



HAL
open science

Simulation du procédé de dudgeonnage de tubes de générateurs de vapeur

Dzifa Kudawoo, Mickaël Abbas, Frédéric Lebon

► **To cite this version:**

Dzifa Kudawoo, Mickaël Abbas, Frédéric Lebon. Simulation du procédé de dudgeonnage de tubes de générateurs de vapeur. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722108

HAL Id: hal-01722108

<https://hal.science/hal-01722108>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Simulation du procédé de dudgeonnage de tubes de générateurs de vapeur

Dzifa KUDAWOO ^{1,2}, Mickael ABBAS ², Frédéric LEBON ¹

¹ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 13 Chemin Joseph Aiguier CNRS, kudawoo@lma.cnrs-mrs.fr, lebon@lma.cnrs-mrs.fr

² EDF R&D-LaMSID, UMR EDF-CNRS-CEA 8193 mickael.abbas@edf.fr

Résumé — Le dudgeonnage est un procédé de mise en forme rencontré dans le secteur du nucléaire. Il s'agit d'augmenter le diamètre initial des tubes par déformation plastique grâce à des galets. Ce procédé fait intervenir des grands déplacements, des grands glissements, des multiples zones de contact-frottement, des structures de grandes tailles. Le but de la simulation numérique est de connaître les contraintes résiduelles en vue d'une maîtrise de la nocivité éventuelle des défauts qui apparaissent dans les tubes en fonctionnement. Dans ce papier, on compare des algorithmes de contact-frottement récemment développés en termes de robustesse, performance et fiabilité.

Mots clés — dudgeonnage, contact-frottement, Newton généralisé, Newton partiel

1 Introduction

Le dudgeonnage est une opération qui consiste à augmenter progressivement le diamètre d'un tube afin de le mettre en contact avec une plaque à tubes (voir figure 1). Ce procédé se déroule en plusieurs phases. Dans cette étude on se propose de modéliser la première phase dite de *dudgeonnage intégral* où l'on augmente intégralement le diamètre du tube sur une longueur correspondant à l'épaisseur de la plaque support.

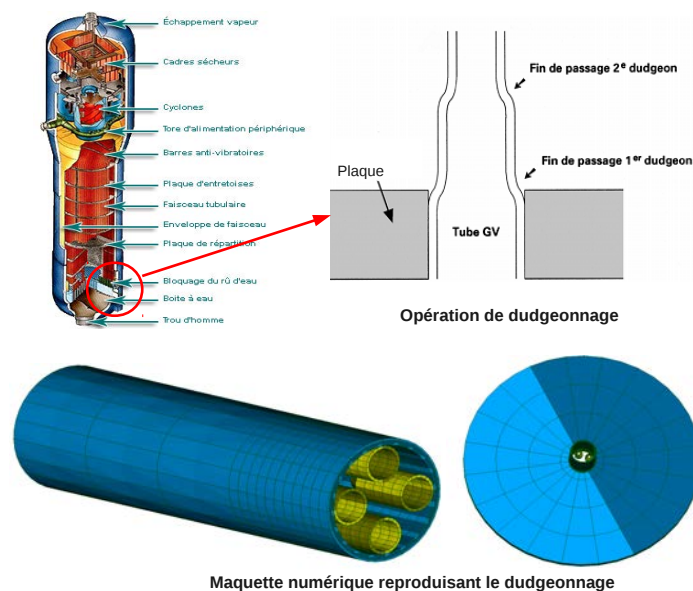


Fig. 1 – Problème de dudgeonnage : géométrie

Les caractéristiques géométriques et le maillage sont présentés sur la figure 1 :

La plaque est modélisée par un disque troué $R_{ext} = 100\text{mm}$, $R_{int} = 11.6\text{mm}$, $épaisseur = 12\text{mm}$.

Le tube est modélisé par un cylindre long $R_{ext} = 11.27\text{mm}$, $R_{int} = 10\text{mm}$, $longueur = 70\text{mm}$

L'ensemble des 4 galets sont modélisés par 4 cylindres creux d'épaisseur $0.5mm$ $r = 2.8mm$.

Le maillage représenté sur la figure 1 est quadratique et est constitué de 39612 noeuds ayant pour support 3580 éléments hexaédriques à 27 noeuds soit près de 130000 ddls dont 15000 en contact.

Propriétés matériaux :

La plaque est constituée de deux matériaux :

- Dans une zone proche du tube, elle est modélisée par un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire (voir figure 2).

$$\sigma_Y = 450MPa, E = 204000$$

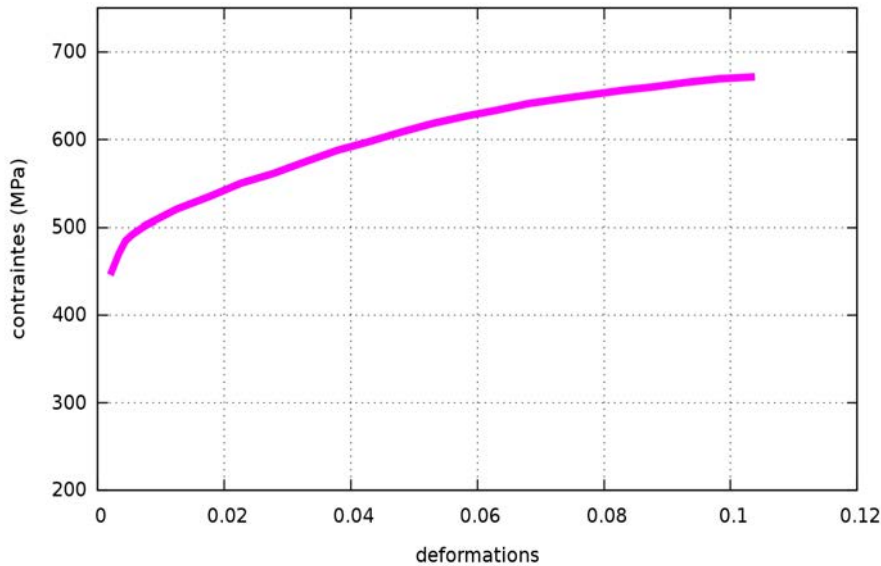


Fig. 2 – Problème de dudgeonnage : courbe de traction de la plaque

- Dans une zone loin du tube, on considère un comportement élastique.

Le tube est en « Inconel 600 » et obéit à une loi de comportement de type Von Mises à écrouissage mixte linéaire.

$$E = 179000MPa, \sigma_Y = 335MPa, E_t = 2726MPa, E_c = 1500MPa$$

E_t représente la pente d'écrouissage isotrope tandis que E_c est propre à l'écrouissage cinématique (constante de Prager).

Les galets sont considérés comme infiniment rigides.

Conditions de simulation :

À l'état initial, il existe un jeu de $0.27mm$ entre le tube et la plaque. Dans la première phase de dudgeonnage, les galets sont animés d'un mouvement d'ouverture en spirale, entrent en contact avec le tube et progressivement le tube se met en contact avec la plaque. Le procédé dure $360s$ avec un mouvement angulaire de $\frac{\pi}{180rd/s}$ des galets et un mouvement radial total de $0.27mm$.

2 Formulations, discrétisations et algorithmes

2.1 Formulations, discrétisations

On considère une évolution quasi-statique des corps. L'interface de contact est traitée par la loi de Signorini-Coulomb. On considère également les divers comportements non linéaires des structures étudiées. La difficulté de traitement est non seulement liée au choix de formulations variationnelles adaptées au problème mais aussi à la technique de résolution qui permet d'obtenir des résultats « justes » dans un temps relativement court. La formulation variationnelle retenue est la formulation du Lagrangien augmenté par Alart-Curnier, *Code_Aster* [1,2,3].

Soit à trouver les inconnues (u, λ_n, Λ) tel que :

$$(u, \lambda_n, \Lambda) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \underset{\lambda_n^*}{\operatorname{argmax}} \underset{\Lambda^*}{\operatorname{argmax}} \{J^{tot}(v, \lambda_n^*, \Lambda^*)\} \text{ avec} \quad (1)$$

$$J^{tot}(v, \lambda_n^*, \Lambda^*) = \left\{ \sum_i \int_{\Omega^i} j^{int,i}(v^i) \right\} + \left\{ \sum_m \int_{\Gamma_c} j^{cont,m} + j_{C(\lambda_n)}^{frot,m} \right\}(v, \lambda_n^*, \Lambda^*) = \left\{ \sum_p \int_{\Gamma_f} j^{ext,p} \right\} \quad (2)$$

Dans les expressions ci-dessus, J^{tot} représente l'énergie mécanique totale du système tandis que j^{int} , j^{cont} , j^{frot} , j^{ext} représentent les densités continues d'énergie respectivement liées à la déformation, au contact-frottement et aux conditions aux limites en effort. L'indice i indique le nombre de corps en présence dans le système, tandis que l'indice m décrit le nombre d'interfaces de contact-frottement, enfin l'indice p désigne les surfaces sur lesquelles on impose la condition aux limites en efforts. Par la suite, on omettra les indices par souci de simplicité. (u) désigne alors le vecteur généralisé des déplacements, (λ_n, Λ) est le vecteur généralisé inconnu associé aux pressions de contact (normales, tangentielles). Il convient de préciser l'écriture du Lagrangien augmenté sur le bord de contact-frottement entre les galets-tube et le tube-plaque.

$$j^{cont}(v, \lambda_n^*) = \frac{1}{2r_n} \{S_c(\lambda_n^* - r_n v_n) \{ \lambda_n^* - r_n v_n \}^2 - \lambda_n^{*2}\} \quad (3)$$

$$j_{C(\lambda_n)}^{frot,m}(v, \lambda_n^*, \Lambda^*) = \frac{1}{2r_t} \{ (1 - S_c) \Lambda^* \cdot \Lambda^* + S_c \{ S_f \{ [\Lambda^* + r_t v_t dt] [\Lambda^* + r_t v_t dt] - \Lambda^* \cdot \Lambda^* \} + (1 - S_f) \{ [\frac{\Lambda^* + r_t v_t dt}{\| \Lambda^* + r_t v_t dt \|}] [\frac{\Lambda^* + r_t v_t dt}{\| \Lambda^* + r_t v_t dt \|}] - 2 \| \Lambda^* + r_t v_t dt \| + \Lambda^* \cdot \Lambda^* \} \} \} \quad (4)$$

Dans les expressions des densités d'énergies de contact-frottement, $S_c(\bullet)$ et $S_f(\bullet)$ désignent respectivement les statuts de contact-décollement et d'adhérence-glissement d'un point matériel situé sur un bord de contact-frottement.

$$S_c(\lambda_n - r_n v_n) = \begin{cases} \text{"Level set de contact" ou "champ de signe de contact"} = S_c \\ S_c(\lambda_n - r_n \cdot v_n) = 1 \text{ si contact } (\lambda_n - r_n \cdot v_n \leq 0) \\ S_c(\lambda_n - r_n \cdot v_n) = 0 \text{ si pas contact } (\lambda_n - r_n \cdot v_n > 0) \end{cases} \quad (5)$$

$$S_f(\Lambda^* + r_t \cdot v_t) = \begin{cases} \text{"Level set de frottement" ou "champ de signe de frottement"} = S_f \\ S_f(\Lambda^* + r_t \cdot v_t) = 1 \text{ si adhérence } (\| \Lambda^* + r_t \cdot v_t \| \leq 1) \\ S_f(\Lambda^* + r_t \cdot v_t) = 0 \text{ si glissement } (\| \Lambda^* + r_t \cdot v_t \| > 1) \end{cases} \quad (6)$$

r_n est le paramètre d'augmentation strictement positif. $C(\lambda_n)$ est le cône de Coulomb. v_n, v_t désignent respectivement le saut virtuel de déplacement normal et tangentiel d'un couple de point souvent appelé esclave-maître. Enfin Λ^* découle de la contrainte tangentielle λ_t^* par un changement de variable : $\lambda_t^* = -\mu \lambda_n \Lambda^*$ (en d'autres termes Λ^* indique la direction de la contrainte tangentielle).

Remarque :

Le Lagrangien augmenté permet de tirer profit de la méthode de pénalité et de celle des multiplicateurs de Lagrange non régularisés. En effet, le principal avantage de la méthode de pénalité est son caractère différentiable. Mais son inconvénient réside dans le fait qu'il faut caler un paramètre de régularisation afin d'assurer la convergence du calcul tout en obtenant une pénétration raisonnable. La méthode

de multiplicateurs de Lagrange non régularisés n'autorise **aucune pénétration**. Mais son inconvénient réside dans la **non différentiabilité** de la fonction indicatrice. L'ensemble des points de non différentiabilité est un cône R^+ . Cette dernière nécessite d'utiliser la définition du **Jacobien généralisé** telle que rappelée dans [1,2,4,5]. La méthode du lagrangien augmenté permet un traitement à priori **sans pénétration tout en conservant une régularité** sur les termes de contact. En effet, les densités d'énergies de contact-frottement sont de **classe C-1 différentiable**. L'application de la première variation et de la deuxième variation sur les termes énergétiques aboutit à des termes dont **l'ensemble des points de non différentiabilité est réduit à un singleton**. Ces détails sont précisés dans [1,2,4].

L'équation 1 est à proprement parler un problème de **quasi-optimisation** à cause de la dépendance de l'inconnue tangentielle vis-à-vis de l'inconnue de pression normale lorsque se produit le glissement. Les algorithmes développés doivent prendre en compte cette particularité liée à la loi de Coulomb.

A l'intérieur de chaque corps, on utilise les approches classiques de discrétisation par éléments finis isoparamétriques quadratiques. Sur les bords de contact, on appellera un des corps maîtres et l'autre esclave. Le calcul du contact passe d'abord par le **couplage ou l'appariement** des surfaces en présence. L'algorithme de détection tel que décrit dans [1,3] consiste à rechercher le noeud maître le plus proche d'un point de contact esclave, puis la maille maître susceptible d'être couplée à ce point esclave et enfin le point maître projeté du point esclave sur la maille maître couplée. Cette approche est communément appelée noeud-segment ou plus précisément point-segment (Le couplage est fait à partir d'un point d'intégration de la maille esclave [1,3]). Les inconnues de déplacements et de multiplicateurs de Lagranges de contact sont calculés dans le même espace d'approximation (grâce aux fonctions de forme de type Lagrange). Il convient toutefois de rappeler que le choix des espaces d'approximation est subordonné au respect de la règle inf-sup de Ladyenskaya-Babuska-Brezzi [6]. L'approximation des statuts de contact-frottement est faite par une méthode de collocation par points : à partir d'un point de contact esclave on génère un nouvel élément de contact dont le statut est celui du point qui l'a généré via une fonction de forme de type Dirac [1]. Enfin on remplace l'intégration exacte par une intégration numérique de type Gauss, Newton-Cotes, Simpson, noeud-à-noeud. Finalement, le système discrétisé consiste à résoudre le problème suivant :

<p>Trouver $(u^h, \lambda_n^h, \Lambda^h)^T$ tel que :</p> $\{F\}^h(u, \lambda_n, \Lambda)^h = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\}^h + F^{cont,h} + F^{frott,h} = 0 & \text{(Équilibre faible discrétisé)} \\ \tilde{F}^{cont,h} = 0 & \text{(Signorini faible discrétisé)} \\ \tilde{F}^{frott,h} = 0 & \text{(Coulomb faible discrétisé)} \end{cases} \quad (7)$

Structure générale des matrices et vecteurs élémentaires

Les algorithmes qui vont être développés sont basés sur les techniques de linéarisation. En omettant les paramètres du calcul, la forme générale de la linéarisation est :

$$F^h(X^h + \Delta X^h) \approx F^h(X^h) + K^h(X^h)\Delta X^h + R^h(X^h) = 0 \quad (8)$$

R^h est le reste de Taylor après un développement limité d'ordre 1

K^h est la matrice de rigidité globale du système. Supposons deux corps en contact-frottement, on a :

$$\begin{aligned}
K^h(X^h)\Delta X^h &= \{v_h^1\}^T \left\{ \bigcup_{e=1, N_{e1}} \int_{\Omega_{1e}} [K_{int}^1]_e d\Omega_{1e} \right\} \{\Delta u_h^1\} \\
&+ \{v_h^2\}^T \left\{ \bigcup_{e=1, N_{e2}} \int_{\Omega_{2e}} [K_{int}^2]_e d\Omega_{2e} \right\} \{\Delta u_h^2\} \\
&+ \begin{pmatrix} v_h^1 \\ v_h^2 \\ \lambda_n^* \\ \Lambda^* \end{pmatrix}^T \left\{ \bigcup_{c=1, N_c} \int_{\Gamma_{ce}} \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} \end{bmatrix} .d\Gamma_{ce} \right\} \begin{pmatrix} \Delta u_h^1 \\ \Delta u_h^2 \\ \Delta \lambda_n \\ \Delta \Lambda_h \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

$[K_{int}^i]_e$ représente la contribution en matrices élémentaires des non linéarités de comportement ainsi que les grandes déformations

$[K]_{cf}$ est la contribution des matrices de contact.

Remarque :

L'approche discrète **point-segment** présente quelques inconvénients :

- Il faut vérifier à la fin du calcul qu'il n'y a pas d'oscillations des pressions de contact. Le cas échéant, on préconise de changer l'espace d'approximation des inconnues ou de choisir une autre méthode d'intégration. Si le problème persiste, il faut recourir à d'autres méthodes de couplages de surfaces de contact (exemple : segment-segment).
- Un noeud esclave ne peut pas pénétrer dans une maille maître mais l'inverse est possible et cela ne dépend pas de la formulation continue de départ.

Les opérateurs discrets du Lagrangien augmenté présentent sous certaines conditions sur le coefficient de frottement des propriétés d'homéomorphismes (injectivité et surjectivité des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n) permettant de conclure à l'existence et l'unicité de la solution [1,2,4]. Toutefois la mise en oeuvre du critère d'unicité sur un problème industriel apparaît couteux.

On rappelle que la principale difficulté du problème consiste à trouver la méthode la plus efficace permettant de traiter à la fois le problème de plasticité due à la mise en forme du tube et les multiples zones de contact-frottement. Outre la non linéarité de comportement, les difficultés du contact-frottement à prendre en compte sont :

- l'évolution de l'appriement des surfaces de contact au cours du calcul
 - la variation du seuil de frottement
 - le changement brusque des statuts de contact et de frottement
- La prise en compte de l'évolution de ces paramètres est présenté dans la section suivante.

2.2 Algorithmes : points fixes, Newton généralisé, Newton partiel

Après discrétisation du problème, il faut résoudre un système algébrique non-linéaire et dépendant des paramètres :

$$F(X, p(X)) = 0 \tag{10}$$

$X = (u, \lambda_n, \Lambda)$ représentent les inconnues aux noeuds du système. $p(X)$ représente les paramètres du problème dépendant des inconnues.

La méthodologie générale de résolution dans *Code_Aster* est telle que l'on passe par des boucles de

point fixe sur certains paramètres de contact puis on trouve l'équilibre du « système paramétré » grâce à la méthode de Newton.

Méthodologie générale de résolution

1. Étant donné les paramètres de contact $p_0 = p(X_0)$
2. On calcule l'équilibre par la méthode de Newton $F^{p_0}(X) = 0$
3. On vérifie que les paramètres sont bien fixés $p(X) = p_0$

En fonction des paramètres qui seront fixés au cours du calcul, la méthode de résolution se déclinera en plusieurs variantes : la méthode de point fixe, la méthode de Newton partielle, la méthode de Newton généralisée. Le tableau ci-dessous illustre ces différentes variantes :

	Appariement	Seuils de frottement	Statuts de contact
Newton généralisé	Non fixé	Non fixé	Non fixé
Point fixe-Newton	<i>fixé</i>	<i>fixé</i>	<i>fixé</i>
Newton partiel	<i>fixé</i>	Non fixé	Non fixé

Remarque :

On se place dans le cadre des algorithmes d'optimisation sans contraintes. L'algorithme historique du code est la méthode de point fixe. Les algorithmes qui ont été développés dans le cadre de ce travail sont : la méthode de Newton généralisée [1,2,3] et la méthode de Newton partielle [1]. La méthode de Newton généralisée est une méthode bien connue qui permet de résoudre le problème via une seule boucle d'itérations. C'est un schéma global prédicteur-correcteur pour toutes les non linéarités présentes. Elle fait intervenir des notions complexes de Jacobien généralisé et de plus cette dernière n'est pas très robuste. La méthode de Newton partielle est une méthode hybride avec la méthode de point fixe. Elle permet de renforcer la robustesse de la méthode de Newton généralisée tout en fournissant des solutions fiables. La comparaison en performance-robustesse est faite dans la dernière section de cet article.

2.3 Résultats numériques

- Études industrielles : elles se déroulent en deux phases :

Phase de dudgeonnage

On compare la solution avec frottement (coefficient de frottement = 0.3) et sans frottement. Le calcul avec frottement permet d'avoir des résultats proches de la réalité car elle prend en compte la dissipation de l'énergie due aux glissements des galets sur la peau interne du tube (voir figure 4-a). On montre sur les figures 3-a,3-b les résultats de la déformée amplifiée et les valeurs de contraintes équivalentes de Von Mises multipliées par le signe de la trace des contraintes (mise en évidence des zones de compression et de traction).

La prochaine étape consiste à exploiter les valeurs issues de la simulation du dudgeonnage.

Phase de mise en pression des tubes

On cherche à comparer l'état des contraintes sur le tube avec ou sans prise en compte des contraintes résiduelles. Le comportement de l'ensemble tube-plaque est idéalisé (absence de fissures, corrosions sous contraintes). Cette hypothèse permet de justifier la phase de dudgeonnage très coûteuse en termes de temps de calcul.

Le tube est maintenue sur sa partie supérieure en déplacements et il est soumis sur sa peau interne à une pression de 15.5MPa. On réalise deux types de simulation : le premier calcul prend en compte la déformée ainsi que la contrainte résiduelle tandis que le deuxième calcul considère uniquement la déformée résiduelle en supposant que la contrainte initiale est nulle. La comparaison de la solution avec/sans contrainte résiduelle est faite sur la figure 4-b. Cette étude montre l'influence de la mise en forme du tube sur le fonctionnement des tubes.

- Comparaison d'algorithmes

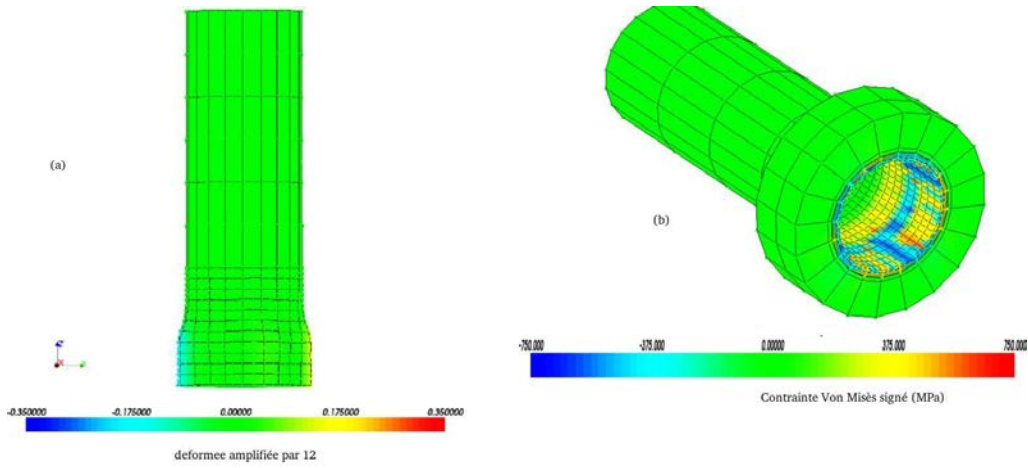


Fig. 3 – Problème de dudgeonnage : (a) déformée du tube amplifiée $\times 12$, (b) Contraintes équivalentes de Von Misès multipliées par le signe de la trace des contraintes

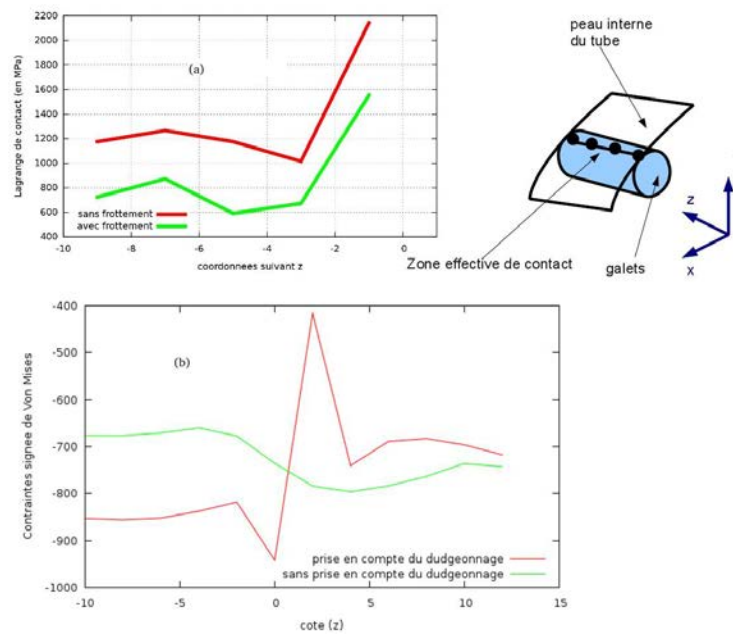


Fig. 4 – Problème de dudgeonnage : (a) comparaison des multiplicateurs de Lagrange avec et sans frottement (b) comparaison avec et sans contraintes résiduelles

Point Fixe	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	34h 43 m	10837	891
coef. frottement = 0.3	77 h 43 m	24837	960
<hr/>			
Newton partiel	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	42h43 m	14231	891
coef. frottement = 0.3	45h16	17938	960
<hr/>			
Newton généré	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	8 h 34 min	3154	3154
coef. frottement = 0.3	×	×	×

Ce problème est considéré de grande taille (maillage quadratique avec près de 130000 inconnues dont 15000 en contact). Afin de comparer objectivement les algorithmes on se place dans le cadre d'un calcul séquentiel et en utilisant un solveur direct MUMPS pour le système linéarisé.

- En termes de performances, le facteur pénalisant est le nombre total d'itérations de Newton

car une itération de Newton est coûteuse pour le solveur utilisé, quelque soient les algorithmes employés.

- Dans le cas sans frottement, la méthode de Newton généralisée est la plus rapide parce qu'elle fait intervenir moins d'itérations de Newton malgré le nombre élevé de constructions de nouveaux éléments de contact.
- Dans le cas du frottement, la méthode de Newton généralisée est non convergente. La méthode de point fixe est coûteuse à cause des boucles de point fixe sur le seuil de frottement. Ce cas démontre le gain aussi bien en robustesse et en performance de la méthode de Newton partielle : c'est une méthode qui combine les avantages de la méthode de Newton généralisée en termes de rapidité et de la méthode de point fixe en termes de robustesse. En particulier sur ce cas-test, la méthode de Newton partielle offre un gain de 47 % par rapport à la méthode de point fixe. Pour conclure sur la robustesse, certaines études demandent de faire un choix correct du paramètre d'augmentation. En effet, il faut choisir $r_n < r_{max}(E, h, \mu)$ pour éviter l'apparition des phénomènes de cyclage [1,5,7].

3 Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence les avantages de la méthode de Newton partielle. En effet, elle tire profit de la robustesse liée à la boucle de point fixe sur la géométrie tout en se rapprochant des performances de la méthode de Newton généralisée. Une perspective de ce travail est la réalisation du calcul avec des solveurs parallèles afin d'optimiser le temps de calcul et de favoriser ainsi plusieurs études paramétriques.

Pour aller plus loin, il faudrait supposer que le tube est endommagé (présence de fissures, corrosions sous contraintes) et qu'il est soumis à des conditions complexes de fonctionnement telles que la fatigue ou même l'irradiation.

Références

- [1] D. Kudawoo, *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique de contact : performance, fiabilité et robustesse*, Thèse soutenue à l'université d'Aix-Marseille, 2012.
- [2] P. Alart, A. Curnier, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 353-375, 1991.
- [3] *Code_Aster, Éléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue*, manuel de référence, 1-78, 2012.
- [4] Alart P., *Critères d'injectivité et de surjectivité pour certaines applications de R^n dans lui même ; application à la mécanique de contact*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 27, 1993, 203-222.
- [5] Alart P., *Méthode de Newton Généralisée en mécanique du contact*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 76, 1997, 83-108.
- [6] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Method*, Springer Series Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991, 1-198.
- [7] Kudawoo A. D., Lebon F., Abbas M., De-Soza T., Rosu I., *Etude de la robustesse d'un algorithme basé sur le lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement*, 10eme Colloque national de calcul des structures, 2011, hal-00592780.