



**HAL**  
open science

## Propriétés de résistance de matériaux nanoporeux

Djimedo Kondo, Luc Dormieux, Vincent Monchiet

► **To cite this version:**

Djimedo Kondo, Luc Dormieux, Vincent Monchiet. Propriétés de résistance de matériaux nanoporeux. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722335

**HAL Id: hal-01722335**

**<https://hal.science/hal-01722335>**

Submitted on 3 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Propriétés de résistance de matériaux nanoporeux

Djimedo KONDO <sup>1</sup>, Luc DORMIEUX <sup>2</sup>, Vincent MONCHIET <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Pierre et Marie Curie, Institut Jean Le Rond D'Alembert, 75 252 Paris Cedex 05. Email : djimedo.kondo@upmc.fr

<sup>2</sup> Université Paris-Est, Laboratoire MSME, UMR8208 CNRS, 5 boulevard Descartes, 77 454 Marne la Vallée Cedex.

Email : vincent.monchiet@univ-paris-est.fr

<sup>3</sup> Unité de Recherche Navier, UMR 8205 CNRS, 6/8 Avenue B. Pascal, 77 455 Champs/Marne. Email : dormieux@lmsgc.enpc.fr

---

**Résumé** — Nous étudions les effets de forme et de taille de cavités sur les propriétés de résistance macroscopiques de matériaux ductiles contenant des vides sphéroïdales aux très petites échelles. À cette fin, nous procédons à l'analyse limite d'une cellule unitaire sphéroïdale, contenant une cavité confocale sphéroïdale, et soumis à un chargement mécanique arbitraire. La matrice solide est supposée obéir au critère de von Mises avec règle d'écoulement associé. L'homogénéisation du milieu nanoporeux s'appuie principalement sur la considération de contraintes à l'interface entre la matrice et les nanopores, l'interface, plastique, étant susceptible d'un saut du vecteur contraintes. Le critère de résistance macroscopique obtenu prédit, pour le matériau nanoporeux, des caractéristiques inhabituelles telles que (i) une dépendance significative de la résistance lorsque la dimension des cavités diminue, (iii) un effet combiné de la forme et de la taille des cavités. Les résultats sont en bon accord avec des données de simulations atomistiques récentes.

---

## 1 Introduction

Les effets de taille de cavités dans les milieux ductiles ont été mis en évidence expérimentalement [1, 2] puis étudiés numériquement par de nombreux auteurs parmi lesquels Fleck et Hutchinson [3], Huang et al. [4, 5], Wen et al. [6]. Dans ces travaux, les effets de taille sont capturés en considérant pour la matrice solide des modèles de plasticité à gradient [3]. Alternativement, des travaux plus récents dont [7, 8] ont permis d'aborder ces effets de taille de cavités en considérant des interfaces imparfaites. En particulier, en considérant à l'interface solide-cavité une version plastique du modèle d'élasticité surfacique de Gurtin et Murdoch<sup>1</sup> récemment proposée par [10], Dormieux et Kondo [8] ont proposé une extension du modèle de Gurson rendant explicitement compte de l'influence de la taille des vides. On se propose dans cette étude de déterminer le critère macroscopique de milieux nanoporeux, en recherchant une modélisation rendant compte à la fois les effets de taille et de forme des cavités. A cette fin, on reprendra d'abord l'analyse limite du sphéroïde creux introduite par Gologanu et al. [11, 12], en y adjoignant la présence d'interface solide-cavité où les contraintes interfaciales sont décrites par la version plastique du modèle de Gurtin et Murdoch [10]. On généralise par ce biais les résultats établis dans [8] pour le cas particulier de la cavité sphérique. L'investigation des effets combinés de forme et de taille des cavités constituent le principal objectif de l'étude.

---

<sup>1</sup> On notera que l'incorporation de ce modèle dans les méthodes d'homogénéisation de milieux nanocomposites introduit généralement la nécessité de prise en compte d'une discontinuité du vecteur contrainte à la traversée de l'interface imparfaite qui doit satisfaire à l'équation de Young Laplace généralisée (cf. par exemple [9]).

## 2 Effets combinés de forme et de taille des cavités sur la résistance

### 2.1 Analyse limite du sphéroïde creux avec contraintes interfaciales

On se propose d'étendre le cadre usuel d'analyse limite du sphéroïde creux, en y incorporant des effets de contraintes interfaciales. La cellule élémentaire, décrite sur la figure 1, est donc constituée d'une matrice obéissant au critère de von Mises et à la règle d'écoulement qui lui est associée. Son bord extérieur est soumis à des conditions usuelles de taux de déformation homogène au bord. On note  $\sigma_0$  la limite d'écoulement en traction uniaxiale de la matrice. Le comportement de l'interface entre la surface de la cavité et la matrice est décrit à l'aide la version plastique du modèle de Gurtin, décrite en [10] et incluant de plus la vérification des équations de Young-Laplace généralisées.

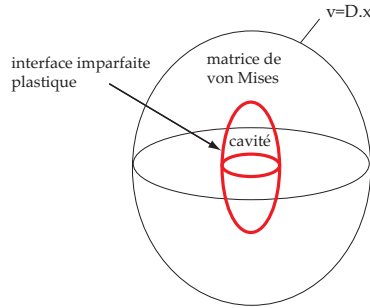


Fig. 1 – Cellule élémentaire sphéroïdale contenant une cavité sphéroïdale confocale au bord extérieur et une interface imparfaite plastique cohérente

La dissipation macroscopique, donnant le critère du milieu poreux, se présente sous la forme :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{K}} \frac{1}{V_2} \left[ \int_{\Omega-\omega} \sigma_0 d_{eq} dV + \int_{\Gamma} [\underline{t}]_{\Gamma} \cdot \underline{v} dS \right] \quad (1)$$

Le saut du vecteur contrainte,  $[\underline{t}]_{\Gamma}$ , à la traversée de l'interface  $\Gamma$ , vérifiant la relation de Young Laplace généralisée, on montre alors que :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \Pi_1(\mathbf{D}) + \Pi_2(\mathbf{D}) + \Pi_3(\mathbf{D}) \quad (2)$$

où les quantités  $\Pi_1(\mathbf{D})$ ,  $\Pi_2(\mathbf{D})$  et  $\Pi_3(\mathbf{D})$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1(\mathbf{D}) = \frac{1}{V_2} \int_{\Omega-\omega} \sigma_0 d_{eq} dV; \quad \Pi_2(\mathbf{D}) = \frac{1}{V_2} \int_{\Gamma} \tau_r \operatorname{tr}(\mathbf{d}_s) dS; \quad \Pi_3(\mathbf{D}) = \frac{1}{V_2} \int_{\Gamma} \tau_0 d_{eq}^s dS \end{array} \right. \quad (3)$$

La contribution  $\Pi_1(\mathbf{D})$  à la dissipation macroscopique est associée à la déformation plastique de la matrice ; sa détermination, classique maintenant, a été effectué par Gologanu et al. [11, 12] dans le cadre de l'analyse limite des milieux ductiles contenant des cavités sphéroïdales.  $\Pi_2(\mathbf{D})$  et  $\Pi_3(\mathbf{D})$  sont des contributions de l'interface ; elles ont été considérées par [8] dans le cas d'une cavité sphérique.

### 2.2 Détermination de la dissipation et du critère macroscopiques

Une estimation de la dissipation macroscopique et de la résistance qui en dérive peut être obtenue en considérant un champ d'essai incompressible et cinématiquement admissible. Compte tenu de la difficulté supplémentaire liée ici à la prise en compte des contraintes interfaciales, on adopte pour la

présente analyse le champ de vitesse classique, celui considéré par Gologanu et al. [11, 12]. Il s'en suit que l'expression de la dissipation  $\Pi_1(\mathbf{D})$  est celle déjà établie par ces auteurs (voir également Monchiet et al. [13] sous une forme unifiée valable aussi bien pour des cavités sphéroïdales allongées qu'aplaties). Son expression est :

$$\Pi_1(\mathbf{D}) = \sigma_0 f \left[ Y \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{uY}{X} \right\} - \frac{\sqrt{X^2 + u^2 Y^2}}{u} \right]_{u=f/(f+g)}^{u=f/(1+g)} \quad (4)$$

où,  $f$  étant la porosité, les quantités  $X$  et  $Y$  sont définies par :

$$\begin{aligned} X &= [(1-\zeta)(D_q + (1-3\alpha_2)D_m)^2 + D_s^2 + D_t^2]^{1/2}, \\ Y &= \frac{1}{f\kappa} [3 + \eta(1-3\alpha_2)] D_m + \frac{\eta}{f\kappa} D_q \end{aligned} \quad (5)$$

et où les paramètres  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$  et  $g$  dépendent des excentricités  $e_1$  et  $e_2$  des sphéroïdes intérieurs et extérieurs, respectivement.  $\alpha_2$  dépend de  $e_2$  (voir [13]). Les quantités  $D_m$ ,  $D_q$ ,  $D_s$  et  $D_t$  sont des invariants isotropes transverses du tenseur taux de déformations macroscopique, définis par :

$$\begin{cases} D_m = \frac{1}{3}(D_{11} + D_{22} + D_{33}); & D_q = \frac{2}{3}D_{33} - \frac{1}{3}(D_{11} + D_{22}) \\ D_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(D_{22} - D_{11})^2 + 4D_{12}^2}; & D_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{D_{13}^2 + D_{23}^2} \end{cases} \quad (6)$$

Concernant la contribution  $\Pi_2(\mathbf{D})$  à la dissipation macroscopique, on montre en [14] que :

$$\Pi_2(\mathbf{D}) = \frac{\tau_r S_1}{V_1} (g_1 D_m + g_2 D_q) \quad (7)$$

dans lequel on a posé (avec  $a_1$  et  $b_1$  les longueur des 2 axes de la cavité) :

$$S_1 = \begin{cases} \frac{2\pi a_1^2 b_1}{c} \arctan \left\{ \frac{c}{b_1} \right\} + 2\pi b_1^2 & \text{(pour les cavités allongées)} \\ \frac{2\pi a_1^2 b_1}{c} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{c}{b_1} \right\} + 2\pi b_1^2 & \text{(pour les cavités aplaties)} \end{cases} \quad (8)$$

et où les coefficients  $g_1$  et  $g_2$  sont définis par :

$$g_1 = 2 - \frac{1}{2}(1-3\gamma)(1-3\alpha_1 - f(1-3\alpha_2)), \quad g_2 = \frac{f}{2}(1-3\gamma) \quad (9)$$

avec le paramètre  $\gamma$  dépendant de la forme de la cavité et s'écrivant :  $\gamma = \frac{b_1^2}{a_1^2 - b_1^2} \left( 1 - \frac{4\pi b_1^2}{S_1} \right)$ . S'agissant de l'expression de  $\Pi_3(\mathbf{D})$ , on montre également dans [14] qu'elle s'écrit :

$$\Pi_3(\mathbf{D}) = \frac{\tau_0 S_1}{V_1} \sqrt{h_1 D_m^2 + h_2 D_q^2 + 2h_3 D_m D_q + h_4 D_s^2 + h_5 D_t^2} \quad (10)$$

où les coefficients  $h_n$  s'écrivent :

$$\begin{cases} h_1 = (3\gamma + 3\mu - 2)U^2 + 2(3\gamma - 1)U + 4; & h_2 = f^2(3\gamma + 3\mu - 2) \\ h_3 = f(2 - 3\gamma - 3\mu)U + f(1 - 3\gamma); & h_4 = f^2(2\gamma + \mu)/2; & h_5 = f^2(5 - 4\mu - 5\gamma)/2 \end{cases} \quad (11)$$

avec  $U = 1 - 3\alpha_1 - f(1 - 3\alpha_2)$  et où le paramètre  $\mu$  est défini par :  $\mu = \frac{a_1^2}{a_1^2 - b_1^2} (1 - 3\gamma)$ .

On notera que les expressions analytiques des contributions interfaciales  $\Pi_2(\mathbf{D})$  et  $\Pi_3(\mathbf{D})$  font apparaître le rapport  $\frac{\tau_0 S_1}{V}$ , ce qui introduit de fait des effets de taille des cavités.

De façon classique, le critère macroscopique est obtenu à partir de la dissipation  $\Pi(\mathbf{D})$ , définie par (2) et où les termes  $\Pi_1(\mathbf{D})$ ,  $\Pi_2(\mathbf{D})$  et  $\Pi_3(\mathbf{D})$  sont respectivement donnés par (4), (7) et (10).  $\Pi(\mathbf{D})$  étant dépendant du taux de déformation  $\mathbf{D}$  uniquement à travers les quantités  $D_m$ ,  $D_q$ ,  $D_s$  et  $D_t$  définies par (6), le critère macroscopique est défini par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_m = \frac{1}{3} \frac{\partial \Pi}{\partial D_m}(D_m, D_q, D_s, D_t); & \Sigma_q = \frac{\partial \Pi}{\partial D_q}(D_m, D_q, D_s, D_t) \\ \Sigma_s = \frac{\partial \Pi}{\partial D_s}(D_m, D_q, D_s, D_t); & \Sigma_t = \frac{\partial \Pi}{\partial D_t}(D_m, D_q, D_s, D_t) \end{cases} \quad (12)$$

Le détail de ces expressions peut être trouvé dans [14].

### 3 Cas de nanocavités sphériques

On se propose tout d'abord d'illustrer les effets de taille de cavités sur le critère macroscopique de milieux ductiles contenant des cavités sphériques. Cette illustration sera d'abord précédée par une évaluation de la pertinence du critère par rapport à des données récentes de la littérature issues de simulations atomistiques. On rappelle que dans le cas des nanocavités sphériques, le critère obtenu est la borne supérieure de la surface de charge macroscopique, proposée par Dormieux et Kondo [8].

#### 3.1 Evaluation à partir de résultats de simulations atomistiques

Afin d'étudier l'effet de la contrainte interfaciale sur la résistance macroscopique, on propose une calibration de la résistance interfaciale  $\tau_0$  sur la base des données de simulations atomistiques de Mi et al. [15] qui ont considéré un aluminium poreux cristallin (voir aussi Traiviratana et al. [16] pour des résultats qualitativement similaires). Les auteurs ont considéré une cellule élémentaire poreuse soumise à son bord à une extension uniaxiale  $\mathbf{D} = D_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ . Pour une telle sollicitation,  $D_m = D_{33}/3$  et  $D_{eq} = 2D_{33}/3$ , ce qui fixe le rapport  $\xi = \frac{D_m}{D_{eq}} = \frac{1}{2}$ . Par isotropie, le tenseur des contraintes résultant de cette déformation uniaxiale est axisymétrique :  $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \Sigma_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)$ . D'où  $\Sigma_{33} = \Sigma_m + 2\Sigma_{eq}/3$ ,  $\Sigma_{eq}$  étant la contrainte équivalente macroscopique de Von Mises. Comme dans les simulations atomistiques, 4 tailles de cavité ont été étudiées, tandis que la porosité est maintenue constante et égale à  $f = 0.0042$ . Les données numériques issues de [15] sont reportées sur la figure 2 (les cercles) sous la forme de la résistance  $\Sigma_{33}$  en fonction du rayon de la cavité; elles indiquent un effet significatif du rayon de la cavité.

On se propose maintenant de comparer les résultats prédits par le modèle théorique à ceux issus des simulations atomistiques.

A cette fin, on note d'abord que la dépendance de  $\Sigma_{33}$  du rayon de la cavité, dans le cas de l'extension uniaxiale, se met sous la forme  $\Sigma_{33} = P + Q/a_1$  avec  $P = \frac{2\sigma_0}{3} \left[ \operatorname{arcsinh} \left( \frac{u}{f} \right) - \frac{\sqrt{u^2 + f^2}}{u} \right]_f^1$

et  $Q = \frac{2\tau_0}{a_1} \sqrt{1 + \frac{3f^2}{5}}$ . Par ailleurs, la calibration de ces constantes à partir des données numériques issues de Mi et al. [15] conduit à  $P = 2.266 \text{ GPa}$  et  $Q = 1.089 \text{ GPa}$ . La porosité dans les calculs atomistiques étant fixée à  $f = 0.0042$ , la valeur de  $\sigma_0$  a pu être déterminée à partir de la relation donnant  $P$  :  $\sigma_0 \simeq 0.59 \text{ GPa}$ , tandis que  $\tau_0$  est déduit de l'expression de  $Q$  et vaut  $\tau_0 = 0.545 \text{ N/m}$ . Sur la figure 2, les prédictions du modèle théorique (trait continu) sont comparées aux données numériques

issues des simulations atomistiques (cercles), en adoptant les valeurs calibrées de  $\tau_0$  and  $\sigma_0$ . De façon assez intéressante, et malgré des bases de calcul très différentes, le modèle proposé reproduit bien la variation de la résistance macroscopique avec le rayon de la cavité sphérique<sup>2</sup>

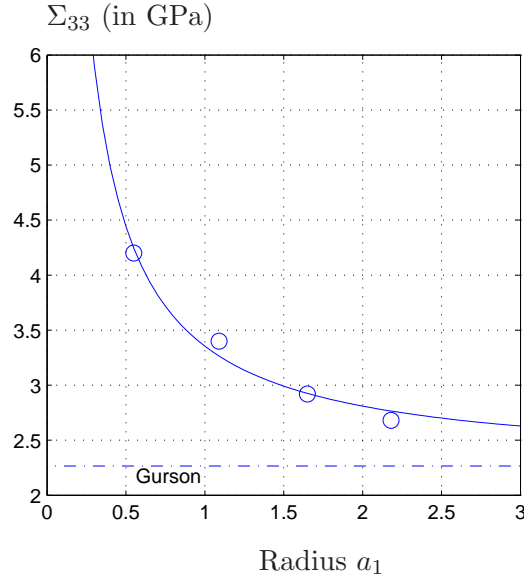


Fig. 2 – Résistance  $\Sigma_{33}$ , en fonction du rayon de la cavité. Comparaison entre les données numériques issues des simulations atomistiques par Mi et al. [15] (cercles), le modèle macroscopique  $\Sigma_{33} = P + Q/a_1$  (the full line). La prediction du modèle de Gurson est également représenté (dashed line).

### 3.2 Prédications du critère isotrope pour un trajet arbitraire

Sur la figure 3 est illustrée l’effet de la taille des cavités sphériques pour un chargement arbitraire paramétré par  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_q$ , la surface de charge macroscopique étant donnée par (12). Deux valeurs du paramètre adimensionnel  $k = \tau_0/(a_1\sigma_0)$  ont été considérées ( $k = 0.25$  et  $k = 0.5$ ), tandis qu’une porosité  $f = 0.1$  est retenue. Les valeurs  $\tau_0 = 0.54N/m$  et  $\sigma_0 = 0.59GPa$  étant celles issues de la calibration précédente, les cas  $k = 0.25$  et  $k = 0.5$  correspondent à un rayon d’environ  $1.8nm$  et  $3.7nm$ , respectivement. Les résultats montrent un important effet de  $k$ , et par conséquent de la taille des nano cavités. On notera également sur cette figure un très bon accord entre le critère approché proposé (trait continu) et les résultats déterminés à l’aide d’une évaluation numérique (cercles) de la dissipation macroscopique (2).

<sup>2</sup>Il ne s’agit pas à proprement parler de validation du modèle, mais de vérification de sa cohérence.

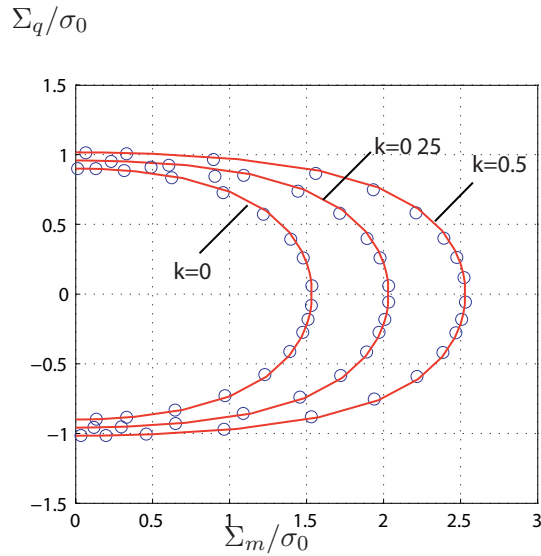


Fig. 3 – Surface de charge pour des nanocavités sphériques, pour diverses valeurs de  $k = \tau_0/(a_1\sigma_0)$  et pour une porosité  $f = 0.1$ . Comparaison du critère approché (ligne continue) et du critère exact à deux champs, déterminé numériquement (cercles).

#### 4 Illustration des effets combinés de forme et de taille de cavités

On se propose à présent d’illustrer les effets de taille de cavités sur le critère macroscopique de milieux ductiles contenant des cavités sphéroïdales. On adopte à cette fin un chargement macroscopique axisymétrique, défini par les composantes non nulles du tenseur des contraintes macroscopiques suivantes :  $\Sigma_{22} = \Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{33}$ . Les invariants isotropes transverses non nuls de ce tenseur  $\Sigma$  étant alors  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_q$ , le critère macroscopique est déterminé par les deux premières équations dans (12). Sur la figure 4, est représentée la surface macroscopique pour le cas des cavités allongées. Deux rapports d’aspect ont été considérés :  $a_1/b_1 = 2$  (résultats à droite) et  $a_1/b_1 = 5$  (à gauche). La porosité est toujours prise égale à  $f = 0.1$  et trois valeurs distinctes du paramètre  $k = \tau_0/(b_1\sigma_0)$  ont été considérées, ce qui met clairement en évidence les effets de taille de cavités, sachant que  $k = 0$  correspond au modèle classique (sans effet de taille) de Gologanu et al. [11, 12] (cf. également Garajeu et al. [17]). Le critère paramétrique établi dans cette étude étant approché, en raison d’un certain nombre d’approximations requises pour mener à terme les calculs pour le champ d’essai considéré, il convient de le comparer au critère ”exact” obtenu par évaluation numérique des intégrales introduites en (3). On observe une bonne concordance entre les résultats numériques (cercles) et le critère approché, et ce pour les trois valeurs du paramètre  $k$ . Les résultats concernant le cas de cavités aplaties sont présentées sur les figures 5 (à droite, pour un rapport d’aspect  $a_1/b_1 = 1/2$ , et à gauche pour  $a_1/b_1 = 1/5$ ). On note une légère différences entre le critère approché (en ligne continue) et les résultats numériques (cercles) seulement dans le cas des cavités aplaties de rapport d’aspect  $a_1/b_1 = 1/5$ . Ces résultats correspondant aux cavités sphéroïdales montrent clairement des effets de taille nettement plus importants pour des cavités aplaties que pour les cavités allongées. Cet effet combiné, tel qu’il est observé, s’explique par le fait qu’à porosité fixée, l’aire des surfaces de cavités par unité de volume est plus important dans le cas des cavités aplaties.

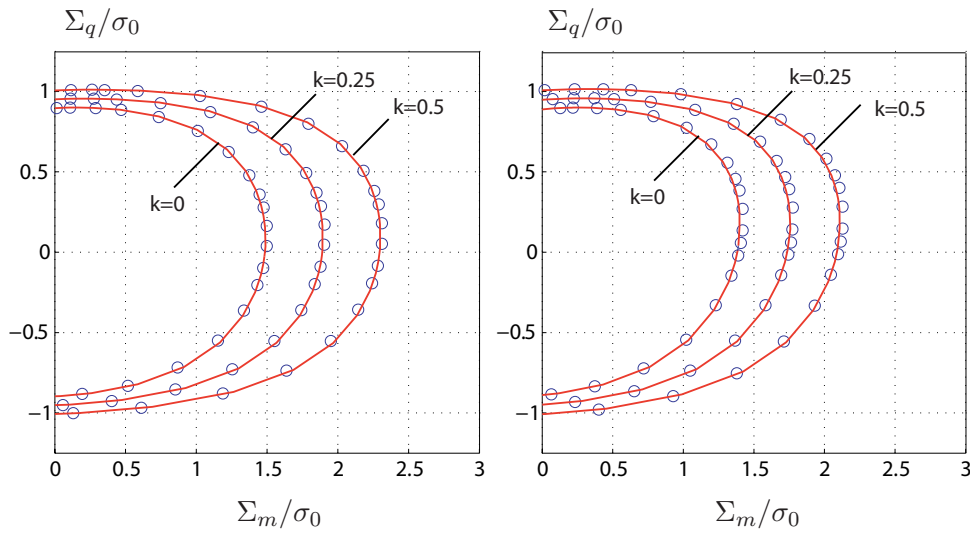


Fig. 4 – Critère macroscopique pour le cas d’une cavité allongée de rapport d’aspect  $a_1/b_1 = 2$  (à gauche) et  $a_1/b_1 = 5$  (à droite). La porosité vaut  $f = 0.1$ .

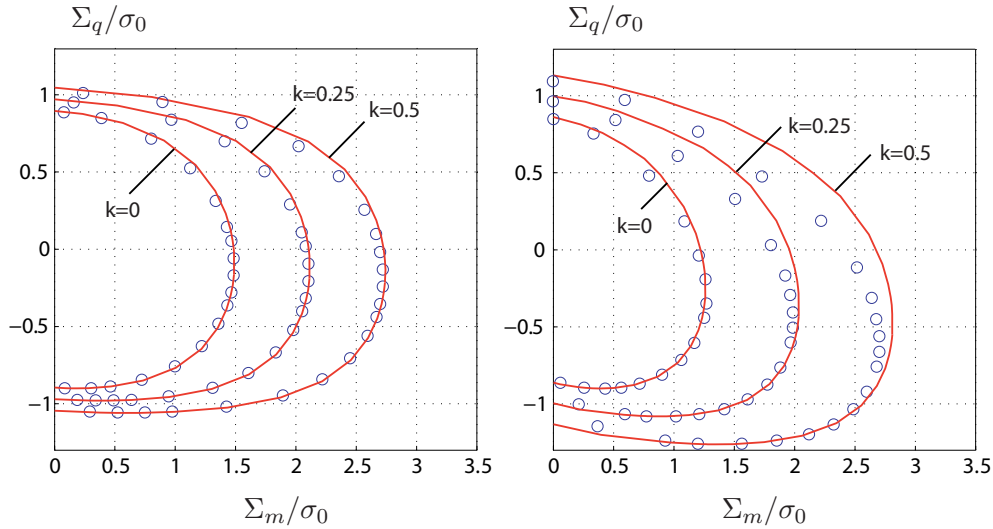


Fig. 5 – Critère macroscopique pour la cavité aplatie de rapport d’aspect  $a_1/b_1 = 1/2$  (à gauche) et  $a_1/b_1 = 1/5$  (à droite). La porosité vaut  $f = 0.1$ .

## 5 Conclusion

Nous avons proposé une approche par analyse limite de la détermination de la résistance macroscopique de milieux nanoporeux, avec comme objectif de rendre compte des effets combinés de forme et de taille des cavités. Ceux-ci ont pu être capturés en considérant un modèle d’interface imparfaite solide-cavité généralisant celui de Gurtin et Murdoch au contexte de la plasticité parfaite. Les résultats montrent un effet significatif de la taille des cavités sur la résistance macroscopique du milieu poreux. En particulier, une diminution de la taille des cavités se traduit à l’échelle macroscopique par une augmentation du domaine de résistance. Des effets simultanés de taille et de forme de cavités ont été également mis en évidence.



## Références

- [1] N. Schlueter, F. Grimpe, W. Bleck, and W. Dahl. Modeling of the damage in ductile steels. *Comput. Mater. Sci.*, 7:27–33, 1996.
- [2] T.A. Khraishi, M.A. Khaleel, and H.M. Zbib. Parametric-experimental study of void growth in superplastic deformation. *Int. J. Plasticity*, 17:297–315, 2001.
- [3] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Adv. Appl. Mech.*, 33:295–361, 1997.
- [4] M. Huang, Z. Li, and C. Wang. Coupling effects of void size and void shape on the growth of prolate ellipsoidal microvoid. *Acta Mechanica Sinica*, 21:272–277, 2005.
- [5] M. Huang and Z. Li. Size effects on stress concentration induced by a prolate ellipsoidal particle and void nucleation mechanism. *International Journal of Plasticity*, 21(8):1568–1590, 2005.
- [6] J. Wen, Y. Huang, K.C. Hwang, C. Liu, and M. Li. The modified gurson model accounting for the void size effect. *Int. J. Plasticity*, 21(2):381–395, 2005.
- [7] W. Zhang, T.J. Wang, and X. Chen. Effect of surface/interface stress on the plastic deformation of nanoporous materials and nanocomposites. *Int. J. Plasticity*, 26(7):957–975, 2010.
- [8] L. Dormieux and D. Kondo. An extension of gurson model incorporating stresses effects. *Int. J. Eng. Science*, 48:575–581, 2010.
- [9] L. Duan, J. Wang, Z.P. Huang, and B.L. Karihaloo. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 53:1574–1596, 2005.
- [10] V. Monchiet and G. Bonnet. Interfacial models in viscoplastic composites materials. *Int. J. Engng. Science*, 48(12):1762–1768, 2010.
- [11] M. Gologanu, J.-B. Leblond, and J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11):1723–1754, 1993.
- [12] M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Engng. Mater. Technology*, 116:290–297, 1994.
- [13] V. Monchiet, O. Cazacu, E. Charkaluk, and D. Kondo. Approximate criteria for anisotropic metals containing non spherical voids. *Int. J. Plasticity*, 24:1158–1189, 2008.
- [14] V. Monchiet and D. Kondo. Combined voids size and shape effects on the macroscopic criterion of ductile nanoporous materials. *International Journal of Plasticity*, 43:20–41, 2013.
- [15] P. Sharma D.A. Kouris C. Mi, D.A. Buttry. Atomistic insights into dislocation-based mechanisms of void growth and coalescence. *Journal of the Mech. and Phys. of Solids*, 59:1858–1871, 2011.
- [16] D.J. Benson M.A. Meyers S. Traiviratana, E.M. Bringa. Void growth in metals: Atomistic calculations. *Acta Materialia*, 56:3874–3886, 2008.
- [17] M. Garajeu, J.-C. Michel, and P. Suquet. A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 183:223–246, 2000.