



HAL
open science

Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide

Claire Hennuyer, Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz

► To cite this version:

Claire Hennuyer, Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, Eric Markiewicz. Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722105

HAL Id: hal-01722105

<https://hal.science/hal-01722105>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide

Claire HENNUYER ^{1,2}, Nicolas LECONTE ², Bertrand LANGRAND ¹, Éric MARKIEWICZ ²

¹ ONERA, The French Aerospace Lab, France, claire.hennuyer@onera.fr

² LAMIH, Université de Valenciennes, France

Résumé — Lorsqu’une structure aéronautique est soumise à des sollicitations de dynamique rapide, des phénomènes de localisation des contraintes apparaissent au niveau des assemblages rivetés. L’analyse par éléments finis du comportement de la structure complète de l’avion implique inévitablement l’utilisation d’éléments adaptés. Ainsi, des super-éléments finis pour le rivet, d’une part, et pour la plaque perforée, d’autre part, ont été développés pour la représentation des assemblages. Cependant, ces éléments ne peuvent être connectés à l’heure actuelle. Les travaux présentés se focalisent donc sur leur association.

Mots clés — Assemblage riveté, super-éléments, variables complexes, forces concentrées.

1 Introduction

L’étude des structures aéronautiques soumises à des chargements extrêmes de type crash ou impact requiert l’utilisation d’éléments finis adaptés au calcul de structures. En effet, pour pouvoir analyser le comportement d’un avion soumis à un chargement de dynamique rapide, il est indispensable, non seulement, de modéliser la structure complète de l’avion (propagation de fissures, évaluation de la surviabilité), mais aussi, de prendre en compte les différents *mécanismes locaux de rupture* qui peuvent avoir lieu. La représentation des zones propices à l’amorçage de ruptures, et en particulier les *assemblages rivetés*, est alors primordiale. Ces derniers jouent un rôle d’autant plus prépondérant qu’ils sont présents par dizaines de milliers sur un avion complet.

La disproportion évidente entre l’échelle de la structure et celle de l’assemblage est clairement incompatible avec les technologies logicielles et matérielles actuelles. Par conséquent, il apparaît nécessaire de développer des éléments finis particuliers qui soient, d’une part, adaptés au *calcul de structures*, et d’autre part, capables de décrire *précisément* les champs de contraintes au niveau des assemblages. Les auteurs ont choisi de distinguer dans leur modélisation, le modèle de la fixation de celui de la tôle perforée.

Des macro-éléments permettant de rendre compte du comportement mécanique non-linéaire du rivet jusqu’à sa rupture ont été formulés et validés (modèle poutre [1] ou ressort [2]). Ils sont intégrés dans la plupart des codes de calcul explicites et permettent la représentation de l’assemblage en le reliant à deux éléments de coque conventionnels (Fig. 1). Cependant, cette modélisation ne permet pas de représenter certains modes de rupture de l’assemblage (arrachement de la tôle initié en bord de perforation, passage du rivet à travers la tôle, etc.), car les concentrations de contraintes liées à la perforation ne sont pas prises en compte.



Fig. 1 – Modélisation actuelle des assemblages.

2 Super-élément fini hybride-Trefftz de plaque perforée

Les recherches menées au sein de l'ONERA et du LAMIH se focalisent sur le développement d'un super-élément fini de coque perforée capable de localiser les champs mécaniques autour de la perforation lors de chargements de dynamique rapide. Un super-élément fini de plaque perforée hybride-Trefftz déplacement (Fig. 2) a été développé en ce sens [3, 4].

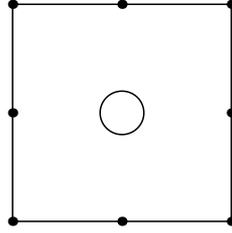


Fig. 2 – Super-élément fini de plaque perforée à 8 nœuds.

Cet élément fini repose sur un principe variationnel de type hybride-Trefftz déplacement qui, d'une part, assure la compatibilité avec les éléments finis voisins, et, d'autre part, est construit de manière à réduire l'intégration d'intérieur de domaine à une intégration sur la frontière. Les fonctions d'interpolation associées au super-élément proviennent du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [6], et possèdent la particularité de prendre en compte la présence de la perforation. Ce formalisme permet d'obtenir une expression analytique des déplacements et des contraintes en fonction de deux potentiels complexes ϕ et ψ , leur expression étant différente selon le problème considéré. Ici, les déplacements et les contraintes homogènes (i.e., perforation libre de chargements) sont donnés sous la forme d'une série et dépendent de paramètres (α_j, β_j) . Pour une perforation circulaire de rayon a , les déplacements u_x^h , par exemple, sont donnés par l'équation (1).

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=-N}^M \alpha_j [(kR^j + R^{-j}) \cos(j\theta) - j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta] \quad (1)$$

avec (R, θ) les coordonnées polaires (la coordonnée radiale est adimensionnée $R = r/a$), μ le module de cisaillement du matériau et k la constante de Muskhelishvili ($k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ en contraintes planes, $k = 3 - 4\nu$ en déformations planes, où ν est le coefficient de Poisson du matériau).

Les champs \mathbf{u}^h et $\boldsymbol{\sigma}^h$ peuvent s'écrire de manière plus concise :

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{Nc} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{Qc} \quad (2)$$

où \mathbf{N} et \mathbf{Q} sont les matrices des fonctions d'interpolation associées aux déplacements et contraintes, et, $\mathbf{c} = (\alpha_j, \beta_j)$ représente le vecteur des degrés de liberté (ddl) généralisés de l'élément.

Les bornes de la série (1), N et M , sont fixées en fonction du nombre de nœuds de l'élément. La relation (3) exprime le lien qui existe entre le nombre de paramètres (α_j, β_j) et le nombre de degrés de liberté de l'élément.

$$n_u \geq n_\sigma \geq n_q - r \quad (3)$$

où n_u et n_σ représentent respectivement le nombre de paramètres suffisants pour définir les déplacements et les contraintes, n_q le nombre de ddl physiques en déplacement, et r le nombre de modes de corps rigides.

L'expression des déplacements et contraintes considérée ici implique que $n_u = n_\sigma$. De plus, le problème étant bidimensionnel, n_q est égal à deux fois le nombre de nœuds et $r = 3$. Cette relation permet de fixer le nombre *minimum* de paramètres requis pour la formulation d'un élément en fonction du nombre de nœuds. Dans la littérature [8, 9, 10, 11], il est de plus recommandé que le nombre n_σ soit approximativement égal à $n_q - r$ car prendre un trop grand nombre de paramètres rendrait trop rigide l'élément ainsi construit. Du fait de ces deux exigences, N et M sont fixés à 4 pour la formulation d'un élément à 8 nœuds (Fig. 2).

Le super-élément fini hybride-Trefftz de plaque perforée est implémenté dans un code ONERA et apporte de très bons résultats en des temps de calcul très faibles (peu de degrés de liberté) par rapport à un

maillage EF fin [12]. Cependant, la perforation est une frontière analytique qui est libre de chargements. La liaison entre le super-élément de plaque perforée et les macro-éléments de type rivet, évoqués dans l'introduction, est alors inenvisageable aujourd'hui.

3 Vers une modélisation de l'assemblage

La modélisation de l'assemblage repose sur la capacité à représenter l'interaction entre le modèle de fixation et le modèle de plaque perforée (Fig. 3). Les travaux se concentrent sur l'extension de la formulation du super-élément de plaque perforée existant (présenté dans la section 2), de manière à rendre possible le dialogue avec un super-élément rivet, et pouvoir modéliser *in fine* le contact entre ces deux éléments *via* des méthodes de pénalité ou des multiplicateurs de Lagrange.

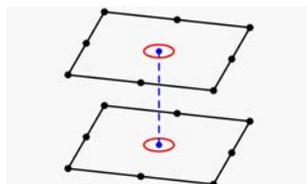


Fig. 3 – Modélisation de l'assemblage par super-éléments finis.

Avant d'envisager la liaison avec le modèle de fixation, il est préalable de vérifier que l'élément perforé est capable de subir des conditions de chargements sur le contour de sa perforation. La première partie de cette section expose de quelle manière il est aujourd'hui possible de charger la perforation de l'élément. La seconde partie propose une solution plus générale et plus adaptée à notre problématique, qui consiste à matérialiser la perforation du super-EF par la formulation de nœuds sur cette frontière.

3.1 Chargement de la perforation

Le chargement de la perforation est possible *via* une solution particulière analytique. En effet, la solution analytique sur laquelle est basée la formulation de l'élément de plaque perforée est décomposée en une partie homogène et une partie particulière. La partie *homogène* correspond à la solution du problème de la plaque infinie élastique perforée dont la *perforation est libre de chargements* (1,2); la partie *particulière* correspond, quant à elle, à la solution du problème de la plaque infinie élastique perforée lorsque la *perforation est soumise à un chargement particulier*.

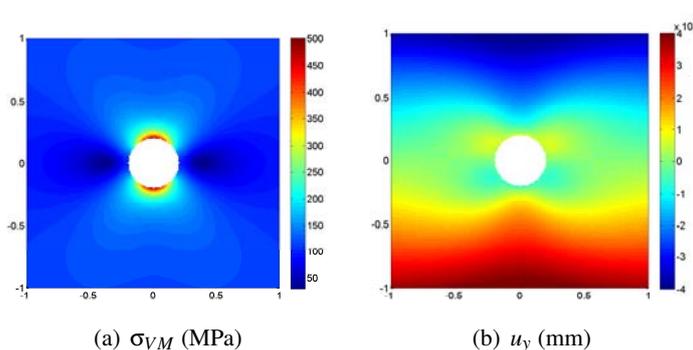


Fig. 4 – Combinaison d'une traction lointaine appliquée à la plaque et d'une pression appliquée à la perforation.

La référence [8] propose le calcul de la solution lorsqu'une pression constante ou un cisaillement constant est appliqué de manière uniforme sur le contour de la perforation. À titre d'exemple, la figure 4 montre la distribution des contraintes de von Mises σ_{VM} et du déplacement u_y pour une plaque sollicitée en traction lointaine (selon \vec{x}), et dont la perforation est soumise à une pression constante uniformément répartie. D'autres cas de chargement sont considérés dans la référence [6], notamment le cas d'une plaque perforée soumise à un nombre fini de *forces concentrées* sur le contour du trou. Cet exemple, plus

détaillé dans les références [5, 7], est intéressant puisqu'il permet de charger ponctuellement la perforation. Étant donnés n vecteurs de coordonnées (X_k, Y_k) correspondant à des forces concentrées appliquées aux points $z_k = ae^{i\theta_k} \in \mathbb{C}$ du contour de la perforation, la solution est calculée grâce aux potentiels complexes associés au problème : $\phi(z, z_k, X_k, Y_k)$ et $\psi(z, z_k, X_k, Y_k)$. La superposition de la solution particulière analytique obtenue avec la solution homogène (1,2) permet, finalement, de prendre en compte, non seulement, le comportement global de la plaque étudiée, mais aussi, de considérer des chargements ponctuels appliqués à la perforation.

Il est donc possible d'appliquer des conditions aux limites sur la perforation du super-EF. Cependant, les chargements analytiques qui peuvent être considérés sont simples (pression/cisaillement). Même si le cas des forces concentrées est plus élaboré, il est évident que cette manière de procéder n'est ni suffisante, ni adéquate pour modéliser la complexité du système rivet/plaque perforée. Tout d'abord, parce que les forces appliquées sont des données d'entrée, il serait alors difficile d'évaluer la direction et l'intensité des forces appliquées par le rivet¹ à chaque pas de temps dans un calcul dynamique. De plus, certains modes de rupture de l'assemblage ne pourraient toujours pas être représentés comme le passage à travers de la fixation, le déboutonnage, etc. Il est donc proposé de matérialiser la perforation du super-élément par des nœuds afin de permettre le passage d'efforts entre le rivet et les nœuds de la perforation ainsi formulés.

3.2 Formulation de nœuds sur la perforation : étude des fonctions d'interpolation

Il est maintenant proposé d'étudier la formulation d'un élément comportant 8 nœuds sur la frontière externe (comme auparavant) et 8 nœuds supplémentaires sur la perforation (Fig. 5).

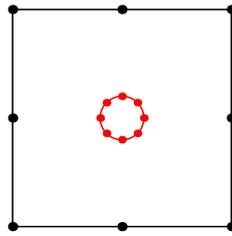


Fig. 5 – Super-élément fini de plaque perforée avec des nœuds sur sa perforation.

Les fonctions d'interpolation présentées dans la section 2 s'expriment sous la forme d'une série bornée de $-N$ à M . Étant données les relations qui existent entre le nombre de paramètres (α_j, β_j) et le nombre de nœuds de l'élément, l'ordre de la série doit être augmenté à $N = M = 8$ pour la formulation d'un élément à 16 nœuds.

Une étude numérique est ici présentée pour vérifier que les fonctions d'interpolation peuvent reconstruire correctement les champs de contraintes et de déplacements lorsque des nœuds sont placés sur la perforation. La méthode générale pour évaluer la solution de Kolosov-Muskhelishvili (K-M) consiste à prélever de l'information sur une solution de référence (analytique ou numérique), en l'occurrence la valeur des déplacements en 16 points particuliers disposés selon la schématisation proposée dans la Figure 6. La procédure consiste ensuite à égaliser la solution de référence avec celle de K-M aux 16 points de prélèvement, formant ainsi un système linéaire à résoudre dont les paramètres (α_j, β_j) sont les inconnues. Les champs de contraintes et de déplacements sont finalement entièrement reconstruits en introduisant les paramètres précédemment identifiés dans les expressions (2).

1. Il serait probablement possible de bâtir une solution analytique, basée sur des essais, pour évaluer le profil de la pression appliquée par un rivet sur une plaque perforée lors d'une quelconque sollicitation. Cependant, étant donné le nombre de paramètres pouvant influencer sur la solution analytique (e.g., le type de fixation, le matériau, les dimensions, etc.), le nombre d'essais deviendrait trop important et donc coûteux.

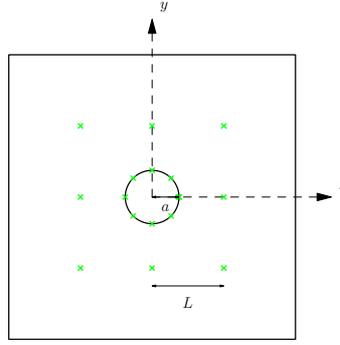


Fig. 6 – Disposition des 16 points de prélèvement.

3.2.1 Solution analytique de référence

La solution de référence, considérée ici, est une solution analytique du problème de plaque infinie perforée soumise à une traction lointaine σ_∞ , dont l'expression est donnée par Kirsch [13].

Les résultats obtenus par la solution de K-M à l'ordre 8 lorsque des nœuds sont placés sur la perforation (Fig. 6) sont en partie présentés sur la figure 7. La reconstruction des champs de contraintes et de déplacements est visiblement correcte ; la précision de la solution obtenue est évaluée plus en détail dans le tableau 1. L'écart maximum observé avec la solution de référence, dans le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$, y est reporté pour chacune des composantes de \mathbf{u}^h et $\boldsymbol{\sigma}^h$ ainsi que pour la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} . Plusieurs configurations sont également analysées afin de déterminer l'influence, ou non, de l'ordre de la série et de la disposition des points de prélèvement (points disposés sur le rectangle uniquement, ou, sur le rectangle et la perforation) sur le calcul de la solution de K-M.

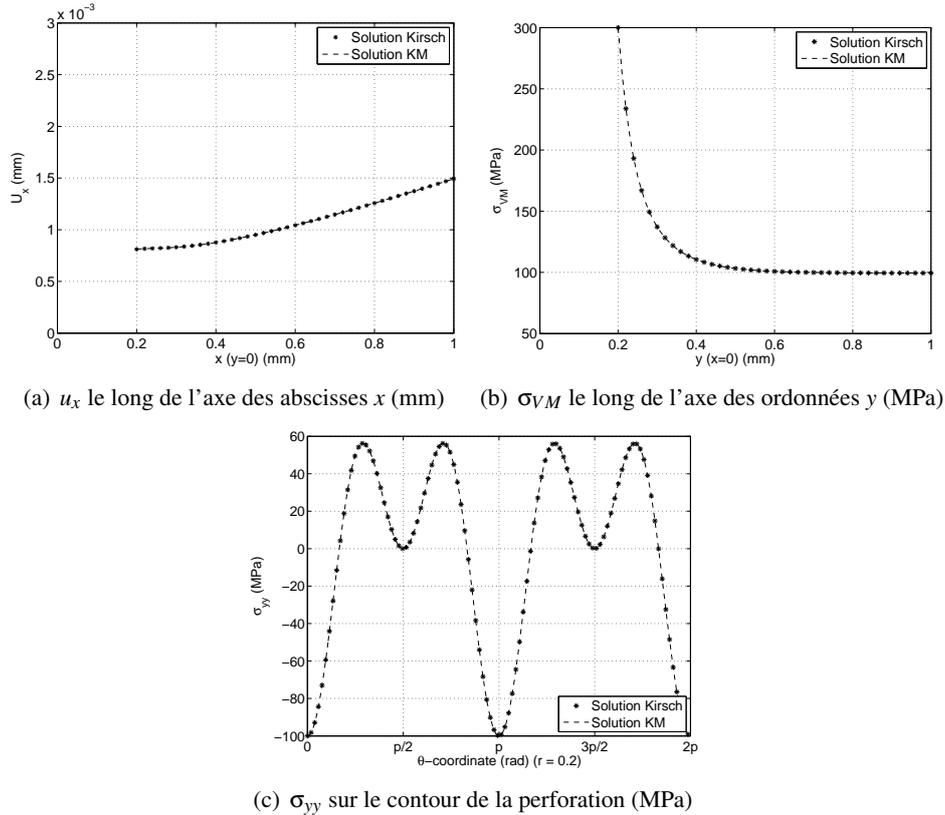


Fig. 7 – Résultats obtenus par la solution de K-M à l'ordre 8 avec prélèvement sur la perforation.

La valeur des paramètres significatifs reste inchangée quelle que soit la configuration étudiée : $\alpha_{-1} = 10$ et $\alpha_1 = 5$. Ensuite, en comparant les cas $\{N = M = 4 ; 8 \text{ pts rect}\}$ et $\{N = M = 4 ; 16 \text{ pts rect}\}$, il est conclu que l'augmentation du nombre de point de prélèvement seul ne modifie pas la précision de la solution. En revanche, l'augmentation de l'ordre de la série diminue la précision de la solution

Configuration	Ordre $N = M = ..$	Erreur u_x (mm)	Erreur u_y (mm)	Erreur σ_{xx} (MPa)	Erreur σ_{yy} (MPa)	Erreur σ_{xy} (MPa)	Erreur σ_{VM} (MPa)
8 pts rect	4	10^{-18}	10^{-18}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-13}
8 pts rect + 8 pts perfo	4	10^{-18}	10^{-18}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-13}
16 pts rect	4	10^{-18}	10^{-18}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-13}
16 pts rect	8	10^{-17}	10^{-17}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-12}
8 pts rect + 8 pts perfo	8	10^{-12}	10^{-12}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}

Tableau 1 – Écarts maximums observés sur la solution de K-M pour différentes configurations par rapport à la solution de Kirsch (ordres de grandeur).

(cas $\{N = M = 4 ; 16 \text{ pts rect}\}$ et $\{N = M = 8 ; 16 \text{ pts rect}\}$), contrairement à ce que l'on pouvait espérer. En fait, augmenter le nombre de paramètres de la solution (plus de coefficients α_j et β_j) peut certainement permettre de modéliser des champs plus complexes en termes de distribution spatiale, mais peut aussi augmenter le risque de biais (introduction de paramètres proches de zéro qui ne sont pas exactement égaux à zéro). Par contre, la précision chute de façon significative dès lors que 8 points de prélèvement sont situés sur la perforation (cas $\{N = M = 8 ; 16 \text{ pts rect}\}$ et $\{N = M = 8 ; 8 \text{ pts rect} + 8 \text{ pts perfo}\}$). Nous avons par ailleurs vérifié que la disposition des points de prélèvement sur la perforation n'avait aucune influence sur les écarts relevés².

Une diminution de la précision est effectivement remarquée lorsque l'ordre de la série apparaissant dans les fonctions d'interpolation est fixé à 8 et que des points de prélèvement sont présents sur la perforation. Cependant, les résultats obtenus restent malgré tout très acceptables en termes d'erreur absolue. Il est conclu que les fonctions d'interpolation associées au super-élément perforé comportant 8 nœuds sur sa frontière interne reconstruisent correctement les champs de contraintes et de déplacements pour un problème de traction lointaine.

3.2.2 Solutions numériques de référence

Afin de poursuivre l'évaluation des fonctions d'interpolation pour d'autres types de chargements, une solution provenant de modèles élément fini est, ici, considérée comme solution de référence. Les cas de traction uniaxiale, traction biaxiale, cisaillement simple, et cisaillement pur sont étudiés. Comme précédemment, différentes configurations (ordre/disposition des points) sont analysées.

Globalement, les conclusions de l'étude sont similaires à celles énoncées pour la comparaison avec la solution analytique de Kirsch. En effet, quelle que soit la configuration ou le type de chargement étudié, la valeur des paramètres significatifs (α_j, β_j) est toujours retrouvée³. On constate également que l'augmentation seule du nombre de point de prélèvement n'influe que très légèrement sur la précision de la solution de K-M, et que l'augmentation de l'ordre de la série diminue la précision de la solution.

Cependant, certaines configurations pour quelques cas de chargement apportent des résultats remarquables. D'importants écarts par rapport à la solution de référence sont observés avec la configuration $\{N = M = 8 ; 16 \text{ pts rect}\}$ pour un problème de traction (cas A) et avec la configuration $\{N = M = 8 ; 8 \text{ pts rect} + 8 \text{ pts perfo}\}$ pour un problème de cisaillement (cas B) (Fig. 8). La distribution des déplacements et contraintes, dans le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$, est globalement bien reconstruite et cohérente avec le chargement ; en particulier à proximité de la perforation où l'erreur par rapport à la solution de référence est quasiment nulle. Par contre, des écarts importants sont localisés au voisinage de certains points du bord du domaine d'étude. Par exemple, dans le cas B, la valeur de σ_x (là où la diffé-

2. Les mêmes écarts sont observés pour le cas $\{N = M = 8 ; 8 \text{ pts rect} + 8 \text{ pts perfo}\}$ où les nœuds de la perforation sont décalés de $\pi/8$, par exemple.

3. Dans l'une des études du rapport [12], il a été remarqué que chacun des cas de chargement, mentionnés ci-dessus, était complètement défini par uniquement quelques paramètres. Par exemple, la traction biaxiale est entièrement représentée par le terme α_1 , les autres termes étant négligeables.

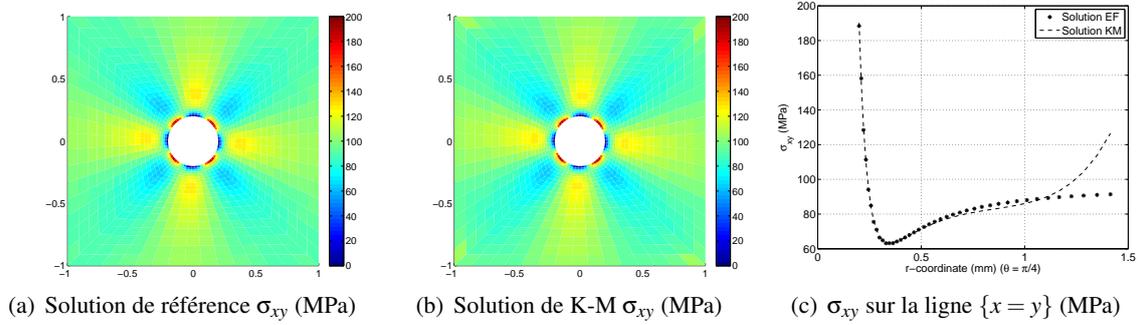


Fig. 8 – Résultats obtenus par la solution de K-M dans le cas d'un cisaillement pur pour la configuration $\{N = M = 8 ; 8 \text{ pts rect} + 8 \text{ pts perfo}\}$.

rence est la plus importante) est égale à -31.74 MPa, alors que la valeur de référence est -3.8 MPa. Les écarts sont encore plus élevés pour la configuration avec 16 nœuds sur la frontière externe (cas A) : dans le cas d'une traction biaxiale, l'écart maximal relevé pour σ_x est de 154.58 MPa (la valeur obtenue par la solution de K-M est 331.06 MPa au lieu de 176.48 MPa). Ce phénomène est beaucoup plus accentué pour le calcul des contraintes que pour celui des déplacements (e.g., lorsque des écarts de plus de 150 MPa sont observés sur le calcul des contraintes, on note seulement 15% d'erreur pour les déplacements).

Les différentes sources d'erreur possibles sont les suivantes. Premièrement, les coefficients de certains modes ne contribuant pas à la solution de référence peuvent prendre des valeurs significatives dans la solution identifiée. Les écarts aberrants observés ne sont pas dus à ces termes supplémentaires, l'erreur est négligeable dans ce cas. Deuxièmement, et contre toute attente, certains paramètres (α_j, β_j) qui semblent négligeables, car proches de zéro, ont une grande influence sur les champs identifiés. Dans l'exemple B, les paramètres β_{-5} et β_7 , de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-6} respectivement, sont identifiés comme étant responsables des écarts observés : la solution est, en effet, correctement reconstruite lorsque ceux-ci sont fixés exactement à zéro (Fig. 9). Troisièmement, il a été remarqué que la réinterpolation des

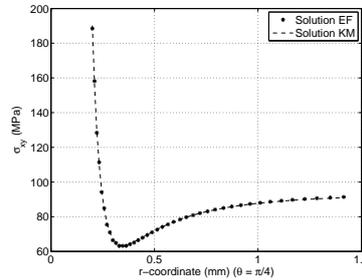


Fig. 9 – σ_{xy} (MPa) sur la ligne $\{x = y\}$ avec $\beta_{-5} = \beta_7 = 0$

champs à partir d'une solution analytique (i.e. exacte) ne faisait pas apparaître de tels écarts (§ 3.2.1), il semble donc qu'une grande précision des informations prélevées sur la solution de référence soit essentielle. Pour vérifier, une solution analytique, basée sur le formalisme de K-M, a été générée pour chaque type de chargement à partir des paramètres prépondérants identifiés dans la référence [12]. La valeur des déplacements est ensuite prélevée en 16 points (sur le rectangle uniquement ou sur le rectangle et la perforation) sur la solution précédemment construite et est comparée à celle prélevée sur le modèle EF. L'écart maximum observé entre les données prélevées, quelle que soit la configuration ou le chargement, est de 7×10^{-5} mm (i.e., il concerne le cisaillement simple et la valeur du déplacement u_x au point $(1, -0.5)$ qui est égale à -9.6×10^{-4} mm pour la FEM et -10.2×10^{-4} mm pour la solution analytique correspondante). La différence entre les données est très faible mais les solutions reconstruites à partir des solutions analytiques correspondantes sont précises, aucune aberration n'est observée ici.

Il est possible de conclure que les fonctions d'interpolation, associées au super-élément perforé comportant des nœuds sur sa perforation, sont capables de reconstruire les champs de déplacements et contraintes à proximité de la perforation, pour divers types de chargement. D'importants écarts ont été observés pour quelques cas particuliers, mais ceux-ci sont très localisés et leur origine a été identifiée.

4 Conclusions et perspectives

Les travaux s'intéressent à la modélisation des assemblages rivetés pour le calcul de structures, et en particulier au développement d'un super-EF de plaque perforée comportant des nœuds sur sa perforation. La formulation d'un tel élément nécessite de calculer les fonctions d'interpolation associées et de formuler un principe variationnel adapté. Concernant le premier point, une étude essentielle à la formulation et l'implémentation de l'élément a consisté à évaluer la capacité des fonctions d'interpolation issues du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili à reconstruire les champs de contraintes et de déplacements à partir de valeurs nodales prises à la fois sur la frontière externe et la perforation. Les conclusions de cette étude sont encourageantes puisque les champs sont globalement bien reconstruits surtout à proximité de la perforation. Quelques cas mettent en valeur des écarts plus significatifs qui sont très localisés, et dont la source est aujourd'hui connue. Il s'agira d'étudier l'influence du biais, de nature numérique, sur la réponse fournie par le super-EF perforé. Le second point, qui concerne la formulation du principe variationnel et de la matrice de rigidité de l'élément, n'a pas été évoqué. Des travaux sont en cours pour, non seulement, faire intervenir les degrés de liberté de la perforation dans le principe variationnel, mais aussi, satisfaire la compatibilité des déplacements uniquement à travers la frontière externe de l'élément. La littérature montre l'existence d'éléments finis totalement hybride (compatibilité externe et interne) [14] ou semi-analytique (sans compatibilité) [15]. À présent, il est proposé d'évaluer la possibilité de formuler un élément partiellement hybride et semi-analytique, *via* l'étude des conditions de stationnarité.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier la Région Nord-Pas-de-Calais et l'Onéra pour leur soutien financier au laboratoire commun DRSC (Dynamique Rapide des Structures et Collision), associant le CNRS, l'Onéra-DADS, et l'UVHC-LAMIH.

Références

- [1] A. Combescure, F. Delcroix, L. Caplain, S. Espanol, P. Eliot. *A finite element to simulate the failure of weld points on impact*, Int. J. Impact Engrg. 28, 783-802, 2003.
- [2] B. Langrand, E. Deletombe, E. Markiewicz, P. Drazétic. *Riveted joint modelling for numerical analysis of airframe crashworthiness*, Finite element analysis and design 38, 21-44, 2001.
- [3] N. Leconte. *Éléments finis hybride déplacement perforés pour le calcul des structures aéronautiques rivetées*, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2008.
- [4] N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *On some features of a Hybrid-Trefftz displacement element containing a hole*, Finite Elem. Anal. Des. 46, 819-828, 2010.
- [5] J. H. Michell. *Elementary distributions of plane stress*, Proc. London Math. Soc. 32, 35-61, 1900.
- [6] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- [7] G. C. Sih. *Stress distribution around an ovaloid hole under arbitrary concentrated forces*, J. of Appl. Sci. Res. 12(A), 378-390, 1964.
- [8] R. Piltner. *Special finite elements with holes and internal cracks*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 21, 1471-1485, 1985.
- [9] R. Piltner. *Some remarks on finite elements with an elliptic hole*, Finite Elem. Anal. Des. 44, 767-772, 2008.
- [10] P. Tong. *New displacement hybrid finite element models for solid continua*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 2, 73-83, 1970.
- [11] T.H.H. Pian, D. Chen. *On the suppression of zero energy deformation modes*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 19, 1741-1752, 1983.
- [12] B. Langrand, N. Leconte. *Formulation et implantation d'un élément fini hybride-Trefftz de plaque perforée pour le calcul de structure*, Rapport Technique RT 1/17586 DADS, Onéra, Novembre 2010.
- [13] G. Kirsch. *Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre*, Z VDI 42, 797-807, 1898.
- [14] F. Furguele, F. Cesari, D. Martini. *Analisi di strutture piane in materiale eterogeneo con l'elemento finiti ibrido*, XXX AIAS, Alghero (Italy), 1093-1101, 2001.
- [15] C.H. Yang, A.K. Soh. *Modeling of voids/cracks and their interactions*, Theor. Appl. Fract. Mech. 38, 81-101, 2002.