



HAL
open science

Méthodes de l'analyse limite et matériaux sensibles à la contrainte moyenne poreux

Franck Pastor, Djimedo Kondo, Joseph Pastor

► **To cite this version:**

Franck Pastor, Djimedo Kondo, Joseph Pastor. Méthodes de l'analyse limite et matériaux sensibles à la contrainte moyenne poreux. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722109

HAL Id: hal-01722109

<https://hal.science/hal-01722109>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Méthodes de l'analyse limite et matériaux sensibles à la contrainte moyenne poreux

Franck PASTOR ¹, Djimedo KONDO ², Joseph PASTOR ³

¹ Athénée royal Victor Horta, rue de la rhétorique 16, Bruxelles. Email: franck.pastor@skynet.be.

² Université Pierre et Marie Curie, Institut D'Alembert, 75 252 Paris Cedex 05. Email : djimedo.kondo@upmc.fr

³ Université de Savoie, Laboratoire LOCIE, 73 376 Le Bourget du Lac. Email : joseph.pastor@univ-savoie.fr

Résumé — Le premier objectif de cet article est la formulation numérique des trois méthodes générales de l'Analyse Limite (AL), les méthode statique, cinématiques classique et mixte, pour les problèmes dont les matériaux obéissent aux critères de plasticité de Drucker-Prager et Mises-Schleicher. Dans chaque cas, les deux algorithmes de l'optimisation conique sont utilisées pour résoudre le problème final et ainsi aboutir à des formulations numériques efficaces.

Les codes résultants sont tout d'abord comparés sur le problème de la sphère creuse sous chargement isotrope dont la solution exacte est connue pour chacun des matériaux précédents. Ensuite, second objectif, les codes statiques et mixtes sont retenus pour contrôler les critères approchés disponibles dans la littérature pour les matériaux poreux à matrice de Drucker-Prager et Mises-Schleicher.

Mots clés — Analyse limite, optimisations coniques, matériaux compressibles, approche micro-macro, modèle de la sphère creuse.

1 Introduction

Les formulations éléments finis des méthodes classiques de l'analyse limite conduisent généralement à des problèmes d'optimisation non linéaire (sous contraintes) de grande taille. Pour les solides de von Mises, les contraintes non linéaires sont des inégalités quadratiques convexes qui conduisent à des problèmes d'optimisation conique résolus par des codes non linéaires spécifiques. Ces codes récents ont permis de résoudre plusieurs de ces problèmes [1, 2]. Les premières approches mixtes d'analyse limite ont été proposées en [3] pour des champs de vitesse de déplacement continus et des critères de plasticité linéarisés. Une autre formulation mixte, basée sur des champs de vitesse discontinus et sur des propriétés de convexité a été plus récemment présentée en [4].

La discrétisation en éléments finis proposée en [1] est ici adaptée pour définir les champs discontinus de contrainte et de vitesse de la présente étude. Ensuite, les formulations MEF des méthodes de l'AL statique, cinématique classique et mixte — pour les matériaux de Drucker-Prager et Mises-Schleicher — sont mises au point et comparées sur un problème tridimensionnel non homogène dont la solution exacte est connue. Ces formulations sont utilisées ensuite pour contrôler les critères approchés disponibles pour ces deux types de matrice compressible.

2 Les méthodes de l'analyse limite

Par hypothèse, la puissance virtuelles des efforts extérieurs P_{ext} peut s'écrire comme le produit scalaire du vecteur chargement $Q = Q(\sigma)$ (linéaire en σ , σ statiquement admissible) et du vecteur vitesse généralisée $q = q(u)$ (linéaire en u , u cinématiquement admissible). Le théorème des puissances virtuelles s'écrit alors :

$$P_{\text{ext}} = Q \cdot q = \int_V \sigma : d \, dV + \int_{S_{\text{disc}}} T \cdot [u] \, dS \quad (1)$$

où V est le volume du système mécanique et S_{disc} l'ensemble des surfaces de discontinuité de vitesse de déplacement ; notons que les quantités $\sigma : d$ et $T \cdot [u]$ deviennent les puissances dissipées unitaires π_{vol} et π_{disc} quand les champs (σ, T) et $(d, [u])$ sont respectivement associés par la loi de normalité.

Une solution du problème de l'AL est un couple (σ, u) où les champs σ et u sont à la fois admissibles et associés : elle définit le chargement alors limite $Q_{\text{lim}} = Q(\sigma)$. La détermination de cette solution complète est en fait rarement possible, mais le chargement limite peut être encadré par les méthodes dites de borne de l'AL, lesquelles sont mises en œuvre ici dans le cas tridimensionnel et pour les matériaux envisagés. L'objectif de l'analyse limite est donc la détermination de la frontière ∂K de l'ensemble des chargements admissibles K , autrement dit le lieu des chargements limites Q_{lim} qui est ici le critère de plasticité « homogénéisé » cherché.

2.1 La méthode statique

La méthode statique a comme variables les seules contraintes et conduit à une borne inférieure du chargement limite. Le problème à résoudre est le suivant.

$$\begin{aligned} Q_{\text{lim}} &= (Q_1^d, \dots, \lambda_0 Q_i^d, \dots, Q_n^d) ; \\ \lambda_0 &= \max \left\{ \lambda, Q(\sigma) = (Q_1^d, \dots, \lambda Q_i^d, \dots, Q_n^d) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

où le champ de contraintes est admissible et Q^d un vecteur chargement admissible donné. En fait, la relation (2) serait vérifiée si tous les champs σ admissibles pouvaient être pris en compte, ce qui n'est pas le cas en général. Par suite, en faisant varier la direction de Q^d , on obtient une série de chargements Q admissibles qui sont à l'intérieur ou sur la frontière de K : l'enveloppe convexe de ces points est une approche intérieure de ∂K , et donc une borne inférieure du critère de plasticité macroscopique cherché.

2.2 La méthode cinématique classique

La seconde méthode, qui ne met en jeu que les vitesses de déplacement, est la méthode cinématique classique, dite aussi de la borne supérieure. Soit u un champ de vitesses q^d -admissible, c. à d. u admissible et vérifiant $q(u) = q^d$, où q^d est un vecteur q donné. La méthode cinématique consiste à obtenir les hyperplans orthogonaux aux différents q^d , tangents à ∂K , en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$Q \cdot q^d = \min_{u \text{ } q^d\text{-admissible}} \left(\int_V \pi_{\text{vol}}(d(u)) dV + \int_{S_{\text{disc}}} \pi_{\text{disc}}([u]) dS = P_{\text{diss}}(u) \right), \quad (3)$$

pour chaque valeur de q^d . En pratique, on obtient un ensemble d'hyperplans extérieurs ou tangents à ∂K : le domaine défini par l'intersection des demi-espaces correspondants est une approche extérieure à K , c.-à-d. une borne supérieure du critère macroscopique cherché.

2.3 La méthode cinématique mixte

Plusieurs extensions des algorithmes mixtes au cas des vitesses discontinues ont été expérimentées avec succès en [4, 5] pour des problèmes de structures planes à matériau de von Mises ou Gurson homogènes. Ces formulations sont étendues ici au cas tridimensionnel et pour les matériaux sensibles à la pression moyenne considérés dans la suite.

Considérons maintenant un champ de vitesses de déplacement cinématiquement admissible (CA) (i.e. continu par morceaux, à discontinuités bornées et vérifiant les conditions aux limites en vitesse). Le principe des puissances virtuelles stipule que le champ de contrainte σ et le vecteur chargement Q sont en équilibre si, pour tout u CA, l'équation (1) est vérifiée. La formulation mixte s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{Q, \sigma, \sigma'} F &= Q \cdot q_d \\ \text{t.q.} \int_V \sigma : d dV + \int_{S_d} (\sigma' \cdot n) \cdot [u] dS &= Q \cdot q(u) \quad \forall u \text{ CA}, \\ f(\sigma) &\leq 0, \quad f(\sigma') \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

où σ est le tenseur contrainte dans les éléments finis, et σ' le tenseur contrainte spécifique aux surfaces de discontinuité de vitesse.

Cette formulation donne la solution exacte si tous les champs de contrainte et de vitesse peuvent être envisagés, ce qui est rarement le cas quand le système mécanique est discrétisé en éléments finis. Par suite, afin de garantir le caractère cinématique du résultat nous avons modifié la formulation numérique du principe des puissances virtuelles en (4) en utilisant les propriétés de convexité relatives aux discontinuités de vitesse d'une façon trop longue à détailler ici.

3 Modèle de la sphère creuse et analyse limite

3.1 Position du problème

Soit une cellule élémentaire constituée d'une cavité sphérique au centre d'une sphère de rayon b . La matrice solide est isotrope, homogène et obéit au critère de Drucker-Prager ou Mises-Schleicher. Considérons maintenant le problème micro-macro et notons Σ et E les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation macroscopiques, quantités définies par les moyennes de leurs homologues microscopiques sur la cellule de volume V . Sous les conditions de type vitesse de déformation moyenne imposée au bord (i.e., $u_i = E_{ij}x_j$ au bord), la puissance des efforts extérieurs $P_{\text{ext}} = \int_{\partial V} \sigma_{ij}n_j u_i dS$ s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = VQ \cdot q. \quad (5)$$

Le vecteur chargement Q et le vecteur vitesse généralisée q sont ici définis comme suit :

$$\begin{aligned} Q_1 = \Sigma_m = \frac{\text{tr}(\Sigma)}{3} ; \quad Q_2 = \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} - \Sigma_{zz} ; \quad Q_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}) ; \\ Q_4 = \Sigma_{yz} ; \quad Q_5 = \Sigma_{zx} ; \quad Q_6 = \Sigma_{xy} ; \\ q_1 = \text{tr}(E) ; \quad q_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{E_{xx} + E_{yy}}{2} - E_{zz} \right) ; \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (E_{xx} - E_{yy}) ; \\ q_4 = 2E_{yz} ; \quad q_5 = 2E_{zx} ; \quad q_6 = 2E_{xy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour comparer avec les résultats analytiques disponibles nous cherchons à déterminer la projection du critère macroscopique $g^*(Q)$ sur la plan (Q_1, Q_2) en optimisant Q_2 pour des valeurs fixées de Q_1 , les autres contraintes définies en (6) étant libres. Il s'ensuit $\frac{\partial g^*}{\partial Q_i} = 0 = q_i$ pour $i \geq 4$, et $\frac{\partial g^*}{\partial Q_3} = 0 = q_3$, le matériau homogénéisé satisfaisant la loi de normalité relativement à $g^*(Q)$. Les chargements peuvent donc être restreints au cas des vitesses de déformations E principales, et axisymétriques par suite de $q_3 = 0 = E_{xx} - E_{yy}$

3.2 Expressions caractéristiques des matériaux étudiés

3.2.1 Le matériau de Drucker-Prager

En utilisant les notations de Durban *et al.* [6] (avec $\mu \geq 0$), le critère de Drucker-Prager s'écrit :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq} + \mu \sigma_m - \sigma_0 \leq 0 ; \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_d : \sigma_d \quad (7)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente de von Mises, σ_m la contrainte moyenne $\text{tr} \sigma / 3$, σ_0 la contrainte limite en cisaillement pur ($\sigma_m = 0$) et μ le facteur de sensibilité à la pression. Les constantes μ et σ_0 sont liées aux contraintes limites en traction simple σ_T et en compression simple σ_C (t.q. $\sigma_C \geq \sigma_T$, voir [6]) de la façon suivante :

$$\sigma_0 = 2\sigma_C \sigma_T / (\sigma_C + \sigma_T) ; \quad \mu = 3(\sigma_C - \sigma_T) / (\sigma_C + \sigma_T), \quad (8)$$

La condition d'admissibilité plastique (condition PA) pour le champ de vitesses de déformation et la puissance dissipée correspondante est ici :

$$\text{tr}(d) \geq \mu d_{eq}, \quad \text{avec} \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} d_d : d_d ; \quad \pi_{\text{vol}}(d) = \frac{\sigma_0}{\mu} \text{tr}(d) \quad (9)$$

où d_d est le déviateur de d . La projection du critère (7) sur le plan de Mohr donne le critère relatif aux surfaces de discontinuité de vitesse :

$$f_{\text{disc}}(T) = \sqrt{3a} |\sigma_{nt}| + \mu\sigma_n - \sigma_0 \leq 0 ; \quad a = 1 - 4\mu^2/9, \quad (10)$$

qui redonne bien le critère usuel de Coulomb dans le plan de Mohr *via* l'équivalence (11)¹. La condition PA sur le saut de vitesse et la puissance dissipée correspondante deviennent :

$$\frac{[u_n]}{\mu} \geq \frac{2}{3} \sqrt{[u_n]^2 + \frac{3}{4}[u_t]^2} \iff [u_n] \geq \frac{\mu}{\sqrt{3a}} |[u_t]| ; \quad \pi_{\text{disc}}([u]) = \frac{\sigma_0}{\mu} [u_n]. \quad (12)$$

Notons que condition PA et puissance dissipée pour les sauts de vitesse (12) peuvent aussi s'obtenir, de manière générale [7], en remplaçant dans les expressions volumiques (9) le tenseur d par $d' = [u_n]n \otimes n + \frac{1}{2}[u_t](n \otimes t + t \otimes n)$.

3.2.2 Le matériau de Mises-Schleicher

Considérons maintenant le critère proposé par F. Schleicher [8] utilisé récemment pour les milieux poreux par [9].

$$f(\sigma) = \sigma_{eq}^2 + 3\alpha\sigma_0\sigma_m - \sigma_0^2 \leq 0 ; \quad \sigma_0 = \sqrt{\sigma_C\sigma_T} ; \quad \alpha = (\sigma_C - \sigma_T)/\sigma_0. \quad (13)$$

Notant d_m la valeur moyenne de d , la condition PA sur les vitesses de déformation et la puissance dissipée volumique s'écrivent [9] :

$$d_m \geq 0 ; \quad \pi_{\text{vol}}(d) = \frac{\sigma_0 d_m}{\alpha} + \frac{\alpha\sigma_0}{4} \frac{d_{eq}^2}{d_m} ; \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}d_d : d_d}. \quad (14)$$

La projection sur le plan de Mohr permet d'obtenir :

$$f_{\text{disc}}(T) = \sigma_{nt}^2 + \alpha\sigma_0\sigma_n - \sigma_0^2(1 + \alpha^2)/3 \leq 0. \quad (15)$$

A l'aide de (15) et de la loi de normalité, on obtient pour les surfaces de discontinuité :

$$[u_n] \geq 0 ; \quad \pi_{\text{disc}}([u]) = \frac{\sigma_0(1 + \alpha^2)}{3\alpha} [u_n] + \frac{\alpha\sigma_0}{4} \frac{[u_t]^2}{[u_n]}. \quad (16)$$

4 Discrétisation en éléments finis

La technique de maillage de la figure 1 est commune aux codes résumés ci-après. Du fait des symétries du problème et de la discussion du paragraphe 3.1, un huitième de la sphère creuse est maillée en éléments finis tétraédriques.

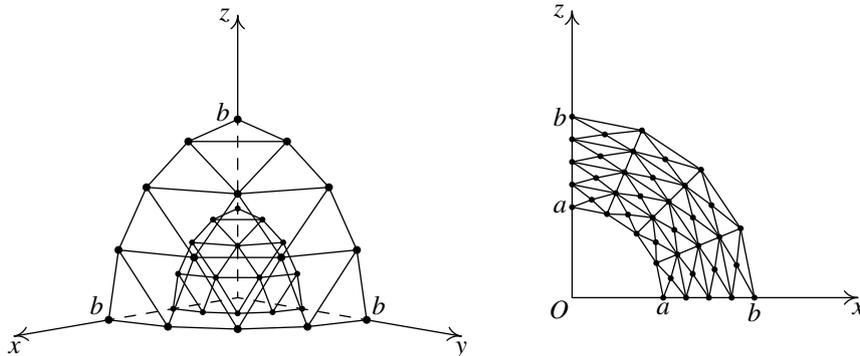


Fig. 1 – Vue générale et plan Oxz du maillage à 896 tétraèdres ($f = 0,1$).

1. Les constantes géotechniques (cohésion c , angle de frottement interne ϕ), sont données par les relations d'équivalence (en déformation plane) suivantes [7] :

$$\beta = \mu/\sqrt{27} ; \quad \sin \phi = 3\beta/\sqrt{(1 - 3\beta^2)} ; \quad c = \sigma_0 \sqrt{3(3 + \sin^2 \phi)}/(\sqrt{27} \cos \phi). \quad (11)$$

Chaque triangle de la surface sphérique polyédrique n est la base supérieure du prisme dont la base inférieure est le triangle correspondant de la surface $n - 1$, et ainsi de suite jusqu'à la cavité. Chaque prisme est divisé en trois pyramides et deux tétraèdres. Chaque pyramide est elle-même divisée en quatre tétraèdres, ce qui donne finalement quatorze tétraèdres pour chaque prisme. À titre d'exemple, le maillage de la figure 1 comporte 4 couches concentriques ($nlay = 4$) de 4×4 prismes ($ndiv \times ndiv$, $ndiv = 4$), soit finalement $nlay \times ndiv^2 \times 14 = 896$ tétraèdres.

Puisque les variables « nodales », contraintes ou vitesses de déplacement, sont affectées à chaque sommet de tétraèdre (et non aux nœuds d'une grille FEM usuelle), les discontinuités correspondantes sont possibles à travers toute face de tétraèdre. Les variables mécaniques précédentes sont du type affine dans l'élément. Pour toutes les méthodes les programmes résultants codés en FORTRAN génèrent le problème mathématique d'optimisation, lequel est résolu en second lieu avec l'optimiseur conique MOSEK, algorithme de type Lorentz (Drucker-Prager) ou « rotated quadratic cone » (Mises-Schleicher et Green); le caractère admissible du champ solution optimal est systématiquement vérifié *a posteriori*.

5 Validation et contrôle des critères approchés disponibles

Par souci d'homogénéité, la porosité est prise égale à 0,1 pour tous les essais. Nous analysons tout d'abord les performances des méthodes cinématiques classique et mixte sur le problème de la sphère creuse sous chargement isotrope, dont la solution exacte est connue. Nous comparons ensuite les résultats numériques aux critères approchés disponibles dans la littérature pour les matériaux de Drucker-Prager et Mises-Schleicher *poroux*.

5.1 Comparaison/validation des méthodes présentées

Les tableaux 1 et 2 donnent la contrainte moyenne Σ_m obtenue pour le modèle de la sphère creuse sous chargement compressif isotrope en utilisant deux cœurs d'un iMac-i7 doté de 16 gigaoctets de RAM.

$ndiv-nlay$	5-5	7-7	9-9	11-11	13-13	16-16
Ciném. class.	23,0271	21,6314	21,0142	20,6966	—	—
Temps CPU	31 s	200 s	1 190 s	3 050 s	—	—
Ciném. mixte	23,0265	21,6293	21,0058	20,6741	20,4841	20,3528
Temps CPU	10 s	44 s	143 s	435 s	359 s	1 002 s
Statique	15,3298	17,4477	18,4004	18,9019	19,1284	19,2729
Temps CPU	36 s	230 s	642 s	2 290 s	300 s	4 562 s

Tableau 1 – $|\Sigma_m|$ en fonction de la discrétisation; matrice de Drucker-Prager – $f = 0,1$, $\sigma_0 = 1$, $\mu = 0,83205$ ($\phi = 30^\circ$); chargement compressif isotrope; Σ_m exacte = $-19,9588$ [10].

$ndiv-nlay$	5-5	7-7	9-9	11-11	13-13	16-16
Ciném. class.	3,24967	3,21263	3,19677	3,18867	—	—
Temps CPU	20 s	138 s	801 s	2 434 s	—	—
Ciném. mixte	3,24961	3,21252	3,19658	3,18807	3,18336	3,1779
Temps CPU	6 s	27 s	91 s	299 s	406 s	740 s
Statique	2,96463	3,06380	3,10545	3,12727	3,13935	3,1480
Temps CPU	20 s	129 s	409 s	1 124 s	686 s	3 002 s

Tableau 2 – $|\Sigma_m|$ en fonction de la discrétisation; matrice de Mises-Schleicher; $f = 0,1$, $\sigma_0 = 1$, $\alpha = 0,4$; chargement compressif isotrope; Σ_m exacte = $-3,17236$ [9], [11].

- La version 5 de MOSEK a été utilisée jusqu’au maillage 11-11, soit la taille de problème que cette version 32 bits peut traiter ; pour les tailles suivantes les problèmes d’optimisation ont été résolus avec la version 6 (64 bits), plus rapide. Ceci explique que les temps de calcul puissent être plus faibles pour le cas 13-13 que pour le cas 11-11 dans les deux tableaux.
- La méthode cinématique classique ne converge plus au delà du maillage 11-11 ; on peut voir également que le temps de calcul qu’elle nécessite est bien plus grand que pour le même problème traité avec la méthode mixte. De plus, les solutions cinématiques classiques sont souvent déclarées « Near Optimal » ; ceci explique que la solution classique est quelquefois (très) légèrement supérieure à celle de la méthode mixte dont les solutions sont toujours déclarées « Optimal ».
- La matrice des contraintes du problème mixte 16-16 comporte 1 084 163 lignes et 2 783 747 colonnes dans le cas Drucker-Prager ; dans celui de Mises-Schleicher le même maillage conduit à 1 480 195 lignes et 3 179 779 colonnes. Dans les deux cas s’ajoutent les 396 032 inégalités coniques du critère.

Les méthodes statique et cinématiques conduisent à des bornes très proches du critère exact que l’on peut obtenir avec ce modèle de la sphère creuse. Suite à cette comparaison la méthode cinématique mixte et la méthode statique ont été retenues pour les déterminations du critère macroscopique qui suivent.

5.2 Cas du matériau « Drucker-Prager poreux »

On considère ici une matrice dont le facteur μ ($= 0,83205$) correspond à un angle de frottement de Coulomb ϕ de 30° (cf (11)). Dans ce cas nous disposons des valeurs « UBM » (Upper Bound Method) de Guo *et al.* aimablement fournies par J. Faleskog [12]. Ces auteurs ont également donné un critère approché (noté Guo sur la figure), lequel donne le critère de Jeong [13] comme cas particulier. Durban *et al.* ont enfin proposé un autre critère approché en [6].

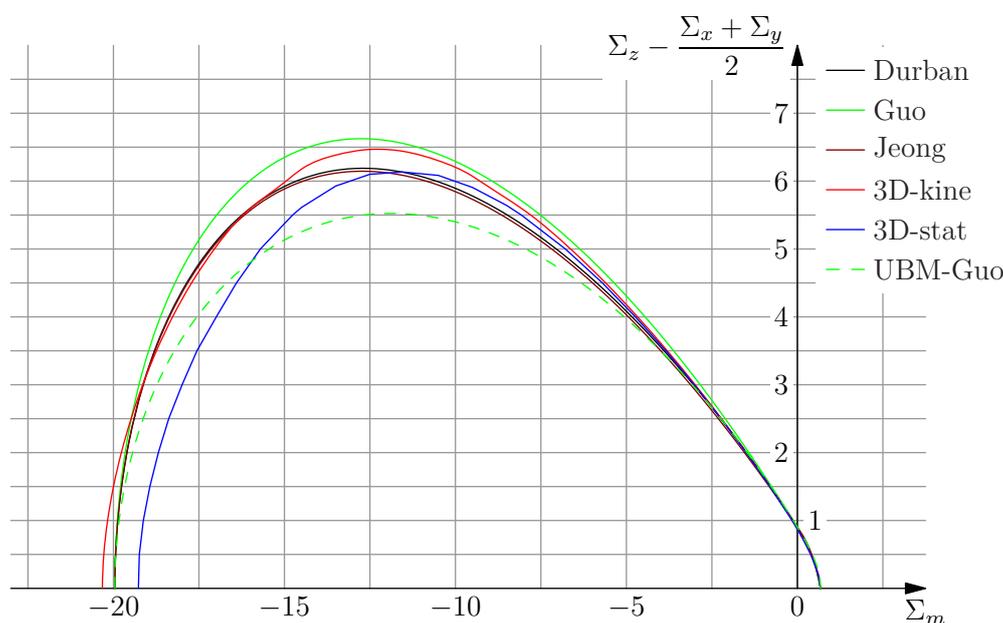


Fig. 2 – Drucker-Prager poreux : résultats comparés à ceux de Durban *et al.* [6], Jeong [13] et Guo *et al.* [12] – $f = 0,1$; $\mu = 0,83205$; $\sigma_0 = 1$.

Les solutions exactes [10] $(-19,9588 ; 0,67333)$ sous chargement isotrope, que redonnent tous les critères approchés, se situent bien entre nos bornes numériques cinématiques $(-20,3224 ; 0,67402)$ et statiques $(-19,2701 ; 0,67139)$. Ce test confirme que le critère « UBM » n’est pas une borne supérieure du critère réel, car violant nettement la borne statique 3D ; les critères approchés de Durban et de Jeong apparaissent très proches l’un de l’autre et violent aussi tous deux la borne statique, dans une moindre mesure cependant. Celui de Guo *et al.* est proche de notre approche cinématique et ne viole jamais l’approche statique ; on peut donc conclure que

c'est le critère à retenir pour des calculs de structure avec le matériau de Drucker-Prager poreux. Néanmoins, la détermination du critère exact reste un problème ouvert.

5.3 Cas du matériau « Mises-Schleicher poreux »

Lee et Oung [11] ont étudié le problème de Mises-Schleicher poreux sur la base du modèle de la sphère creuse et en ont tiré une borne supérieure et un critère approché. Plus récemment Monchiet et Kondo [9] ont donné la solution exacte sous chargement isotrope. Enfin, Durban *et al.* ont également proposé un critère approché en [6].

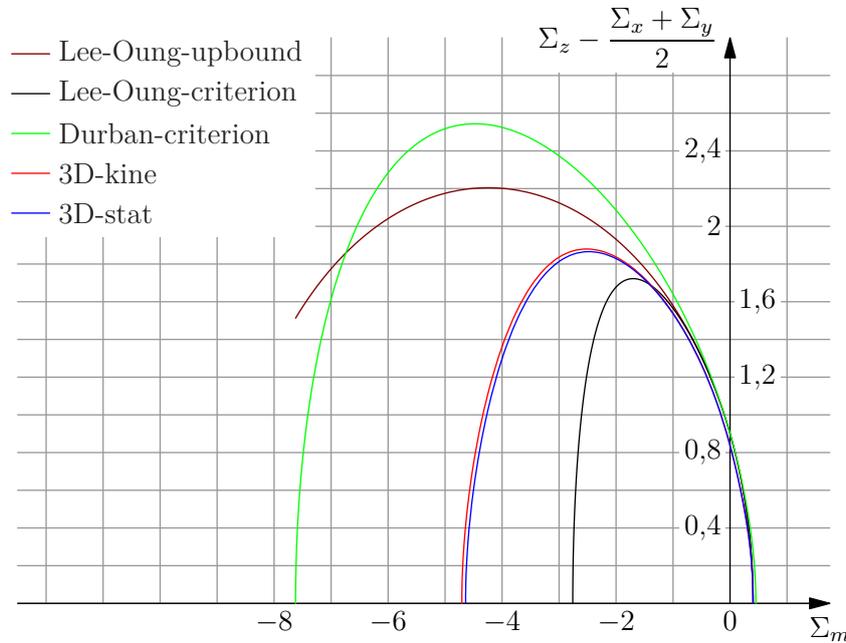


Fig. 3 – Mises-Schleicher poreux : résultats comparés à ceux de Lee et Oung [11] et Durban *et al.* [6] pour $\sigma_C/\sigma_T = 2 - f = 0,1$, $\sigma_0 = 1$.

Les résultats pour $\sigma_c/\sigma_T = 2$ (forte asymétrie traction/compression de la matrice) sont donnés figure 3 où l'on peut voir que les courbes numériques statique et cinématique 3D sont très proches l'une de l'autre. L'observation de [9] sur la mauvaise performance du critère de Lee et Oung pour les chargements compressifs est ici confirmée, ce critère violant de plus très nettement la présente approche statique. Pour conclure, les deux critères approchés disponibles aujourd'hui ne sont pas satisfaisants, même si celui de Durban *et al.* ne viole pas l'approche statique.

6 Conclusion

Les trois méthodes générales de l'analyse limite ont été mises en œuvre pour deux matériaux compressibles via une discrétisation du domaine mécanique en éléments finis tétraédriques. Elles conduisent à des problèmes d'optimisation de type conique quadratique (Lorentz) ou « conique quadratique tourné », pour les matériaux de Drucker-Prager et Mises-Schleicher. Les expressions requises par les méthodes de l'AL dans le cas discontinu sont tout d'abord complétées ; un premier test de comparaison des méthodes est effectué sur le cas de la sphère creuse sous chargement isotrope dont la solution exacte est connue. Les méthodes statique et cinématique mixte sont utilisées ensuite pour tester les borne et critères approchés disponibles dans la littérature, i.e. ceux de Lee et Oung [11], Durban *et al.* [6], Jeong [13] et enfin Guo *et al.* [12].

Pour le matériau de Drucker-Prager poreux, il apparaît que le critère approché de Guo *et al.* est à retenir pour des calculs de structure. Dans le cas de Mises-Schleicher poreux, le critère de Lee et Oung et celui de Durban *et al.* ne sont pas satisfaisants au delà d'une faible dépendance de la matrice à la pression isotrope. Dans les deux cas cependant, la détermination du critère exact sous chargement arbitraire reste un défi à relever.

Références

- [1] M. Trillat and J. Pastor. Limit analysis and Gurson's model. *Eur. J. Mech.-A/Solids*, 24:800–819, 2005.
- [2] A. Makrodimopoulos and C. Martin. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 66:604–634, 2006.
- [3] E. Anderheggen and H. Knopfel. Finite element limit analysis using linear programming. *Int. J. Solids Structures*, 8:1413–1431, 1972.
- [4] F. Pastor. *Résolution par des méthodes de point intérieur de problèmes de programmation convexe posés par l'analyse limite*. Thèse de doctorat, Département de mathématiques, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Belgique, 26 octobre 2007.
- [5] F. Pastor, E. Loute, J. Pastor, and M. Trillat. Mixed method and convex optimization for limit analysis of homogeneous Gurson materials: a kinematical approach. *Eur. J. Mech.-A/Solids*, 28:25–35, 2009.
- [6] D. Durban, T. Cohen, and Y. Hollander. Plastic response of porous solids with pressure sensitive matrix. *Mech. Res. Comm.*, 37:636–641, 2010.
- [7] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [8] F. Schleicher. Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung). *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 6:199–216, 1926.
- [9] V. Monchiet and D. Kondo. Exact solution of a plastic hollow sphere with a Mises-Schleicher matrix. *Int. J. Engng. Sciences*, 51:168–178, 2012.
- [10] Ph. Thoré, F. Pastor, J. Pastor, and D. Kondo. Closed form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker-Prager materials under isotropic loadings. *C. R. Mécanique, Acad. Sc. Paris*, 337:260–267, 2009.
- [11] J. H. Lee and J. Oung. Yield functions and flow rules for porous pressure-dependent strain-hardening polymeric materials. *J. Appl. Mech.*, 67:288–297, 2000.
- [12] T. F. Guo, J. Faleskog, and C. F. Shih. Continuum modeling of a porous solid with pressure sensitive dilatant matrix. *J. Mech. Phys. Solids*, 56:2188–2212, 2008.
- [13] H.-Y. Jeong. A new yield function and a hydrostatic stress-controlled void nucleation model for porous solids with pressure sensitive matrices. *Int. J. Solids Structures*, 39:1385–1403, 2002.