



HAL
open science

Xper et ApoloGRIFF: Des plateformes numériques pour l'étude des interactions multiphysiques entre corps

Frédéric Dubois, Yann Monerie, Frédéric Perales, Vincent Topin

► To cite this version:

Frédéric Dubois, Yann Monerie, Frédéric Perales, Vincent Topin. Xper et ApoloGRIFF: Des plateformes numériques pour l'étude des interactions multiphysiques entre corps. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722337

HAL Id: hal-01722337

<https://hal.science/hal-01722337v1>

Submitted on 3 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Xper et ApoloGRIFF: Des plateformes numériques pour l'étude des interactions multiphysiques entre corps.

F. Dubois^{1,3}, Y. Monerie^{2,3}, F. Perales^{2,3}, V. Topin²

¹ LMGC, CNRS-Université Montpellier 2, case 048, Place Eugène Bataillon, F-34095 cedex 5, France

² IRSN, PSN, CE Cadarache, BP3 - 13115 St Paul-Lez-Durance Cedex, France, frederic.perales@irsn.fr

³ Laboratoire MIST, CNRS - IRSN - Université Montpellier 2

Résumé — Le papier concerne les outils numériques développés pour l'étude des interactions entre corps rigides ou déformables. Les interactions concernent d'une part la séparation dans le cadre de la rupture dynamique de matériaux fortement hétérogènes et d'autre part le contact entre particules en présence de fluide. Les plateformes numériques associées reposent sur le couplage du logiciel LMGC90 (Dynamique des Contacts) pour la prise en compte d'interactions complexes entre les corps et la bibliothèque PELICANS pour la résolution des comportement volumiques (Eléments finis ou Volumes Finis) des corps.

Mots clés — Fissuration, Modèles de Zone Cohésive Frottante, Dynamique non régulière, Ecoulements particuliers denses, Multiplicateur de Lagrange/ Domaines Fictifs

1 Introduction

Ces travaux concernent les outils numériques développés dans le cadre des recherches de l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire relatives à la sûreté des réacteurs à eau sous pression. Plus précisément, les études présentées dans ce papier portent d'une part sur les interactions de séparation : rupture dynamique des matériaux fortement hétérogènes et d'autre part sur les interactions de contact en présence de fluide : particules immergées dans un fluide.

Ces modélisations d'interactions reposent sur l'approche Non Smooth Contact Dynamics (NSCD), initialement développée par Moreau [1] et Jean [2] et dédiée au traitement de systèmes dynamiques en présence de contraintes unilatérales sans régularisation ni pénalisation.

Interactions de séparation. Dans le cadre de la fissuration dynamique de matériaux hétérogènes, l'approche NSCD est étendue à une modélisation multicorps volumique-surfacique périodique reposant sur des Modèles de Zone Cohésive Frottante (MCFZ) [3, 4]. La plateforme numérique associée, appelée **Xper** (eXtended cohesive zone models and PERiodic homogenization), permet de simuler en trois dimensions la rupture dynamique de matériaux hétérogènes et à gradients de propriétés, de l'amorçage de multifissures jusqu'à la ruine du matériau ainsi que des interactions complexes post-rupture [4, 5].

Interactions de contact en présence de fluide. L'étude des milieux granulaires immergés repose sur un couplage de type Multiplicateur de Lagrange/ Domaines Fictifs (ML/DF) [6, 7] basé sur une méthode par éléments finis de bas degrés inf-sup stables pour la modélisation de la phase fluide et l'approche NSCD pour la phase granulaire [8]. L'outil numérique associé, appelé **ApoloGRIFF** (enhanced Particle interaction using Lmgc90 software for GRains In Fluid Flow), permet de traiter des problèmes d'écoulement non compressibles complexes.

Ces plateformes reposent sur le couplage mixte en programmation orientée objet de la bibliothèque logicielle PELICANS (Plate-forme Evolutive de Librairies de Composants pour l'Analyse Numérique et la Simulation) [9] pour la résolution des problèmes volumiques (Eléments finis ou Volumes Finis) et du logiciel LMGC90 (Logiciel de Mécanique Gérant le Contact) [10, 11] pour le traitement des interactions non régulières.

Les modèles implémentés dans ces plateformes sont succinctement présentés, puis les architectures sont évoquées et enfin, les potentialités des logiciels associés sont illustrées respectivement sur la fissu-

ration d'un bimatériau et l'effet d'un fluide sur la dynamique d'effondrement d'une colonne de grains.

2 Modélisation

2.1 L'approche Non Smooth Contact Dynamics

La discrétisation spatiale de l'équation de la dynamique s'écrit :

$$M\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) + r \quad (1)$$

où q , \dot{q} et \ddot{q} sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération discrets, M est la matrice de masse, $F(q, \dot{q}, t)$ représente les forces intérieures et extérieures et r les forces de contact. Cette équation est traitée dans le cadre de la méthode NSCD [2] et du cadre fonctionnel proposé par [1].

Dans le cadre de la méthode utilisée, l'équation (1) est écrite au sens des mesures différentielles et son intégration temporelle entre $]t_i, t_{i+1}]$ est réalisée par une θ -méthode. Les inconnues du problème sont alors des vitesses et des impulsions. Par ailleurs, le système est condensé sur les inconnues de contact et dans le cas non linéaire résolu par une méthode de Newton-Raphson. Pour chaque contact α , le système s'écrit :

$$\begin{cases} U^\alpha - U_{loclib}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h R^\alpha = 0 \\ R_N^\alpha - \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_N^\alpha - \rho U_N^\alpha) = 0 \\ R_T^\alpha - \text{proj}_{D(\mu|R_N^\alpha|)}(R_T^\alpha - \rho U_T^\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\rho > 0$ et $D(\mu|R_N^\alpha|)$ est le disque de centre 0 et de rayon $\mu|R_N^\alpha|$, μ le coefficient de frottement de Coulomb et R les valeurs locales de la vitesse et de la réaction de contact, U_{loclib}^α la vitesse au contact α et $W^{\alpha\alpha}$ la condensation de l'inverse de la matrice des itérations. Les quantités N et T indiquent respectivement les parties normales et tangentielles.

Le système non linéaire (2) est résolu par la méthode de Newton généralisé proposée dans [12].

2.2 Fissuration : l'approche Non Smooth Fracture Dynamics

L'approche NSCD est étendue au traitement des problèmes de fissuration par translation de la réaction de contact frottant d'une quantité R^{adh} traduisant l'effort qu'il faut fournir pour ouvrir les lèvres d'une fissure en train de se créer d'une ouverture $[u]$ [13] :

$$R^{adh} = K(\beta) \cdot [u] \quad \text{et} \quad \beta = \min(\beta, g(\|[u]\|)) \quad (3)$$

où β une variable traduisant l'endommagement surfacique, $K(\beta)$ un tenseur de deuxième ordre traduisant l'adoucissement progressif du comportement surfacique lors d'une fissuration et g une fonction décroissante de $\|[u]\|$.

Une variante de la loi d'endommagement surfacique de [14] est introduite (pour la présente écriture voir [15]) :

$$\beta = \min(g(\|[u]\|), g(\|[u]\|_{\max})),$$

$$g(x) = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } x \leq \delta_0, \\ \beta_0 \frac{\delta_0}{x} \left(1 - \left(\frac{x - \delta_0}{\delta_c - \delta_0} \right)^2 \right) & \text{si } \delta_0 < x < \delta_c, \\ 0 & \text{si } x \geq \delta_c, \end{cases}$$

avec $\delta_0 = \frac{R_{\max}}{2} \left(\frac{1}{C_N} + \frac{1}{C_T} \right)$, $\delta_c = \frac{3}{2} \left(\frac{w}{R_{\max}} + \frac{\delta_0}{6} \right)$, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, C_N et C_T des raideurs (Pa/m), $0 \leq \beta_0 \leq 1$ un niveau d'endommagement surfacique initial et w une énergie de référence (en J/m^2), R_{\max} est la valeur maximum atteinte par la force adhésive (MPa), $\|[u]\|_{\max}$ est la valeur maximale atteinte par $\|[u]\|$.

2.3 Granulaire immergé : Multiplicateur de Lagrange/Domains Fictifs - NSCD

Soit Ω un domaine fermé et Γ son contour. Nous supposons que Ω est rempli de N_p particules P_i avec $i \in (1, N_p)$. L'ensemble du domaine occupé par les particules est noté P et δP sa frontière.

Introduisons les espaces fonctionnels suivants [6] :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0(\Omega) &= \{v_f \in \mathcal{H}1(\Omega)^d / v_f = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\} \\ \mathcal{V}_\Gamma(\Omega) &= \{v_f \in \mathcal{H}1(\Omega)^d / v_f = u_{f,\Gamma} \text{ sur } \Gamma\} \\ \Lambda &= \mathcal{H}^1(P(t))^d\end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème fluide et granulaire s'écrit [6] :
trouver $u_f \in \mathcal{V}_\Gamma(\Omega)$, $u_s \in \Lambda$ tels que :

(a) Equations combinées du mouvement

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho_f (\partial u_f / \partial t + (u_f \cdot \nabla) u_f - g) \cdot v_f \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v_f \, d\Omega + \int_{\Omega} \tau_f : D(v_f) \, d\Omega \\ + (1 - \rho_f / \rho_s) (\mathbf{M} (du_s^t / dt - g) \cdot v_s^t + \mathbf{1} d\omega / dt \cdot \xi) - \sum_j F_{cj} \cdot v_s^t - \sum_j r_j \cdot (\xi \times C_j) \\ + \int_P \lambda \cdot (v_f - (v_s^t + \xi \times c)) \, d\Omega = 0 \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_0(\Omega), v_s^t \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^{\bar{d}}, \quad (4)\end{aligned}$$

$$\int_P \gamma \cdot (u_f - (u_s^t + \omega \times c)) \, d\Omega = 0, \forall \gamma \in \Lambda. \quad (5)$$

(b) Equation de continuité

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot u_f \, d\Omega = 0, \forall q \in \mathcal{L}_0^2(\Omega). \quad (6)$$

où ρ_f et u_f sont respectivement la densité et la vitesse du fluide, p la pression, τ_f la composante déviatorique du tenseur des contraintes fluide, u_s la vitesse des particules, ρ_s et f_s respectivement la densité des particules et la force volumique associée, g la force de gravité, $u_s^t \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^{\bar{d}}$ une vitesse angulaire telle que $u_s = u_s^t + \omega \times c$, c le vecteur position associé au centre de gravité des particules, \bar{d} est le nombre de composantes non-nulles s de ω , $(v_f, q, \gamma, v_s^t, \xi)$ correspond aux fonctions tests de $(u_f, p, \lambda, u_s^t, \omega)$, $r_j \in \mathbb{R}^d$ sont les forces de contact, $C_j \in \mathbb{R}^d$ les vecteurs entre le centre de gravité des particules et le point de contact, \mathbf{M} la matrice de masse des particules, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{\bar{d} \times \bar{d}}$ le tenseur d'inertie des particules. L'intégration en temps du problème (4)-(6) est effectuée à l'aide de l'algorithme de Marshuk-Yanenko, le problème est ainsi décomposé en cinq sous-problèmes simplifiés [6] :

- 1) Problème de Stokes "dégénéré"
- 2) Problème de transport
- 3) Problème visqueux
 \Rightarrow trouver $u_f^{n+\frac{i}{5}}$ à partir de $u_f^{n+\frac{i-1}{5}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$
- 4) Problème granulaire (Méthode NSCD)
 \Rightarrow Trouver $u_s^{t, n+4/5}$, $\omega^{n+4/5}$ à partir de $u_s^{t, n}$, ω^n
- 5) Problème des domaines fictifs
 \Rightarrow Trouver u_f^{n+1} , $u_s^{t, n+1}$, ω^{n+1} à partir de $u_f^{n+4/5}$, $u_s^{t, n+4/5}$, $\omega^{n+4/5}$

A chaque pas de temps, la méthode de décomposition d'opérateur permet de résoudre indépendamment les équations de Navier-Stokes (étapes de 1 à 3) et le problème granulaire (étape 4) avant de corriger finalement les vitesses du fluide et des particules (étape 5). Le problème granulaire est ici résolu à l'aide de l'approche NSCD. Cette résolution granulaire permet d'une part le traitement des interactions entre particules sans régularisation ni pénalisation et d'autre part l'accès à de nombreux modèles d'interactions (contact, frottement, adhésion, dilatance, etc...) implémentés dans la plateforme LMGC90.

3 Outils numériques

Les modèles développés reposent sur la prise en compte des interactions complexes entre les corps à l'aide du formalisme non régulier offert par l'approche Non Smooth Contact Dynamics. Ce formalisme permet de traiter un grand nombre d'interactions mécaniques incluant de l'adhésion et du contact frottant parmi lesquels on peut citer l'endommagement surfacique (modèles de zones cohésive), l'usure, la dilatance, etc. Cette approche et particulièrement son implémentation dans la librairie LMGC90 offrent un environnement numérique permettant d'aborder naturellement des couplages multiphysiques. Parmi les couplages développés, on peut citer par exemple : les interactions de particules ou de corps maillés en présence de fluide résolu [8] ou moyenné [16], les couplages thermiques [17], la tenue des ouvrages maçonnés [18], la fissuration des matériaux composites [4], le comportement des milieux granulaires secs, drainés ou immergés [8, 19], etc.

Les couplages présentés ici concernent la fissuration de matériaux hétérogènes et le couplage entre un milieu granulaire et un fluide résolu par simulation numérique directe (DNS). Les logiciels associés résultent du couplage mixte (C++ et Fortran90) et orienté objet du logiciel LMGC90 et d'applications issues de la bibliothèque PELICANS.

LMGC90 [11] est une plateforme conçue avec une approche orientée objet et réalisée en Fortran90. Cette plateforme développée au Laboratoire de Mécanique et Genie Civil (LMGC) de Montpellier est dédiée à la modélisation et au traitement des problèmes d'interaction entre corps et repose sur l'approche NSCD. En particulier, elle permet la prise en compte sans régularisation ni pénalisation de l'interaction entre particules ou entre corps en fissuration.

PELICANS [9] est un outil d'implémentation de solveurs numériques de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cet outil est développé en C++ par l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire.

Dans le cadre de la fissuration des matériaux hétérogènes, l'approche retenue est monolithique (les champs sont résolus simultanément). Dans ce cas, la bibliothèque LMGC90 permet de prendre en compte les *interactions de séparations* lors de la phase d'endommagement de la surface mais aussi de l'interaction contact-frottant post rupture. PELICANS joue ici le rôle d'une bibliothèque Éléments finis avec une extension périodique. Le logiciel obtenu, **Xper**, permet de simuler en grandes déformations et en 3D la rupture dynamique des matériaux hétérogènes et à gradients de propriétés, de l'amorçage de multifissures jusqu'à la ruine finale et la prise en compte des interaction complexes post-ruptures (contact, frottement, ...).

Le problème granulaire immergé est pris en compte à l'aide d'un couplage faible respectant la résolution des problèmes de façon hiérarchique. Ce couplage est parfaitement adapté à la modélisation décrite précédemment. Chaque bibliothèque intervient ainsi de manière distincte : PELICANS résout le problème fluide (Éléments finis ou Volumes Finis) par simulation numérique directe puis LMGC90 résout les *interactions de contact* du problème granulaire. Le logiciel obtenu, **ApoloGRIFF**, traite des problèmes 3D d'écoulements non compressibles complexes avec la prise en compte d'interactions entre particules.

Ces logiciels sont illustrés dans la suite.

4 Applications

4.1 Xper : influence de l'interface sur la tenue mécanique d'un bimatériau

À titre illustratif des potentialités du formalisme proposé, une première application concerne l'effet de l'interface entre les phases sur la tenue mécanique d'un bimatériau. Les calculs sont effectués sur un volume rectangulaire ($10^{-4} \times 6 \times 10^{-5} \times 10^{-4} m^3$) contenant des inclusions parallélépipédiques rectangles réparties aléatoirement. Les mailles sont tétraédriques avec une taille de l'ordre de $10^{-5} m$.

La matrice est supposée élastoplastique et les inclusions élastiques, avec les propriétés suivantes : $E^{\text{mat}} = 99 GPa$, $E^{\text{incl}} = 135 GPa$, $\nu^{\text{mat}} = 0.325$, $\nu^{\text{incl}} = 0.32$, $\rho^{\text{mat}} = \rho^{\text{incl}} = 7850 kg/m^3$, $\sigma_0^{\text{mat}} = 450 MPa$ et $H_Y = 850 MPa$. Les propriétés surfaciques retenues pour les interfaces matrice/matrice, inclusions/inclusions et matrice/inclusions sont : $C_N^{\text{mat}} = C_T^{\text{mat}} = 2 \cdot 10^{19} Pa/m$, $C_N^{\text{incl}} = C_T^{\text{incl}} = 2C_N^{\text{mat}}$, $C_N^{\text{mat/incl}} = C_T^{\text{mat/incl}} = 2C_N^{\text{mat}}$, $w^{\text{mat}} = 0.005 J/m^2$, $w^{\text{incl}} = 0.1 w^{\text{mat}}$ et $w^{\text{mat/incl}} = 0.1 w^{\text{mat}}$ si l'interface est considérée comme 'faible' et

$w_{\text{mat/incl}} = 100w_{\text{mat}}$ si l'interface est considérée comme 'forte'.

Une zone cohésive est introduite entre chaque maille laissant ainsi la possibilité à la fissure de se propager sur chaque face interne du maillage (incluant les inclusions).

Des conditions aux limites en vitesse sont imposées en haut et en bas de la structure, respectivement $v = 2m/s$ et $v = -2m/s$. Une préfissure perpendiculaire au chargement est présente sur le bord gauche et les calculs sont effectués sans frottement.

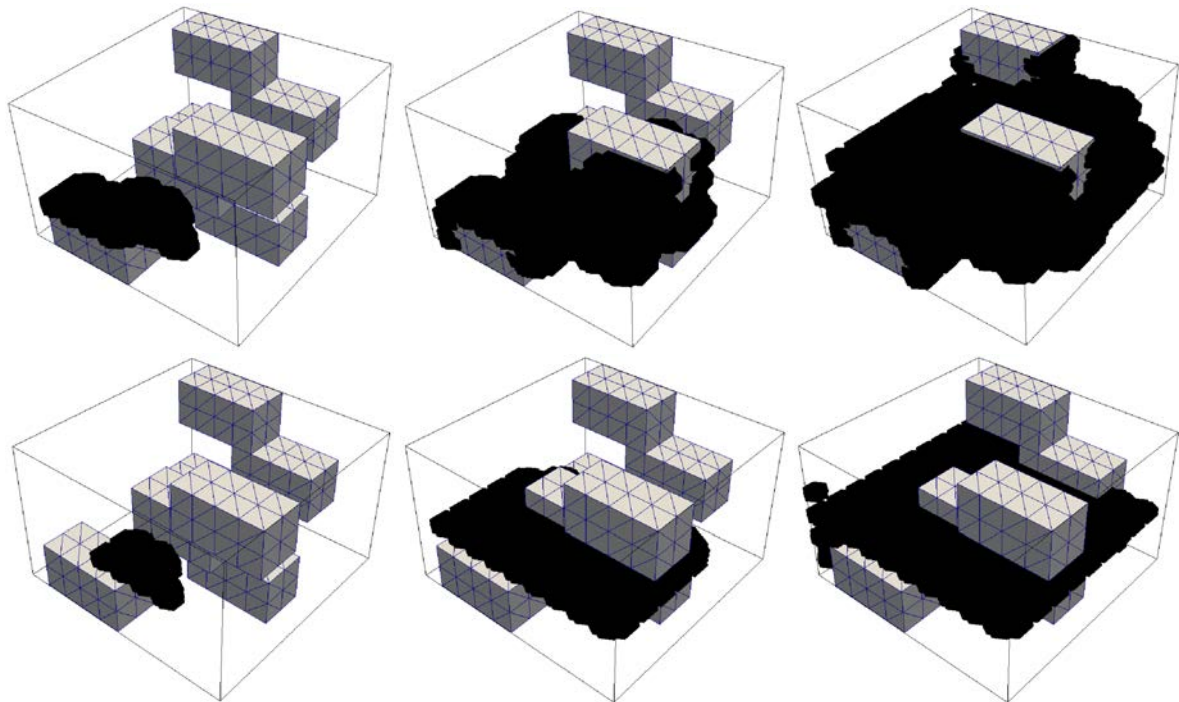


Fig. 1 – Evolution de la fissure (en noir) pour $t = 8.9 \times 10^{-8} s$, $t = 10^{-7} s$ et $t = 1.08 \times 10^{-7} s$. Dans le cas d'une interface faible (en haut) : la fissure contourne les inclusions, dans le cas d'une interface forte (en bas) : la fissure se propage dans les inclusions.

La Fig. 1 montre l'influence de l'interface sur la propagation de fissures dans le bimatériau. Dans le cas d'une interface 'faible', la fissure se propage dans la matrice puis contourne les inclusions. Les interfaces se rompent et les zones fragiles ainsi créées participent à la propagation rapide des fissures dans le matériau. Dans le cas d'une interface 'forte', la fissure se propage dans la matrice puis dans les inclusions. La fissure principale évolue ainsi dans le plan (x,z) de la préfissure.

4.2 ApoloGRIFF : effondrement d'une colonne de grains immergée

Ce second exemple concerne l'effondrement d'une colonne de grains immergée dans un fluide [19]. L'échantillon est composé de disques rigides de faible dispersité ($\Delta d/d = 0.8$), de diamètre moyen $d = 10^{-3} m$ et de compacité 0.8. Les disques sont répartis dans un domaine rectangulaire de largeur $R_0 = 11.5d$ et de hauteur H_0 . Le domaine fluide est rectangulaire de dimension entre $[150d \times 60d]$ et $[300d \times 150d]$. Les interactions suivent une loi de contact de Signorini-Coulomb avec un coefficient de frottement égal à 0.3. La densité du fluide est égale à celle de l'eau $\rho_f = \rho_{H_2O}$ et celle des particules est fixée à $\rho_s = 2.6\rho_f$. Pour chaque rapport d'aspect $a = H_0/R_0 \in]0; 10]$ (pour $a = 10$, le nombre de grains est de 1360), trois simulations sont effectuées : sans fluide, avec de l'eau $\eta = \eta_{H_2O}$ et avec un fluide de viscosité $\eta = 10^3 \eta_{H_2O}$. Ces simulations correspondent à trois régimes : sec, inertiel et visqueux.

La Fig. 2 représente une séquence d'images issues de la simulation d'une colonne de grains de rapport d'aspect $a = 8$ dans les trois régimes. Deux effets antagonistes du fluide sont mis en évidence : d'une part, il dissipe l'énergie cinétique des grains par frottement visqueux pendant la phase de chute et d'autre part, l'écoulement est facilité par lubrification des contacts pendant la phase d'étalement. Les résultats sont détaillés dans [19].

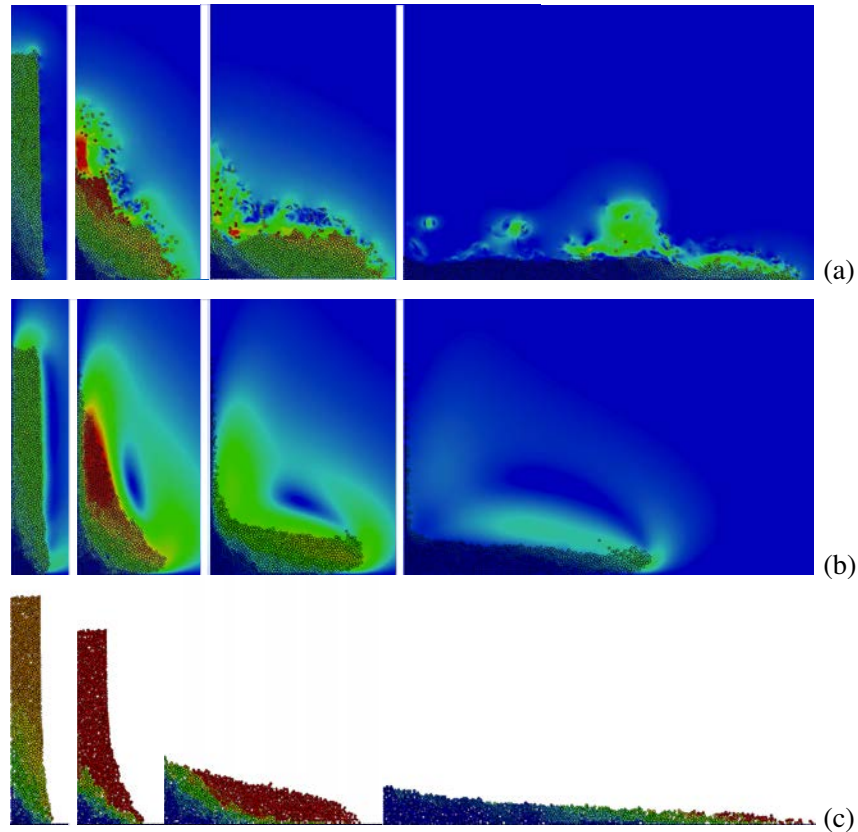


Fig. 2 – Effondrement d’une colonne de grains ($a = 8$) dans les cas (a) inertiel, (b) visqueux et (c) sec. Les vitesses dans le fluide sont représentées en niveau de couleur.

5 Conclusion

Ce papier a présenté une stratégie de simulation numérique dédiée aux mécanismes d’interactions complexes entre corps rigides ou déformables en présence de couplages multiphysiques. Deux exemples ont été mis en évidence : la fissuration dynamique de matériaux hétérogènes et l’étude du comportement d’écoulements granulaires dans des fluides non compressibles. Les plateformes numériques associées reposent sur l’approche Non Smooth Contact Dynamics. La stratégie logicielle est obtenue à l’aide du couplage modulaire de deux bibliothèques principales : LMGC90, dédiée à la résolution des problèmes d’interaction entre corps sans régularisation ni pénalisation et PELICANS, dédiée à la résolution par Éléments Finis solides ou fluides. Ces outils ont été illustrés par la fissuration dynamique d’un bimatériau et l’effondrement d’une colonne de grains dans un fluide.

Références

- [1] J.J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*. Non Smooth Mechanics and Applications, Moreau, J.J. and Panagiotopoulos, P.D., CISM - Courses and Lectures, Springer, 1-82, 302, 1988.
- [2] M. Jean. *The non-smooth contact dynamics method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 235–257, 177, 1999.
- [3] M. Jean., V. Acary, Y. Monerie. *Non Smooth contact dynamics approach of cohesive materials*. In, Proceedings of the Royal Society (Special Issue on non smooth mechanics), 2001.
- [4] F. Perales, F. Dubois, Y. Monerie, B. Piar, L. Stainier. *A NonSmooth Contact Dynamics-based multi-domain solver*, European Journal of Computational Mechanics, 19 :389-417, 2010.
- [5] F. Perales, S. Bourgeois, A. Chrysochoos, and Y. Monerie. *Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of nonlinear heterogeneous materials*, Engineering Fracture Mechanics, 75 :3378-3398, 2008.

- [6] A. Wachs. *A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions*, Computers & Fluids, 38(8) :1608-1628, 2009.
- [7] A. Wachs. *PeliGRIFF, a parallel DEM-DLM/FD direct numerical simulation tool for 3D particulate flows*, in press in to Journal of Engineering Mathematics, available online, DOI 10.1007/s10665-010-9436-2, 2010.
- [8] V. Topin, F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, and A. Wachs. *Micro-rheology of dense particulate flow : application to immersed avalanches*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166 :63-72, 2010.
- [9] PELICANS. *Web site : <https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans/>*
- [10] F. Dubois, M. Jean, M. Renouf, R. Mozul, A. Martin, M. Bagneris. *LMGC90*. 10ème colloque national en calcul de structures, Giens, 2011.
- [11] LMG90. *Web site : <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMGC90/>*
- [12] P. Alart and A. Curnier. *A generalized newton method for contact problems with friction*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 7 :67-82, 1988.
- [13] Y. Monerie and V. Acary. *Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement*. Revue Européenne des Elements Finis, 10 :489-503, 2001.
- [14] J.-C. Michel, P. Suquet and F. Thébaud. *Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique*. Revue Européenne des Elements Finis, 3 :573-595, 1994.
- [15] Y. Monerie, M. Raous, F.-H. Leroy, O. Sudre, F. Feyel and J.-L. Chaboche. *Comparaison de lois d'interface fibre/matrice sur la base d'un modèle uniaxial d'expérience de micro-indentation*. Comptes Rendus des Onzièmes Journées Nationales sur les Composites, AMAC, J. Lamon and D. Baptiste ed., 565-574, 1998.
- [16] A. Martin. *Ecoulement confiné d'un matériau granulaire en interaction avec un gaz : application à la relocalisation du combustible nucléaire*. Thèse de doctorat de Montpellier 2, 2010.
- [17] T. Champelovier and M. Renouf. *Modèle multi-physiques par éléments discrets. Applications à la modélisation du troisième corps*. CSMA, Giens, 2009.
- [18] B. Chetouane, F. Dubois, M. Vinches, C. Bohatier. *NSCD discrete element method for modeling masonry structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64 :65-94, 2005.
- [19] V. Topin, Y. Monerie, F. Perales, and F. Radjaï. *Collapse dynamics and runout of dense granular materials in a fluid*. Physical Review Letters, 109 :188001, 2012.