



**HAL**  
open science

## Analyse à double échelle des vibrations des structures sandwichs viscoélastiques longues et à forme répétitive

Komla Gaboutou Lougou, El Mostapha Daya, Lahcen Azrar

► **To cite this version:**

Komla Gaboutou Lougou, El Mostapha Daya, Lahcen Azrar. Analyse à double échelle des vibrations des structures sandwichs viscoélastiques longues et à forme répétitive. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722101

**HAL Id: hal-01722101**

**<https://hal.science/hal-01722101>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

**ANALYSE A DOUBLE ECHELLE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES SANDWICHS VISCOELASTIQUES LONGUES ET A FORME REPETITIVE**K. G. Lougou<sup>1\*</sup>, E. M. Daya<sup>1</sup>, L. Azrar<sup>2,3</sup>1 Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux.UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, [lougoulu@etu.univ-lorraine.fr](mailto:lougoulu@etu.univ-lorraine.fr), [daya@lpmm.sciences.univ-metz.fr](mailto:daya@lpmm.sciences.univ-metz.fr)2 Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques de Tanger, Université Abdelmalek Essaadi, BP 416 Tanger, Maroc, [l.azrar@uae.ma](mailto:l.azrar@uae.ma)3 Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia [l.azrar@uae.ma](mailto:l.azrar@uae.ma)

\* Auteur correspondant :

Email : [lougoulu@etu.univ-lorraine.fr](mailto:lougoulu@etu.univ-lorraine.fr) (Komla Gaboutou Lougou)

---

**Résumé** — Dans ce travail nous développons une méthode asymptotique à deux échelles pour l'étude des vibrations de longues structures sandwichs viscoélastiques à forme répétitive. Cette méthode réduit le problème initial de grande taille à une équation d'amplitude et à des problèmes locaux de petites tailles posés une cellule de base. Différents modèles viscoélastiques peuvent être considérés et la méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution numérique. Un grand nombre de cellules est considéré et le comportement vibratoire de telles structures est analysé.

**Mots clés** — développements asymptotiques, structures répétitives, sandwich viscoélastique, amortissement, vibrations.

---

## 1. Introduction

Les structures sandwichs viscoélastiques sont très utilisées dans les domaines industriels tels que l'aéronautique, l'automobile etc. ... pour leur pouvoir amortissant des vibrations et du bruit tout en assurant une bonne rigidité à la flexion. Plusieurs travaux ont été consacrés au calcul des paramètres modaux à savoir l'amortissement (facteur de perte) et la fréquence amortie grâce à la résolution numérique de problèmes de valeurs propres non linéaires. Une revue détaillée peut être trouvée dans [1]. Cependant pour les longues structures sandwichs à forme répétitive (fig. 2.) les paramètres deviennent très voisins et localisés dans des paquets (Fig.1.) rendant difficile la mise en œuvre de ces méthodes de calcul des vibrations.

Dans ce travail, nous proposons une méthode asymptotique à deux échelles (MADE) pour calculer les paramètres modaux de ce genre de structures. C'est une méthode d'homogénéisation qui réduit le problème initial de grande taille en deux sous problèmes de tailles relativement petites. Le premier problème, qualifié de local, est un problème aux valeurs propres complexes sur une cellule de base et est résolu à l'aide de la méthode des Eléments Finis (EF). Le second problème, qualifié global, introduit une équation d'amplitude complexe dont la résolution permet d'estimer le début et la fin de chaque paquet de valeurs propres. Cette méthode est élaborée ici pour l'étude du comportement vibratoire des structures sandwich viscoélastiques longues et à forme répétitive par la détermination de ces propriétés d'amortissement.

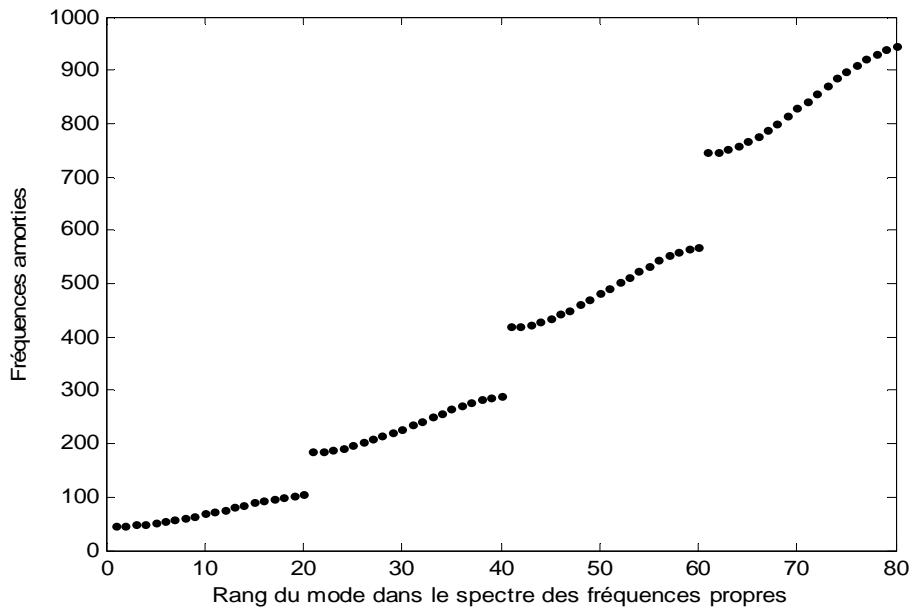


Fig. 1. Les quatre premiers paquets de fréquences propres de flexion obtenus par EF. Sandwich viscoélastique à 20 cellules. Module viscoélastique constant.

## 2. Formulation du problème de vibrations libres et application de la MADE

### 2.1. Formulation du problème

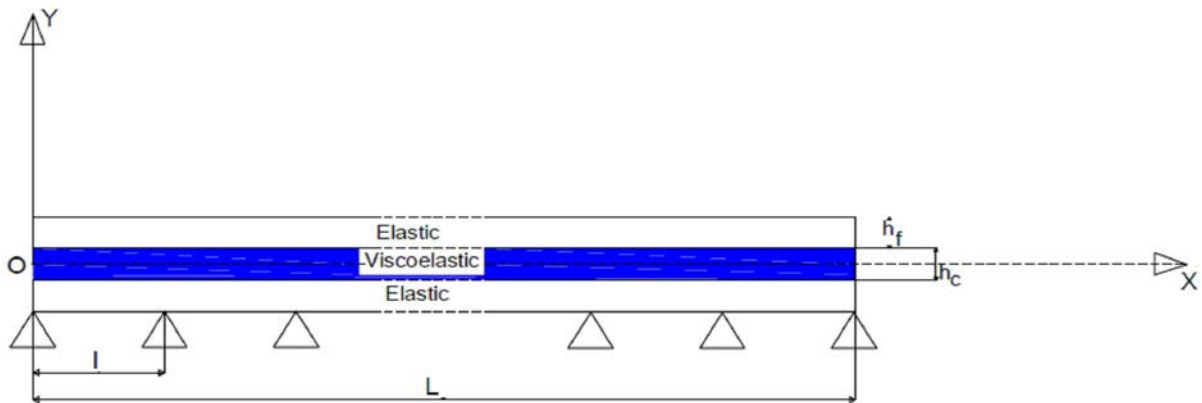


Fig. 2. Longue structure sandwich viscoélastique répétitive

On considère une longue structure sandwich symétrique à trois couches et à cœur viscoélastique telle que présentée sur la figure ci-dessus (Fig. 2.). En utilisant les hypothèses classiques de modélisation des sandwichs viscoélastiques (modèle zig-zag, flèche commune, continuité du déplacement aux interfaces, inertie de rotations négligée, [1,2]), le problème de vibrations libres de flexion s'écrit de la forme suivante [2] :

$$\begin{cases} CW'''' - MB'' + F(W' + B) = 0 \\ (H+C)W^{(4)} - (C+M)B'' - \lambda W = 0 \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \quad (1)$$

Où :  $W(x)$  est le déplacement transversal commun aux trois couches,  $B(x)$  est la rotation de la normale au plan moyen de la couche centrale.  $C$ ,  $F$ ,  $H$  et  $M$  sont des constantes dépendant des caractéristiques mécaniques des matériaux et dimensionnelles de la structure. Notons qu'à cause du comportement viscoélastique du cœur, ces coefficients sont complexes.

On note  $\lambda = \omega^2 = \Omega^2(1+i\eta)$  est la valeur propre complexe,  $\Omega$  représente la fréquence amortie et  $\eta$  le coefficient de perte. Comme la structure est supposée longue et composée d'un grand nombre de cellules identiques, nous proposons de résoudre le problème de valeurs propres complexes et non linéaires (1) à l'aide de la méthode asymptotique à deux échelles (MADE) [3,4,5].

## 2.2) Application de la MADE

La MADE est une méthode d'homogénéisation qui décompose le problème initial qui est de grande taille, en deux problèmes de tailles considérablement réduites. Le premier problème, qualifié de local, est calculé sur une ou deux cellules de base, le second, dit global, introduit des équations différentielles d'amplitudes. On appelle problème local toute solution du problème (1) avec des conditions de périodicité calculé sur une, deux cellules de base. Jusqu'à présent, cette méthode a été appliquée dans le cadre de structures répétitives élastiques [3,4,5].

Un calcul direct par éléments finis des modes du début (Fig. 3.) et fin (Fig. 4.) montre que ces modes apparaissent comme modulation de modes périodiques de période 1, 2l.

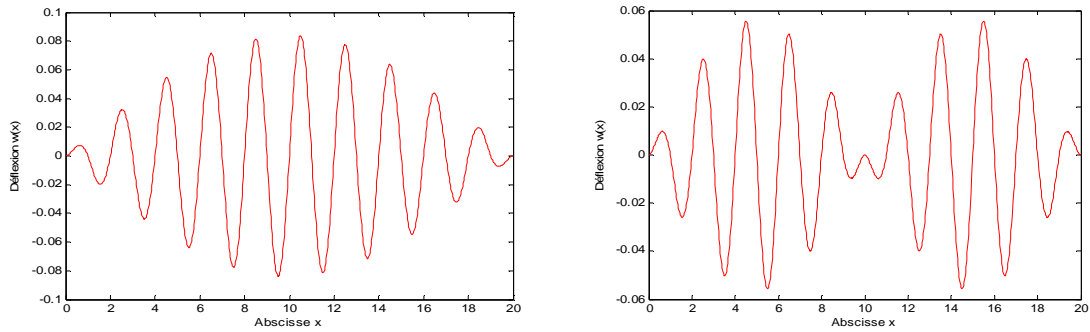


Fig. 3. Premier et deuxième modes modulés du premier paquet. Sandwich viscoélastique à 20 cellules. Module viscoélastique constant.

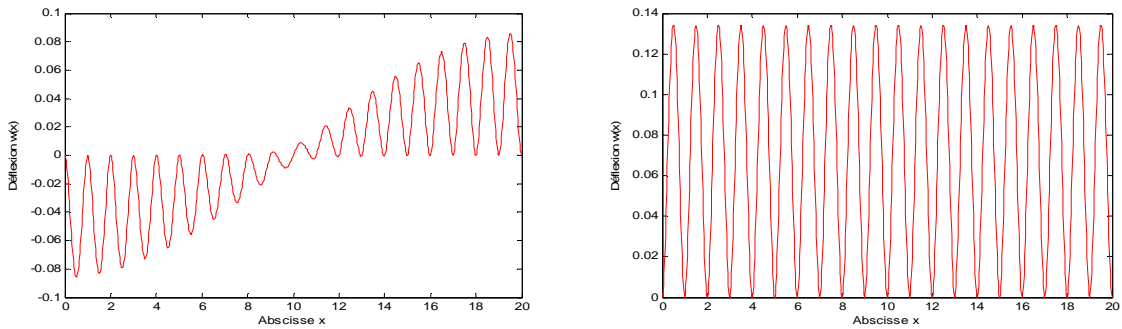


Fig. 4. 19<sup>ème</sup> et 20<sup>ème</sup> modes modulés du premier paquet. Sandwich viscoélastique à 20 cellules. Module viscoélastique constant.

L'utilisation de MADE consiste à chercher les inconnues  $W$ ,  $B$  et  $\lambda$  du problème (1) sous les formes asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} U = \begin{pmatrix} W \\ B \end{pmatrix} = U_0(X, x) + \varepsilon U_1(X, x) + \varepsilon^2 U_2(X, x) + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

Où  $X$  et  $x$  sont des variables indépendantes.  $x$  est la variable locale (rapide),  $X = \varepsilon x$  est la variable globale ou lente qui décrira la modulation global des modes propres.  $\varepsilon$  est un petit paramètre qui peut être égale à l'inverse du nombre de cellules  $N_c$

Les  $U_i$  sont considérés périodiques par rapport à la variable rapide  $x$  de période  $l$  ou  $2l$ .

Pour simplifier la présentation, nous introduisons les deux opérateurs suivants :

$$\begin{cases} \psi_1(W, B) = C \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + F \left( \frac{\partial W}{\partial x} + B \right) \\ \psi_2(W, B, \lambda) = (C + H) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - (C + M) \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} - \lambda W \end{cases} \quad (3)$$

$$\partial_x = \partial_x + \varepsilon \partial_X \quad (4)$$

En reportant les développements asymptotiques (2) de  $W(x)$ ,  $B(x)$  et  $\lambda$  dans le système d'équation (1), et en respectant la règle de dérivation (4) liée à la méthode d'échelle double, on obtient les problèmes aux différents ordres de  $\varepsilon$  :

### Problème à l'ordre $\varepsilon^0$

A l'ordre  $\varepsilon^0$  on se ramène au problème de vibrations libres suivant :

$$\begin{cases} W_0 \text{ et } B_0 \text{ périodiques} \\ \psi_1(W_0, B_0) = 0 \\ \psi_2(W_0, B_0, \lambda_0) = 0 \\ \text{Conditions aux bords} \end{cases} \quad (5)$$

### Problème à l'ordre $\varepsilon^1$

$$\begin{cases} W_1 \text{ et } B_1 \text{ périodiques} \\ \psi_1(W_1, B_1) = F_1^1(W_0, B_0) \\ \psi_2(W_1, B_1, \lambda_0) = F_2^1(W_0, B_0) + \lambda_1 W_0 \\ \text{Conditions aux bords} \end{cases} \quad (6)$$

### Problème à l'ordre $\varepsilon^2$

$$\begin{cases} W_2 \text{ et } B_2 \text{ périodiques} \\ \psi_1(W_2, B_2) = F_1^2(W_1, B_1, W_0, B_0) \\ \psi_2(W_2, B_2, \lambda_0) = F_2^2(W_1, B_1, W_0, B_0) + \lambda_2 W_0 + \lambda_1 W_1 \\ \text{Conditions aux bords} \end{cases} \quad (7)$$

Les variables  $X$  et  $x$  étant considérées indépendantes par la méthode d'échelle double. La solution du problème à l'ordre  $\varepsilon^0$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} W_0(X, x) = A_0(X) w_0(x) \\ B_0(X, x) = A_0(X) b_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

Où  $w_0(x)$ ,  $b_0(x)$  et  $\lambda_0$  vérifient le problème local suivant :

$$\begin{cases} w_0 \text{ et } b_0 \text{ periodiques} \\ \psi_1(w_0, b_0) = 0 \\ \psi_2(w_0, b_0, \lambda_0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

C'est un problème aux valeurs propres qui est calculé sur la cellule de base de la structure avec des conditions de périodicité.

Afin de résoudre les équations (5), (6), (7) on introduit les conditions de solvabilité suivante:

$$\langle \psi(\lambda_0)(W_i, B_i), w_0 \rangle = 0 \quad (10)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{periode} f(x)g(x)dx \quad (11)$$

La condition de solvabilité (10) appliquée au problème à l'ordre  $\varepsilon^1$  conduit à  $\lambda_1 = 0$  et la solution à l'ordre  $\varepsilon^1$  est alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} W_1(X, x) = A_1(X)w_0(x) + \frac{dA_0(X)}{dX}w_1(x) \\ B_1(X, x) = A_1(X)b_0(x) + \frac{dA_0(X)}{dX}b_1(x) \end{cases} \quad (12)$$

$w_1(x)$  et  $b_1(x)$  sont solutions du problème local suivant :

$$\begin{cases} w_1 \text{ et } b_1 \text{ periodiques} \\ \psi_1(w_1, b_1) = f_1^1(w_0, b_0) \\ \psi_2(w_1, b_1, \lambda_0) = f_2^1(w_0, b_0) \end{cases} \quad (13)$$

La condition (10) appliquée au problème à l'ordre  $\varepsilon^2$  conduit à l'équation d'amplitude qui est de la forme :

$$\begin{cases} \alpha \frac{d^2 A_0}{dX^2} + \lambda_2 A_0 = 0 \\ \text{conditions aux limites globales} \end{cases} \quad (14)$$

Où la constante  $\alpha$  est complexe et calculé à partir des solutions des problèmes locaux aux ordres  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$ .

La résolution de l'équation différentielle (14) permet de déterminer les valeurs propres du début et de la fin de chaque paquet sous la forme [3,4] :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_{0\text{début}} + \frac{\alpha_{\text{début}} n^2 \pi^2}{L^2} \\ n = 1, 2, \dots \text{ pour une poutre encastree/encastree} \\ n = 0, 1, \dots \text{ pour une poutre en appui simple} \end{cases} \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda_{0_{fin}} + \frac{\alpha_{fin} n^2 \pi^2}{L^2} \\ n = 0, 1, \dots \text{ pour une poutre encastrée/encastrée} \\ n = 1, 2, \dots \text{ pour une poutre en appui simple} \end{array} \right. \quad (16)$$

Notons que pour le comportement viscoélastique dépendant de la fréquence, le problème (1) est complexe et fortement non linéaire en fréquence. Le développement d'une procédure mathématique spécifique est nécessaire pour sa résolution numérique [1]. On se limite dans cette étude au cas d'un modèle viscoélastique à module complexe constant. Le module d'Young du cœur dans ce cas est modélisé par la loi constante de la forme :

$$E_c(\omega) = E_0(1+i\eta_c) \quad (17)$$

Où  $E_0$  est le module d'Young d'élasticité retardée et  $\eta_c$  le facteur de perte du cœur considéré constant.

### 2.3 Résultats et discussions

Pour les résultats numériques, on considère une longue structure sandwich viscoélastique acier/polymère/acier avec  $N_c$  cellules de base et des cellules de base de longueur  $l$ . Les propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sont regroupées dans le tableau 1 ci-dessous. La structure a une largeur  $b = 0.01\text{m}$ ,  $\eta_c = 1.5$ . Les propriétés d'amortissement en termes de fréquence de résonance  $\Omega$ , et de facteur de perte sont présentées et comparé aux résultats EF.

	Faces	Cœur
Module de Young (Pa)	$E_f = 2,1.10^{11}$	$E_0 = 1794.10^3$
Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_f = 7800$	$\rho_c = 968,1$
Coefficient de poisson	$\nu_f = 0,3$	$\nu_c = 0,3$
Hauteur (m)	$h_f = 0,02$	$h_c = 0,01$

Tab. 1. : Caractéristiques de la longue structure sandwich acier/polymère/acier.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Omega(\text{MADE})$	46.9	47.2	48.2	49.7	51.9	54.5	57.5	64.5
$\Omega(\text{EF})$	46.9	47.2	48.2	49.8	51.9	54.6	57.6	61.0
$\eta/\eta_c(\text{MADE})$	0.022	0.022	0.021	0.019	0.018	0.016	0.015	0.013
$\eta/\eta_c(\text{EF})$	0.022	0.022	0.021	0.020	0.018	0.017	0.015	0.014

Tab. 2. : Fréquences et rapport d'amortissement au début du premier. Appui simple aux extrémités.  $N_c = 20$ ,  $l = 1\text{m}$ .  $\alpha_{début} = 49236.42 - 0.08i$

L'utilisation de la méthode des éléments finis sur la structure globale nécessite un maillage très fin de toute la structure et un coût de calcul qui peut être considérable. La présente méthode permet la réduction des problèmes à résoudre et le coût de calcul. En effet un calcul direct s'effectue en 335s pour une discrétisation en 700 éléments de toute la structure alors que la MADE nécessite environ 89s. Les résultats obtenus sont présentés dans les Tab. 2 et Tab.3 pour déterminer le début et la fin du premier paquet de valeurs propres. Cependant on constate que la précision de la MADE diminue lorsqu'on approche du milieu de paquet. Cela

Rang	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Omega$ (MADE)	60.1	73.3	83.1	90.5	96.2	100.3	103.2	104.9
$\Omega$ (EF)	81.4	85.7	89.9	94	97.6	100.8	103.3	104.9
$\eta/\eta_c$ (MADE)	0.0166	0.0111	0.0087	0.0073	0.0065	0.0060	0.0056	0.0055
$\eta/\eta_c$ (EF)	0.0088	0.0081	0.0074	0.0069	0.0064	0.0060	0.0057	0.0055

Tab. 3. : Fréquences et rapport d'amortissement à la fin du premier paquet d'une poutre Extrémités encastées.  $N_c = 20, l = 1m. \alpha_{fin} = -187791.31 + 0.32i$

est dû aux hypothèses de calculs qui sont plus vraies en milieu de paquet. En effet pour ce genre de structures les modes de début et de fin de paquet apparaissent comme une modulation lente de mode locaux de période  $l, 2l$ , ce qui n'est pas le cas des modes de milieu de paquet pour lesquels les deux échelles deviennent équivalentes. On peut aussi remarquer que la précision en début de paquet est meilleure qu'en fin de paquet. Pour le premier paquet,  $\lambda_{0début}$  correspond au mode périodique de période  $2l$ , et  $\lambda_{0fin}$  correspond au mode périodique de période  $l$ .

Les Tab. 4. et Tab. 5. présentent les résultats obtenus pour une structure avec 80 cellules

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Omega$ (MADE)	46.87	46.90	46.96	47.06	47.20	47.38	47.61	47.87	48.17	48.51
$\Omega$ (EF)	46.87	46.90	46.96	47.06	47.21	47.39	47.61	47.88	48.18	48.52
$\eta/\eta_c$ (MADE)	0.0218	0.0218	0.0217	0.0216	0.0215	0.0213	0.0211	0.0209	0.0206	0.0204
$\eta/\eta_c$ (EF)	0.0218	0.0218	0.0217	0.026	0.0216	0.0214	0.0212	0.0210	0.0208	0.0206

Tab. 4 : Fréquences et rapport d'amortissement au début du premier. Appui simple aux extrémités.  $N_c = 80, l = 1m. \alpha_{début} = 49236.42 - 0.08i$

Rang	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$\Omega$ (MADE)	101.94	102.62	103.22	103.76	104.21	104.60	104.92	105.16	105.33	105.44
$\Omega$ (EF)	102.19	102.78	103.32	103.81	104.24	104.61	104.92	105.16	105.33	105.44
$\eta/\eta_c$ (MADE)	0.00578	0.0570	0.00564	0.00558	0.00553	0.00549	0.00546	0.00543	0.00541	0.00540
$\eta/\eta_c$ (EF)	0.00580	0.00573	0.00566	0.00560	0.00554	0.00550	0.00546	0.00544	0.00542	0.00540

Tab. 5 : Fréquences et rapport d'amortissement à la fin du premier paquet d'une poutre Extrémités encastées.  $N_c = 80, l = 1m. \alpha_{fin} = -187791.31 + 0.32i$



de base de longueur  $l = 1$ . On constate que le coefficient  $\alpha$  de l'équation d'amplitude ne varie pas et ne dépend que de la cellule base. Donc le temps de calcul n'augmente pas avec la MADE quelque soit la taille de la structure globale, alors que ce temps augmente très rapidement dans le cas de MEF. En effet pour le calcul par MEF des résultats des Tab. 4. et Tab. 5., la structure a été discrétisée en 2800 éléments dans le sens de la longueur ce qui fait passer le temps de calcul à 28301s alors que le calcul par la MADE est achevé en 80s.

La même analyse peut être effectuée pour les autres paquets. On peut constater que la MADE donne très bon résultats en début et fin de paquet et plus la taille de la structure est grande, plus la MADE efficace.

### 3. Conclusion

Une méthode asymptotique à deux échelles pour l'étude du comportement vibratoire de longues structures sandwichs répétitives à cœur viscoélastiques a été développée. Cette méthode décompose le problème initial de grande taille en deux problèmes de petite taille. Leur résolution permet d'estimer les paramètres modaux (fréquence amortie et amortissement modal) du début et de la fin de chaque paquet de modes propres. Cette estimation est plus précise pour les structures de grande taille. Pour améliorer cette estimation un calcul aux ordres supérieurs est nécessaire en tenant compte des effets de couche limite [5].

### 4. Références

- [1] M. Bilasse, I. Charpentier, E. M. Daya, Y. Koutsawa. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II: Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 49–52, 2009, Pages 3999-4004.
- [2] E. M. Daya, L. Azrar, M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 271, 3–5, 2004, Pages 789-813.
- [3] N. Moustaghfir, E.M. Daya, B. Braikat, N. Damil, M. Potier-Ferry. Evaluation of continuous modelings for the modulated vibration modes of long repetitive structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 21, 2007, Pages 7061-7072.
- [4] El Mostafa Daya, Bouazza Braikat, Nouredine Damil, Michel Potier-Ferry. Modelisation of modulated vibration modes of repetitive structures, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 168, Issues 1–2, 1 July 2004, Pages 117-124.
- [5] E.M. Daya and M. Potier-Ferry. Vibrations of long repetitive structures by a double scale asymptotic method. *Structural Engineering and Mechanics*, volume 12, n° 2, 2001, Pages. 215-230.