.

Soit Ndt le nombre de naissances entre les instants $t-dt$ et t .

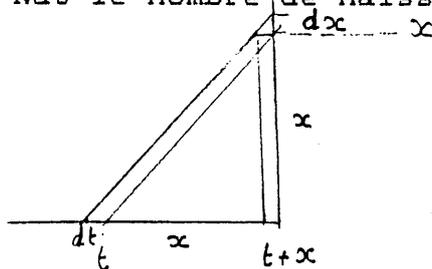


Diagramme de Lescis

Le nombre de lignes de vie parmi les Ndt qui atteindront l'âge exact x entre les dates $t+x-dt$ et $t+x$ est donc $NdtS(x)$.

Le nombre d'individus à la date $t+x$ d'âge compris entre x et $x+dx=x+dt$ est donc $NdxS(x)$, car les décès survenus durant cette durée infinitésimale sont des infiniments petits du deuxième ordre. Notons $P(x)dx$ la population âgée entre l'âge x et l'âge $x+dx$, elle vaut :

$$P(x)dx = NS(x)dx \quad (8) \text{ et est indépendante du temps.}$$

La population totale est donc $P_{t+x} = \int_0^{\infty} P(x)dx = N \int_0^{\infty} S(x)dx$, soit compte tenu de (6)

$$P = Ne_0 \quad (9)$$

La structure par âge est:

$$C(x)dx = \frac{NS(x)dx}{Ne_0} \quad \text{soit} \quad C(x) = \frac{S(x)}{e_0}$$

Il en résulte que la taille de la population est aussi constante dans le temps, et que sa structure par âge est identique à celle des survivants à une constante multiplicative près ($1/e_0$).

Le taux brut de natalité, rapport des naissances dans l'instant dt à la valeur moyenne de la population à cette même date, noté b vaut donc

$$b = \frac{Ndt}{Pdt} = \frac{1}{e_0} \quad (10)$$

Espérance de vie à la naissance

On résume généralement une distribution statistique par ses premiers moments, sa moyenne et son écart-type par référence à la loi normale. L'espérance de vie, résumé de la distribution des décès est définie comme l'espérance mathématique de cette distribution. Ce résumé n'est d'ailleurs pas excellent car la distribution des décès a deux modes et est donc bien éloignée d'une loi normale.

$$e_0 = \int_0^{\infty} x d(x) dx \quad (5)$$

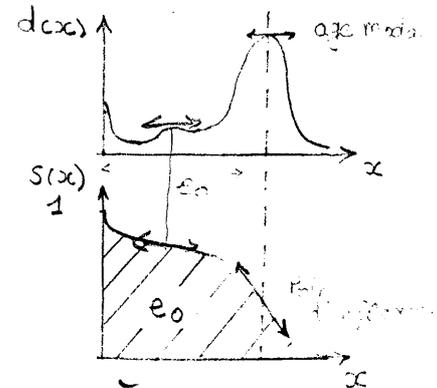
On va montrer en intégrant par partie que l'espérance de vie est aussi l'intégrale de la fonction de survie $S(x)$.

Intégrons (5) par partie:

$$e_0 = \int_0^{\infty} x d(x) dx = [xS(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} S(x) dx$$

$e_0 = \int_0^{\infty} S(x) dx$

(6)



- Espérance de vie à un âge quelconque.

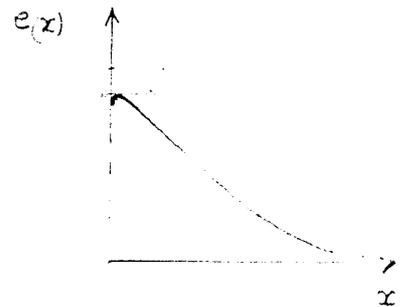
Soi $S(a)$ individus d'âge a , la moyenne des âges de leur décès est:

$$e_a = \int_a^{\infty} x d_a(x) \quad \text{avec}$$

$$d_a(x) = \frac{S(x) \mu(x)}{S(a)}$$

soit aussi $e_a = \frac{1}{S(a)} \int_a^{\infty} S(x) dx$

(7)



Quand la mortalité infantile est forte, on comprend que l'espérance de vie à 1 an puisse être plus grande que l'espérance de vie à la naissance.

Le taux de natalité b est égal à l'inverse de l'espérance de vie.

Comme la taille de la population est constante, le taux de croissance instantané est nul; le taux instantané de mortalité est donc aussi constant, égal au taux de natalité, c'est à dire encore à l'inverse de l'espérance de vie. Vérifions ce résultat d'une autre manière: le nombre total des décès dans l'instant dt est la somme des décès survenus à

tous les âges soit :

$$D dt = \int_0^{\infty} P(x) dx \mu(x) dt = \int_0^{\infty} N S(x) \mu(x) dx dt = \int_0^{\infty} N S'(x) dx dt = N \int_0^{\infty} dS(x) dt = N dt$$

Age moyen de la population stationnaire

Proposition 1.

L'âge moyen d'une population stationnaire n'est pas rigoureusement égal à la moitié de la durée moyenne de vie, mais lui est supérieur d'une quantité qui n'est pas négligeable en général.

$$\bar{x} = e_0/2 + \frac{s^2}{2e_0} \quad (11) \quad \text{où } s^2 \text{ représente le carré de la variance de l'âge au décès.}$$

Démonstration: Par définition

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} xP(x)dx}{\int_0^{\infty} P(x)dx} = \frac{\int_0^{\infty} xS(x)dx}{\int_0^{\infty} S(x)dx} = \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} xS(x)dx$$

or en intégrant par partie: $\int_0^{\infty} xS(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} S(x) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} S'(x)dx$

soit encore en utilisant la relation (4) $= 1/2 \int_0^{\infty} x^2 d(x)dx$

comme de plus la variance de la distribution des décès vaut par définition

$$s^2 = \int_0^{\infty} (x - e_0)^2 d(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 d(x)dx - e_0^2$$

$$\begin{aligned} \text{nous avons finalement } \bar{x} &= \frac{1}{e_0} \left[\frac{1}{2} s^2 + e_0^2 \right] \\ &= \frac{s^2}{2e_0} + \frac{e_0}{2} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Proposition 2: L'âge moyen d'une population stationnaire est aussi égal à la moyenne des espérances de vie à chaque âge pondérées par l'effectif de la population à cet âge:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} P(x)e(x)dx}{\int_0^{\infty} P(x)dx}$$

Démonstration: Par définition,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} xP(x)dx}{\int_0^{\infty} P(x)dx} = \frac{N \int_0^{\infty} xS(x)dx}{\int_0^{\infty} P(x)dx}$$

$xS(x)dx$ peut s'intégrer par partie de la manière symétrique à la proposition précédente:

$$x = u \quad dv = S(x)dx$$

d'où $dx=du$ et $v = -\int_x^{\infty} S(t)dt = -e(x)S(x)$

et enfin $\int_0^{\infty} x S(x) dx = \left[-x e(x) S(x) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e(x) S(x) dx = \int_0^{\infty} e(x) S(x) dx$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} e(x) P(x) dx}{\int_0^{\infty} P(x) dx} \quad 26$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pyramide de survie

Théorème:

Dans une population stationnaire on peut dénombrer autant d'individus âgés de x années, que d'individus ayant x années à vivre.

Démonstration

Dans une population stationnaire, le nombre d'individus âgé entre x et $x+dx$ années à un instant quelconque t est $P(x)dx = NS(x)dx$.

Il suffit de calculer le nombre de décès attendus entre les instants $t+x$ et $t+x+dx$, parmi la seule population présente à l'instant t .

- sur les $P(y)dy = NS(y)dy$ individus présents à l'instant t ,

$$\frac{S(y+x)}{S(y)} \quad \frac{S(y+x)}{S(y)}$$

$NS(y)dy$ ----- survivront x années, et $NS(y)dy$ ----- $\mu(y+x)$

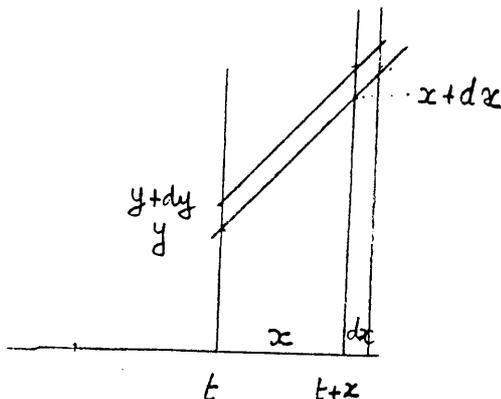
$$\frac{S(y)}{S(y)} \quad \frac{S(y)}{S(y)}$$

décèderont aux âges compris entre $y+x$ et $y+x+dy$, c'est à dire entre les instants $t+x$ et $t+x+dx$ ($dx=dy$).

- sur l'ensemble de la population présente à l'instant t nous aurons:

$$N \int_0^{\infty} S(y) dy \cdot \frac{S(y+x)}{S(y)} \cdot \mu(y+x) = N \int_0^{\infty} S(y+x) \mu(y+x) dy = - N \int_0^{\infty} S'(y+x) dx$$

$$= N[S(y+x)]_0^{\infty} = NS(x) \quad \text{CQFD.}$$



Exercice

Montre que si la courbe de l'espérance de vie pour l'âge x a un maximum, il est pour un âge y vérifiant la relation

$$Mu(y) = \frac{1}{\int_y^{\infty} S(t) dt} = \frac{1}{\int_y^{\infty} e^{-\int_0^y p(t) dt} dt}$$