



**HAL**  
open science

## Formulation d'éléments finis quadratiques de type solide-coque et leur évaluation sur des cas tests standards

Vuong-Dieu Trinh, Farid Abed-Meraim, Alain Combescure

► **To cite this version:**

Vuong-Dieu Trinh, Farid Abed-Meraim, Alain Combescure. Formulation d'éléments finis quadratiques de type solide-coque et leur évaluation sur des cas tests standards. 11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2013), May 2013, Giens, France. hal-01722111

**HAL Id: hal-01722111**

**<https://hal.science/hal-01722111>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Formulation d'éléments finis quadratiques de type solide-coque et leur évaluation sur des cas tests standards

Vuong-Dieu TRINH<sup>1,2</sup>, Farid ABED-MERAÏM<sup>2\*</sup>, Alain COMBESCURE<sup>3</sup>

1 Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, LaMSID, UMR EDF/CNRS/CEA 8193, EDF R&D, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex

2 Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, UMR CNRS 7239, Arts et Métiers ParisTech, 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz Cedex 3

3 Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, LaMCoS, UMR CNRS 5259, INSA de Lyon, 18-20 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne Cedex

\* Auteur correspondant

---

**Résumé** — Dans cet article, la formulation de deux éléments finis de type coque volumique sera présentée. Il s'agit d'un hexaèdre à vingt nœuds et d'un prisme à quinze nœuds obtenus à partir d'une approche purement tridimensionnelle. Ce concept solide-coque procure de nombreux avantages par rapport aux éléments finis traditionnels solides ou coques, puisqu'il consiste à combiner en une seule formulation certaines bonnes caractéristiques des coques avec quelques bonnes propriétés des solides. A noter que les éléments coques volumiques ainsi obtenus possèdent une direction privilégiée, le long de laquelle les points d'intégration sont disposés, et une intégration réduite dans le plan de l'élément est adoptée pour réduire un certain nombre de verrouillages et pour augmenter l'efficacité de calcul de ces éléments. Au travers de cas tests représentatifs, les performances de ces éléments sont montrées.

**Mots clés** — élément fini solide-coque, principe variationnel mixte, phénomènes de verrouillage, intégration réduite, modes à énergie nulle, cas tests standards

---

### 1. Introduction

Pendant ces dernières décennies, un progrès considérable a été réalisé dans le développement d'éléments finis tridimensionnels capables de modéliser des structures minces (sans être exhaustif, les références [1–12] sont parmi les plus représentatives). En particulier, le couplage de certaines caractéristiques propres aux coques avec certaines propriétés relatives aux éléments finis solides s'est révélé être un moyen intéressant pour construire des modèles éléments finis tridimensionnels qui puissent être utilisés efficacement dans des applications structurales.

Le travail présenté ici concerne la formulation de deux éléments finis de type solide-coque obtenus à partir d'une approche purement tridimensionnelle. Ces éléments apportent de nombreux avantages dans le calcul de structures de géométries complexes que l'on peut rencontrer dans différentes applications industrielles. Notons que l'un de leurs principaux avantages est de permettre de mailler des structures de formes géométriques complexes sans avoir les problèmes usuels liés au raccordement de zones maillées avec différents types d'éléments (éléments solides et coques, par exemple). Un autre bénéfice important que procurent les formulations de type solide-coque est d'éviter le recours aux cinématiques complexes de coques ainsi que la gestion des degrés de liberté de rotations qui les caractérisent. Les deux éléments finis de type solide-coque développés ici représentent un hexaèdre à vingt nœuds et un prisme à quinze nœuds, ayant trois déplacements par nœud comme seuls degrés de liberté. Ces éléments possèdent une direction privilégiée, que l'on appelle "épaisseur", qui est perpendiculaire au plan moyen des éléments et le long de laquelle les points d'intégration sont répartis. Ainsi, ils peuvent être utilisés pour modéliser des structures minces tout en fournissant une description précise des différents phénomènes dans l'épaisseur. Un schéma d'intégration réduite est introduit pour atténuer certains phénomènes de verrouillage et pour augmenter l'efficacité des éléments en termes de temps CPU.

Pour illustrer les capacités de ces éléments, leurs performances sont évaluées sur un ensemble de cas tests variés, communément utilisés dans la littérature pour tester les formulations d'éléments finis. Il est montré en particulier que ces éléments peuvent supporter des élancements importants, jusqu'à 500, et sont donc spécialement efficaces pour la simulation de problèmes à flexion dominante.

Au travers de tests numériques sélectifs, il est montré que les éléments proposés sont plus performants comparés à des éléments traditionnels purement tridimensionnels ayant des propriétés similaires en termes de géométrie, interpolation et degrés de liberté.

## 2. Formulation des éléments de coques volumiques SHB15 et SHB20

Dans cette section, la formulation des éléments SHB15 et SHB20 sera développée. Compte tenu d'un certain nombre de similitudes, cette présentation sera faite conjointement pour les deux éléments pour éviter de répéter les aspects communs de leurs formulations.

### 2.1. Cinématique et interpolation

Le SHB15 et SHB20 représentent respectivement un prisme à quinze nœuds et un hexaèdre à vingt nœuds. Basés sur une approche tridimensionnelle, ils n'ont que trois degrés de liberté de déplacement par nœud. Cependant, une direction privilégiée est choisie, désignée comme celle de l'épaisseur, perpendiculaire au plan moyen de ces éléments. De même, une intégration réduite dans le plan est adoptée avec  $3 \times n_{\text{int}}$  et  $4 \times n_{\text{int}}$  points d'intégration pour le SHB15 et le SHB20, respectivement. En d'autres termes, l'intégration dans le plan utilise seulement 3 points pour le SHB15 et 4 points pour le SHB20, tandis que le nombre de points d'intégration à travers l'épaisseur est de  $n_{\text{int}}$ . Comme pour leurs homologues linéaires SHB8PS et SHB6 [1, 13],  $n_{\text{int}}$  peut être défini librement par l'utilisateur, et est généralement choisi égal à deux en élasticité et à cinq en plasticité (voir Fig. 1).

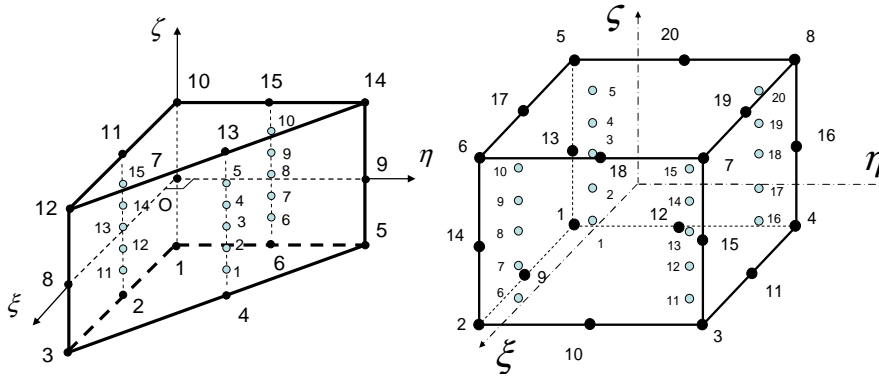


Fig. 1. Géométrie de référence pour le SHB15 et le SHB20 et position de leurs points d'intégration ( $n_{\text{int}} = 5$ ).

Dans ces deux éléments isoparamétriques, les coordonnées spatiales  $x_i$  et les composantes du champ de déplacement  $u_i$  sont reliées aux coordonnées nodales  $x_{iI}$  et aux déplacements nodaux  $u_{iI}$ , respectivement, par les interpolations suivantes utilisant les fonctions de forme quadratiques  $N_I$  :

$$x_i = x_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad u_i = u_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

Dans les formules ci-dessus et dans la suite, la convention implicite de sommation sur les indices répétés sera adoptée, à moins que précisé autrement. Les indices en minuscules  $i$  varient de 1 à 3 et représentent les directions des coordonnées spatiales, tandis que ceux en majuscules  $I$  varient de 1 à 15 pour le SHB15 et de 1 à 20 pour le SHB20 et correspondent aux nœuds de l'élément. Les formules explicites des fonctions de forme quadratiques classiques  $N_I$ , correspondant à chacun des éléments SHB15 et SHB20, peuvent être trouvées par exemple dans la référence [14].

## 2.2. Opérateur gradient discrétisé

L'interpolation du champ de déplacement, à partir de l'Eq. (1), va permettre de définir le champ de déformation et d'écrire la relation reliant le champ de déformation aux déplacements nodaux. En différenciant l'Eq. (1), le tenseur de déformation linéaire s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{il}N_{l,j} + u_{jl}N_{l,i}) \quad (2)$$

La combinaison de (1) avec les expressions des fonctions de forme conduit à un développement du champ de déplacement sous la forme d'un terme constant, des termes linéaires en  $x_i$ , et des termes non linéaires impliquant les fonctions  $h_\alpha$ , avec ( $\alpha = 1, \dots, 11$ ) pour le SHB15 et ( $\alpha = 1, \dots, 16$ ) pour le SHB20. Pour l'élément SHB15, ce développement s'écrit :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 + c_{5i}h_5 + c_{6i}h_6 + c_{7i}h_7 + c_{8i}h_8 + c_{9i}h_9 + c_{10i}h_{10} + c_{11i}h_{11} \\ h_1 = \xi\zeta, h_2 = \eta\zeta, h_3 = \xi\eta, h_4 = \xi\eta\zeta, h_5 = \xi^2, h_6 = \eta^2, h_7 = \zeta^2, h_8 = \xi^2\zeta, h_9 = \eta^2\zeta, h_{10} = \xi\zeta^2, h_{11} = \eta\zeta^2 \end{cases} \quad (3)$$

En évaluant l'équation ci-dessus aux nœuds de l'élément SHB15, on trouve les trois systèmes à quinze équations suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i = a_{0i}\mathbf{s} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 + c_{3i}\mathbf{h}_3 + c_{4i}\mathbf{h}_4 \\ \quad + c_{5i}\mathbf{h}_5 + c_{6i}\mathbf{h}_6 + c_{7i}\mathbf{h}_7 + c_{8i}\mathbf{h}_8 + c_{9i}\mathbf{h}_9 + c_{10i}\mathbf{h}_{10} + c_{11i}\mathbf{h}_{11} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

où les vecteurs à quinze composantes  $\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{x}_i$  représentent les déplacements nodaux et coordonnées nodales, respectivement, qui sont définis ci-après ;  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{h}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 11$ ) étant des vecteurs constants :

$$\mathbf{d}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \dots, u_{i15}) \quad , \quad \mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{i15}) \quad (5)$$

Pour le SHB20, la même démarche suivie ci-dessus pour le SHB15 conduit à des développements pour le champ de déplacement similaires aux équations (3) à (5), à la différence que ces expressions contiennent plus de termes (20 termes au lieu de 15), conduisant à des vecteurs à vingt composantes.

Pour déterminer les constantes inconnues  $a_{ji}$  et  $c_{\alpha i}$  qui apparaissent dans l'Eq. (3), les dérivées des fonctions de forme, évaluées à l'origine du repère de référence, sont introduites :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{N}_{,i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

où le vecteur  $\mathbf{N}$  contient les composantes  $N_l$  des fonctions de forme. Des expressions explicites pour les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  peuvent être déduites, ce qui permet de démontrer des relations d'orthogonalité impliquant les vecteurs  $\mathbf{b}_i, \mathbf{s}, \mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{h}_\alpha$ . L'exploitation de ces relations d'orthogonalité nous permet ensuite de déterminer les constantes  $a_{ji}$  et  $c_{\alpha i}$  comme :

$$a_{ji} = \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i \quad , \quad c_{\alpha i} = \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{d}_i \quad (7)$$

où les vecteurs  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$  s'expriment en fonctions des coordonnées nodales  $\mathbf{x}_i$ .

À ce stade, on peut déduire les expressions du gradient de déplacement  $u_{i,j}$  et de l'opérateur gradient discrétisé  $\mathbf{B}$  (reliant la déformation aux déplacements nodaux  $\nabla_s(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}$ ), qui s'écrivent :

$$u_{i,j} = (\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \cdot \mathbf{d}_i \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 2.3. Principe variationnel

Le principe variationnel mixte de Hu–Washizu, qui avait été utilisé pour la formulation des éléments de coques volumiques SHB8PS et SHB6 [1, 13], est considéré de nouveau ici. Plus précisément, une forme simplifiée de ce principe, comme décrite dans [15], est adoptée :

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega_e} \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \delta \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (10)$$

où  $\delta$  représente une variation,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  le taux de déformation postulée,  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte évaluée à partir des équations constitutives,  $\dot{\mathbf{d}}$  les vitesses nodales et  $\mathbf{f}^{ext}$  les forces nodales externes. La méthode de déformation postulée consiste à choisir un opérateur  $\overline{\mathbf{B}}$ , obtenu par projection de l'opérateur gradient discrétisé  $\mathbf{B}$ , tel que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{d}}$ . L'objectif de cette méthode est d'éliminer la plupart des phénomènes de verrouillage (en cisaillement, en membrane, etc.) qui peuvent être rencontrés, particulièrement dans les éléments de faible degré. Bien que cette technique ait été montrée cohérente, d'un point de vue variationnel, avec le principe variationnel de Hu–Washizu [15], aucune méthode générale et systématique n'a été proposée pour construire des champs de déformation postulée adéquats.

En remplaçant le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  dans l'Eq. (10) par la loi de Hooke  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'élasticité, et en utilisant la relation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{d}}$ , on trouve :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{B}} \, d\Omega \quad , \quad \mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega_e} \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega \quad (11)$$

où  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{f}^{int}$  représentent la matrice de rigidité et le vecteur des forces internes, respectivement.

Due à l'absence d'un verrouillage significatif dans les éléments finis quadratiques proposés, sur les cas tests considérés, aucune projection n'a été appliquée aux opérateurs gradients discrétisés correspondants, ce qui revient à prendre  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$  dans l'Eq. (11) ci-dessus.

## 3. Tests numériques et évaluation de performances

### 3.1. Test d'évaluation des limites d'élancement

Ce test linéaire avait été spécialement conçu pour évaluer l'élancement maximum admissible des éléments sur un problème de flexion d'une poutre console. Ce test avait été précédemment appliqué à l'élément solide-coque linéaire SHB8PS [16] pour évaluer son comportement lorsque des maillages irréguliers, non structurés sont utilisés et pour analyser de potentiels phénomènes de verrouillages dans la limite d'élancements importants pour l'élément. La géométrie de la poutre console est montrée en Fig. 2, où les données relatives aux maillages régulier et irrégulier sont spécifiées.

Dans cette analyse, la longueur et la largeur de la poutre sont fixes :  $L = 100$ ,  $l = 10$ ; tandis que l'épaisseur  $t$  est un paramètre variable. Les propriétés élastiques sont  $E = 68,25 \times 10^6$  et  $\nu = 0,3$ . Un effort de flexion,  $P = 4$ , est appliqué à l'extrémité libre de la poutre et les résultats sont normalisés par rapport à la solution de référence ; cette dernière est analytique donnée par la théorie des poutres.

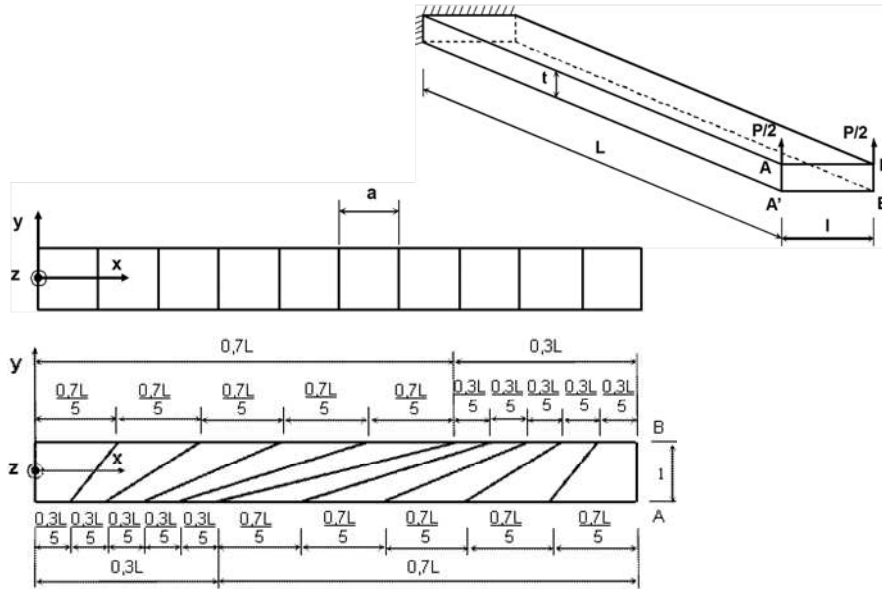


Fig. 2. Test de l'élancement limite : géométrie et description de maillages pour la poutre console.

Pour les éléments hexaédriques, un maillage fixe de 10 éléments avec un seul élément dans l'épaisseur est utilisé pour les deux cas de maillages (régulier et irrégulier). Pour le maillage régulier, chaque élément est un carré  $10 \times 10$  (i.e.,  $l = 10$  est le côté du carré, et  $r = l/t$  représente l'élancement variable). Une définition similaire de l'élancement est adoptée pour le maillage irrégulier (voir Fig. 2). Pour les éléments prismatiques, la même procédure qu'avant est suivie ; ainsi, chaque hexaèdre est divisé en deux éléments prismatiques, tout en maintenant une seule couche d'éléments le long de l'épaisseur. Le déplacement vertical normalisé au point A pour différents élancements est reporté dans le Tableau 1, pour le maillage régulier, et dans le Tableau 2 pour le maillage irrégulier.

Elancement	HEX20	SHB20	PRI15	SHB15
$(r = l/t)$	$u_z / u_z^{ref}$	$u_z / u_z^{ref}$	$u_z / u_z^{ref}$	$u_z / u_z^{ref}$
1	1,005	1,009	1,000	1,009
10	0,984	0,998	0,975	0,997
100	0,951	0,997	0,967	0,995
200	0,959	0,996	0,953	1,019
333		0,998	0,860	0,988
500		1,004		

Tableau 1. Déplacement normalisé au point A pour le maillage régulier

Dans les Tableaux 1 and 2, les éléments coques volumiques proposés sont comparés à leurs homologues complètement tridimensionnels notés PRI15 et HEX20. Ces derniers éléments sont classiques et désignent les éléments solides standards à intégration complète avec quinze et vingt nœuds, respectivement. On peut observer que les éléments de coques volumiques proposés ont de bien meilleures performances que leurs homologues purement tridimensionnels, particulièrement pour les maillages irréguliers. Dans ce test et pour le maillage régulier, l'élancement admissible est d'environ 500 pour le SHB20 et 333 pour le SHB15. Par contraste, la qualité des résultats des éléments solides traditionnels commence à décliner pour des élancements bien plus faibles, et ceci est encore plus marqué pour des maillages distordus (voir Tableau 2).

Elancement	HEX20	SHB20	PRI15	SHB15
$(r = l/t)$	$u_z/u_z^{ref}$	$u_z/u_z^{ref}$	$u_z/u_z^{ref}$	$u_z/u_z^{ref}$
1	0,981	1,010	0,974	0,985
10	0,682	0,997	0,871	0,945
100	0,345	0,995	0,832	0,944
200	0,294	1,002	0,832	0,944
333	0,251	0,984	0,878	0,926

Tableau 2. Déplacement normalisé au point A pour le maillage irrégulier

### 3.2. Test de flambage d'un cylindre sous pression externe

Ce test représente une analyse de stabilité linéaire d'un cylindre qui est libre à ses extrémités et qui est soumis à une pression externe uniformément distribuée. Ce problème permet aussi de vérifier la formulation de la matrice de raideur géométrique  $\mathbf{K}_\sigma$ . En effet, dans cette analyse de flambage linéaire, la pression critique d'Euler est déterminée ainsi que le mode de flambage correspondant. Cet état critique est associé à la plus faible pression qui rend la matrice de rigidité globale singulière et est classiquement obtenu par la résolution du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(\mathbf{K}_e + \lambda_c \mathbf{K}_\sigma) \cdot \mathbf{X}_c = \mathbf{0} \quad (12)$$

dans lequel  $\lambda_c$  est la charge critique de flambage et  $\mathbf{X}_c$  est le mode de flambage associé. Les paramètres géométriques et matériaux pour ce test sont (voir Fig. 3) : la longueur  $L = 2$ , le rayon  $R = 2$ , l'épaisseur  $e = 0,02$ , le module d'Young  $E = 2 \times 10^{11}$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

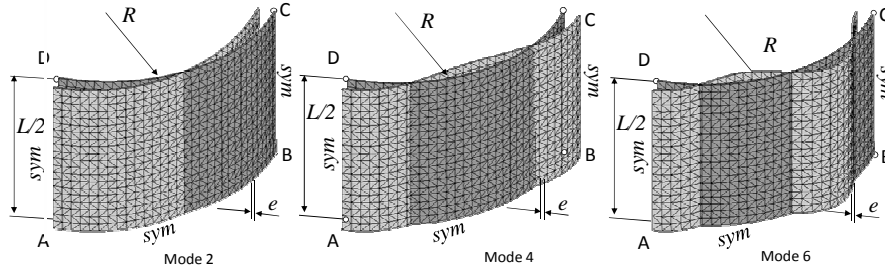


Fig. 3. Flambage d'un cylindre sous pression externe : modes de flambage n° 2, 4 et 6 et exemple d'un maillage  $(20 \times 30 \times 1) \times 2$  avec des éléments prismatiques.

Les solutions de référence utilisées pour la comparaison sont analytiques, données par Timoshenko et Gere [17] et Brush et Almoth [18]. Compte tenu de la symétrie, seul un huitième du cylindre est modélisé et les conditions aux limites de symétrie sont appliquées, ce qui restreint aussi l'analyse aux modes de flambage symétriques (i.e., modes 2, 4 et 6 comme montrés en Fig. 3). La pression critique correspondante  $P_{cr}$  est donnée par l'expression analytique suivante :

$$P_{cr} = \frac{En^2}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{e}{R} \right)^3, \quad n = 2, 4, 6 \quad (13)$$

Les résultats obtenus pour les trois modes ( $n = 2, 4$  et  $6$ ) sont reportés dans les Tableaux 3 et 4 en termes de pression critique normalisée par rapport à solution analytique de référence.

Maillage	Mode 2		Mode 4		Mode 6	
	$P_{cr}^{(2)} / P_{cr(ref)}^{(2)}$		$P_{cr}^{(4)} / P_{cr(ref)}^{(4)}$		$P_{cr}^{(6)} / P_{cr(ref)}^{(6)}$	
	PRI15	SHB15	PRI15	SHB15	PRI15	SHB15
(10×10×1)×2	1,31	1,43	1,35	1,45	1,42	1,50
(12×10×1)×2	1,14	1,17	1,16	1,18	1,20	1,20
(14×10×1)×2	1,07	1,08	1,08	1,08	1,11	1,09
(16×10×1)×2	1,03	1,03	1,04	1,04	1,06	1,04
(20×10×1)×2	1,00	1,00	1,01	1,00	1,02	1,00

Tableau 3. Pression critique normalisée pour le cylindre mince sous pression externe (éléments prismatiques)

Maillage	Mode 2		Mode 4		Mode 6	
	$P_{cr}^{(2)} / P_{cr(ref)}^{(2)}$		$P_{cr}^{(4)} / P_{cr(ref)}^{(4)}$		$P_{cr}^{(6)} / P_{cr(ref)}^{(6)}$	
	HEX20	SHB20	HEX20	SHB20	HEX20	SHB20
3×3×1	53,33	1,00	70,58	1,05	51,73	1,26
4×4×1	17,27	0,99	21,14	1,01	25,92	1,07
5×5×1	7,60	0,99	8,76	0,99	10,48	1,02
6×6×1	4,16	0,98	4,61	0,99	5,31	1,00
7×7×1	2,70	0,98	2,91	0,99	3,24	0,99

Tableau 4. Pression critique normalisée pour le cylindre mince sous pression externe (éléments hexaédriques)

Similairement à la discussion précédente, le Tableau 3 révèle que le SHB15 exhibe une vitesse de convergence comparable à celle du PRI15 sur ce cas test. Au contraire, le Tableau 4 montre que le SHB20 a une précision remarquable pour des maillages grossiers et affiche une performance bien meilleure que celle de son homologue standard tridimensionnel HEX20.

### 3. Discussion et conclusions

Deux nouveaux éléments finis de coques volumiques quadratiques ont été formulés et testés sur un ensemble sélectif et représentatif de cas tests standards. L'idée est de partir d'une approche purement tridimensionnelle dans laquelle on incorpore certaines propriétés essentielles des éléments finis coques. Par exemple, les points d'intégration disposés selon la direction de l'épaisseur avec une intégration réduite dans le plan contribuent à réduire les phénomènes de verrouillage tout en augmentant l'efficacité des éléments. L'utilisation d'un repère local pour l'écriture de la loi constitutive contribue aussi à réduire le verrouillage en cisaillement transverse.

L'évaluation sur des cas tests a montré une très bonne performance des éléments finis coques volumiques proposés. Dans les benchmark testés, le SHB15 montre souvent une meilleure convergence, voire une convergence similaire à celle de son homologue tridimensionnel PRI15 ; en revanche, il autorise des élancements bien plus importants. Le SHB20 montre une performance remarquable en termes de précision, avec des maillages grossiers, et se montre toujours plus performant et plus efficace que son homologue purement tridimensionnel HEX20.



## Références

- [1] F. Abed-Meraim, A. Combescure. An improved assumed strain solid–shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic–plastic stability analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 80, 1640-1686, 2009.
- [2] R.J. Alves de Sousa, R.P.R. Cardoso, R.A. Fontes Valente, J.W. Yoon, J.J. Gracio, R.M. Natal Jorge. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid–shell element with multiple integration points along thickness: Part I – Geometrically linear applications, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 62, 952-977, 2005.
- [3] Y.I. Chen, G.Y. Wu. A mixed 8-node hexahedral element based on the Hu–Washizu principle and the field extrapolation technique, *Struct. Eng. Mech.*, 17, 113-140, 2004.
- [4] C. Cho, H.C. Park, S.W. Lee. Stability analysis using a geometrically nonlinear assumed strain solid shell element model, *Finite Elements Anal. Des.*, 29, 121-135, 1998.
- [5] E. Domissy. Formulation et évaluation d’éléments finis volumiques modifiés pour l’analyse linéaire et non linéaire des coques, Thèse de doctorat, UT Compiègne, 1997.
- [6] R. Hauptmann, S. Doll, M. Harnau, K. Schweizerhof. Solid–shell elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials, *Comput. Struct.*, 79, 1671-1685, 2001.
- [7] K.D. Kim, G.Z. Liu, S.C. Han. A resultant 8-node solid–shell element for geometrically nonlinear analysis, *Comput. Mech.*, 35, 315-331, 2005.
- [8] D. Lemosse. Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l’étude des structures minces, Thèse de doctorat, INSA–Rouen, 2000.
- [9] S. Reese. A large deformation solid–shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 69, 1671-1716, 2007.
- [10] D. Roehl, E. Ramm. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept, *Int. J. Sol. Struct.*, 33, 3215-3237, 1996.
- [11] K.Y. Sze, L.Q. Yao. A hybrid stress ANS solid–shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I-solid–shell element formulation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 48, 545-564, 2000.
- [12] L. Vu-Quoc, X.G. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 192, 975-1016, 2003.
- [13] V.D. Trinh, F. Abed-Meraim, A. Combescure. A new assumed strain solid–shell formulation “SHB6” for the six-node prismatic finite element, *J. Mech. Sci. Tech.*, 25, 2345-2364, 2011.
- [14] V.D. Trinh. Formulation, développement et validation d’éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaire, Thèse de doctorat, ENSAM de Metz, 2009.
- [15] J.C. Simo, T.J.R. Hughes. On the variational foundations of assumed strain methods, *J. Appl. Mech.*, 53, 51-54, 1986.
- [16] A. Legay, A. Combescure. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 57, 1299-1322, 2003.
- [17] S.P. Timoshenko, J.M. Gere. Théorie de la stabilité élastique, 2nd edn. Dunod, (Theory of elastic stability), McGraw-Hill, New York, 1966.
- [18] D.O. Brush, B.O. Almroth. Buckling of bars, plates and shells, McGraw-Hill, New York, 1975.