



HAL
open science

Simulation eulérienne des conséquences matériaux induites par soudage FSW

Eric Feulvarch, Jean-Michel Bergheau, Jean-Christophe Roux

► **To cite this version:**

Eric Feulvarch, Jean-Michel Bergheau, Jean-Christophe Roux. Simulation eulérienne des conséquences matériaux induites par soudage FSW. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722094

HAL Id: hal-01722094

<https://hal.science/hal-01722094>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Simulation eulérienne des conséquences matériaux induites par soudage FSW

Jean-Christophe ROUX ¹, Eric FEULVARCH ², Jean-Michel BERGHEAU ³

¹ Univ Lyon, ENISE, EA 3719, DIPI, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France, jean-christophe.roux@enise.fr

² Univ Lyon, ENISE, UMR 5513, LTDS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France, eric.feulvarch@enise.fr

³ Univ Lyon, ENISE, UMR 5513, LTDS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France, jean-michel.bergheau@enise.fr

Résumé — Dans cet article, une stratégie de maillage mobile est proposée pour la simulation numérique du soudage par friction malaxage et les conséquences matériaux induites, pour des géométries de pions complexes. Elle est basée sur un formalisme eulérien et prend en compte les transferts de chaleur, la mécanique et une équation d'advection de manière à intégrer l'historique du matériau. La première section décrit la modélisation physique. La méthode et le traitement numérique sont détaillés dans la deuxième partie et la dernière section présente un exemple de soudage afin d'illustrer l'efficacité de la méthode proposée.

Mots clés — Soudage par friction-malaxage, maillage, advection, éléments finis.

1 Introduction

La modélisation numérique de soudage par friction est un problème multiphysique très complexe. Du point de vue mécanique, la simulation d'un tel processus doit prendre en compte de larges déformations et des taux de déformation importants. Dans ce contexte, le formalisme lagrangien associé à la méthode des éléments finis n'est pas adapté. En effet, comme le maillage suit le flux de matière, l'importance des déformations conduit à des distorsions d'éléments inacceptables. En outre, la modélisation locale des effets thermiques et mécaniques nécessite un maillage très fin dans le voisinage de la zone de malaxage, ce qui conduit à des problèmes de taille de maillage significatifs. Ceci peut être évité par l'utilisation d'une procédure de raffinement et de remaillage dans le voisinage de la zone de soudage, mais cela conduit à des temps de calcul très importants. L'approche ALE peut être utilisée pour obtenir des temps de calcul réalistes [1, 17, 11]. Celle-ci consiste en l'introduction d'une vitesse relative entre le maillage et le matériau de base afin de réduire les distorsions de maille. Une autre approche consiste à utiliser des techniques sans maillage telles que les méthodes SPH [16, 13] ou MPS [19]. Quoiqu'il en soit, comme des simulations transitoires doivent être effectuées, ces approches restent compliquées à mettre en œuvre et sont très coûteuses en temps [1, 14].

Comme la plupart des procédés de soudage, le procédé FSW implique une zone de soudage de petite taille comparée à celle de toute la structure étudiée. Il est très souvent supposé qu'un état stationnaire est atteint lorsque la structure soudée présente une géométrie de translation sur une longue distance. Il est évident qu'un tel état stationnaire ne peut exister qu'avec des outils axisymétriques. Par conséquent, les champs thermomécaniques au cours de la phase stationnaire peuvent être calculés au moyen d'une analyse stationnaire utilisant un repère lié à la vitesse de soudage, dans un formalisme eulérien [6, 7, 12, 2, 3, 8]. Les temps de calcul sont ainsi considérablement réduits par l'éviction de l'analyse transitoire.

Pour les outils non-axisymétriques, un état périodique peut être supposé, avec une période dépendant de la géométrie de l'outil. Dans ce cas, la simulation par éléments finis de la phase périodique du processus peut être réalisée au moyen d'un formalisme eulérien couplé avec une technique de maillage mobile simple, telle que suggéré par Feulvarch *et al.* [10]. Le maillage est composé de 2 parties : une première qui est fixée autour de la zone de malaxage et une seconde qui comprend le matériau de base à proximité de l'outil et se déplace avec un mouvement de rotation solide correspondant à la vitesse de rotation de l'outil. De ce fait, il n'existe aucune distorsion du maillage et le formalisme eulérien conduit à des temps de calcul satisfaisants, ce qui constitue un véritable défi numérique [18].

La principale difficulté induite par le formalisme eulérien est que l'historique de la matière n'est pas connu a priori. En effet, le maillage ne suit pas le matériau. Ainsi, l'historique de la matière doit être intégré pour connaître l'état du matériau de base en n'importe quel point, en termes de niveau de l'état de malaxage ou d'autres grandeurs physiques telles que l'état de la microstructure. Ces quantités ne sont pas seulement intéressantes dans le post-traitement d'un calcul thermomécanique, mais aussi lors de la simulation thermomécanique elle-même puisque le comportement du matériau peut en dépendre.

Pour surmonter cette difficulté, nous proposons, dans la première partie de cet article, de coupler le problème thermomécanique avec une équation d'advection. Malheureusement, la technique de maillage mobile initialement proposé par Feulvarch *et al.* ne gère pas correctement cette équation d'advection pour des raisons numériques. Nous proposons donc dans la deuxième partie une variante de cette approche qui est en mesure de traiter le problème d'advection. Un exemple de simulation pour un alliage de série 7075 illustre cette approche dans la dernière partie de cet article.

2 Modélisation thermomécanique

2.1 Ecoulement du matériau

L'écoulement du matériau est régi par l'équation d'équilibre de la quantité de mouvement dans laquelle les forces d'inertie sont négligées. Cela revient à adopter l'hypothèse de Stokes en considérant que les contraintes visqueuses sont prédominantes [15]. Dans ce cadre, l'équation de la quantité mouvement est donnée par :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contraintes de Cauchy.

Afin de modéliser les phénomènes physiques qui se produisent au cours du FSW, il est nécessaire d'envisager une loi de comportement capable de représenter le comportement pâteux dans le voisinage de l'outil et le comportement élasto-plastique avec des distorsions infinitésimales sur les bords des tôles. Actuellement, une telle loi de comportement unifiée n'existe pas. C'est la raison pour laquelle il est fréquent d'utiliser une loi de comportement visqueuse rigide et incompressible pour modéliser l'écoulement pâteux dans le voisinage de l'outil. Cette loi peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D} \quad (2)$$

où \mathbf{S} est le tenseur déviateur des contraintes, μ est la viscosité dynamique et \mathbf{D} est le tenseur de vitesse de déformation.

La viscosité peut être définie de différentes façons. La manière la plus simple consiste à supposer que les contraintes ne présentent pas de sensibilité à la déformation à travers la loi de Norton-Hoff. Elle implique la consistance K du matériau de base ainsi que la sensibilité m de la contrainte à la vitesse de déformation :

$$\mu = K(\sqrt{3}D_{eq})^{m-1} \quad (3)$$

où $D_{eq} = \sqrt{2/3\mathbf{D}:\mathbf{D}}$ représente la déformation équivalente.

La modélisation mécanique du contact outil-matière est certainement l'un des aspects les plus complexes du modèle. La couche limite est estimée au maximum à 1 mm autour de l'outil. Différents modèles peuvent être utilisés pour traiter cette couche limite tels que le modèle de Norton, par exemple, qui ressemble beaucoup à la loi de comportement de Norton-Hoff [1] :

$$\boldsymbol{\tau} = \beta K \|\mathbf{v}_{tool} - \mathbf{v}\|^{q-1} (\mathbf{v}_{tool} - \mathbf{v}) \quad (4)$$

où β est un coefficient lié à la nature de l'interface et q la sensibilité de la contrainte tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la vitesse de glissement $\mathbf{v}_{tool} - \mathbf{v}$. \mathbf{v}_{tool} et \mathbf{v} correspondent respectivement à la vitesse locale de l'outil et celle du matériau en dehors de la couche limite.

2.2 Transferts de chaleur

Le soudage FSW n'implique aucune source de chaleur externe. Les dissipations dues au malaxage de la matière et à son frottement sur l'outil sont suffisantes pour engendrer une élévation de température

à l'échelle macroscopique, permettant ainsi de souder à l'état solide. Les transferts de chaleur sont régis par l'équation de la chaleur :

$$Q + \text{div}(\lambda \mathbf{grad} T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C \mathbf{v}_{cv} \mathbf{grad} T \quad (5)$$

où Q désigne le terme de source volumique ; λ représente la conductivité thermique ; ρ est la densité volumique ; C est la chaleur spécifique ; T est la température ; \mathbf{v}_{cv} est la vitesse de convection inhérente au formalisme eulérien.

Le problème aux dérivées partielles régissant le couplage thermomécanique consiste à juxtaposer le problème relatif à la diffusion de la chaleur avec le problème lié aux phénomènes mécaniques. Ces deux problèmes sont couplés par :

- la puissance mécanique dissipée, agissant comme un terme de source interne dans l'équation de la chaleur ;
- l'influence de la vitesse d'écoulement de la matière sur le terme de convection thermique ;
- la dépendance en température du comportement mécanique.

Le terme de source volumique Q dans l'équation de la chaleur correspondant à la puissance mécanique dissipée par unité de volume. Il peut être écrit à partir du champ de vitesse du problème mécanique de la manière suivante :

$$Q = \alpha \mathbf{S} : \mathbf{D} \quad (6)$$

où α est un coefficient variant de 0,9 à 1 qui indique la part de puissance dissipée sous forme de chaleur.

Comme les couplages thermo-mécaniques induits par la modélisation du soudage FSW sont très forts, les analyses thermiques et mécaniques doivent être réalisées simultanément.

Concernant les conditions aux limites, il est nécessaire de distinguer les différentes surfaces sur lesquelles elles doivent être définies : la zone de contact outil-matière, le support de soudage et l'interface des tôles métalliques, les côtés des tôles en contact avec l'air ambiant.

En ce qui concerne les transferts de chaleur, le flux de chaleur reçu de l'air ambiant par les tôles soudées est modélisé à partir d'un coefficient d'échange thermique H_{ext} . De même, la modélisation du contact thermique entre les tôles et le support de soudage est réalisée au moyen d'un coefficient d'échange $H_{contact}$. Pour l'interface outil-matière, la chaleur dissipée résultant du frottement de l'outil peut être écrite comme suit :

$$q_{interface} = \alpha \tau (\mathbf{v}_{tool} - \mathbf{v}) \quad (7)$$

α est également pris en compte dans cette expression lorsque la puissance mécanique n'est pas entièrement dissipée sous forme de chaleur dans la couche limite. Une partie est reçue par le matériau de base et l'autre partie est absorbée par l'outil. La partition est donnée par l'effusivité des matériaux en contact.

2.3 Intégration de l'historique du matériau

Différentes approches peuvent être utilisées pour intégrer l'historique de la matière dans un formalisme eulérien. La première consiste à intégrer les quantités physiques le long des trajectoires correspondant aux lignes de flux dans une configuration statique [2, 4]. Ce n'est pas aisé de le faire en 3D pour une analyse transitoire. Une autre approche consiste à utiliser une équation d'advection. Cette technique nécessite aucune intégration des grandeurs physiques le long des trajectoires qui passent à travers chaque point d'intégration des éléments du maillage. Supposons que les grandeurs physiques observées sont régies par une équation du type suivant :

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{F} \left(u, T, \frac{dT}{dt}, \mathbf{D}, \dots \right) \quad (8)$$

Dans le cadre du formalisme eulérien, la dérivée matériau $\frac{du}{dt}$ peut être écrite comme suit :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}_{cv} \mathbf{grad} u \quad (9)$$

qui, combinée avec l'équation (8), donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}_{cv} \mathbf{grad} u = \mathcal{F} \left(u, T, \frac{dT}{dt}, \mathbf{D}, \dots \right) \quad (10)$$

Cette expression constitue l'équation d'advection. La solution de cette équation donne la répartition de u dans l'espace à chaque pas de temps sans avoir besoin de calculer les trajectoires de la matière. Nous proposons ici d'appliquer cette formulation pour calculer la déformation équivalente ε_{eq} en résolvant :

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t} + \mathbf{v}_{cv} \mathbf{grad} \varepsilon_{eq} = D_{eq} \quad (11)$$

3 Modélisation par éléments finis

3.1 Discrétisation

Il est bien connu que le traitement numérique des équations thermiques et d'advection au moyen d'une approche de Galerkin classique ne conduit pas nécessairement à une solution stable. Pour éviter les possibles oscillations, nous avons choisi de mettre en œuvre la technique de Streamline-Upwind (SU) qui stabilise la solution pour les problèmes à convection dominante [5]. L'ensemble des équations est résolu en utilisant un élément tétraédrique P1 + / P1 détaillé dans [8], avec lequel il est très facile de créer un maillage pour des outils à géométries complexes. Avec cet élément tétraédrique, les champs discrets de pression, de température et de déformation équivalente sont linéaires et continus. L'indice « + » signifie qu'un nœud a été ajouté au centre de l'élément pour l'interpolation de la vitesse (Fig. 1).

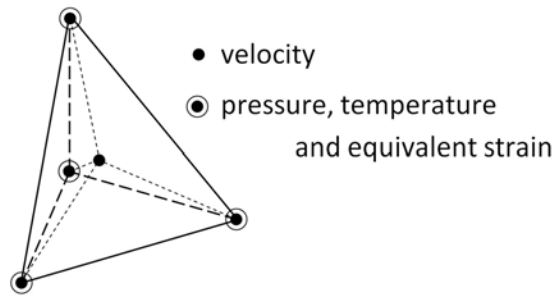


Fig. 1 – Tétraèdre de référence P1+/P1.

3.2 Stratégie de maillage mobile

Comme il est expliqué dans la section précédente, les phénomènes thermo-mécaniques sont fortement couplés. Pour résoudre ce problème, une approche échelonnée peut être utilisée là où les problèmes sont traités de façon indépendante. Mais l'importance des couplages incite à préférer une approche où les problèmes sont traités simultanément pour obtenir la distribution spatiale de la température et de la vitesse. Pour des géométries d'outils complexes, la vitesse et la température sont déterminées comme fonctions du temps à partir d'un algorithme d'Euler implicite pour calculer la dérivée temporelle de la température à chaque pas de temps [9].

Pour la discrétisation spatiale, ces champs peuvent être obtenus à chaque pas de temps à partir de la méthode éléments finis par la mise en œuvre de la technique de maillage mobile proposé par Feulvarch *et al.* [10] pour le traitement d'outils à géométries complexes. Dans cette approche, le maillage est composé de 2 parties : une première qui est fixée autour de la zone de malaxage et une seconde qui comprend le matériau de base à proximité de l'outil et se déplace avec un mouvement de rotation solide correspondant à la vitesse de rotation de l'outil. Les transferts de chaleur sont calculés sur tout le maillage, tandis que le malaxage mécanique est modélisé uniquement dans la seconde partie mobile, afin de réduire la taille du problème numérique. Malheureusement, cette approche peut conduire à des vitesses de maillage beaucoup plus grandes que la vitesse de la matière à la périphérie de la partie mobile. Pour une vitesse de rotation très élevée, la vitesse du matériau devient négligeable par rapport à celle de la maille. Dans

ces conditions, les expériences numériques montrent que la convection, qui joue un rôle très important dans le formalisme eulérien, n'est pas correctement prise en compte. Cela ne se produit pas dans la modélisation du problème thermique car la diffusion est suffisamment importante en terme de nombre de Péclet. Malheureusement, il n'y a pas de diffusion dans le problème d'advection et la convection n'est donc pas correctement calculée.

Pour éviter ce problème, une solution consiste à réduire le rayon de la partie mobile sans réduire la taille du sous-domaine dans lequel le malaxage mécanique est modélisé. Ceci impose une partition du maillage en 3 parties comme le montre la figure 2 pour un pion trigonal :

1. Ω_1 , fixe, autour de la zone de malaxage ;
2. Ω_{2a} , qui est fixe et comporte une partie de la zone de soudage ;
3. Ω_{2b} , en rotation et qui comprend le reste de la zone de soudage très proche de l'axe.

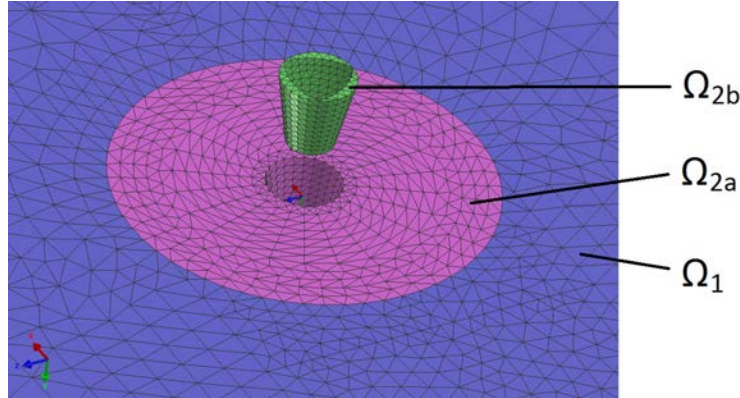


Fig. 2 – Partition du maillage.

La partie Ω_{2b} , comme le montre la figure 2 est circulaire et se déplace avec un mouvement de rotation dont la vitesse est égale à celle de l'outil. L'utilité de cette approche est qu'elle n'engendre aucune distorsion du maillage. Du point de vue de la discrétisation, le maillage global est construit de manière à ce qu'il reste consistant à chaque position angulaire de Ω_{2b} lors de sa rotation. Les connexions entre les différentes parties sont réalisées avec une technique de pénalité, comme il est détaillé dans [10]. Une attention toute particulière doit être apportée au fait que la vitesse convective \mathbf{v}_{cv} est la différence entre la vitesse du matériau \mathbf{v} et la vitesse du maillage \mathbf{v}_{mesh} dans le repère de travail lié à la vitesse de soudage. Sachant que les maillages des domaines Ω_1 et Ω_{2a} sont fixés et que le domaine Ω_{2b} tourne à la même vitesse angulaire que l'outil, nous avons :

$$\mathbf{v}_{cv} = \mathbf{v} \quad \text{in } \Omega_1 \text{ and } \Omega_{2a} \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_{cv} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad \text{in } \Omega_{2b} \quad (13)$$

où \mathbf{r} est le vecteur donnant la position relative à l'axe de rotation de l'outil supposé vertical et sans inclinaison et où $\boldsymbol{\omega}$ désigne le vecteur correspondant à la vitesse de rotation de l'outil.

4 Exemple d'application pour un pion trigonal

Pour illustrer cette nouvelle technique de maillage mobile, nous utilisons une application de soudage de tôles d'aluminium identique à celle proposée dans [10]. L'outil possède un pion trigonal et un épaulement de rayon égal à 10 mm. L'axe de l'outil est orthogonal aux faces supérieures des tôles soudées. Dans cet exemple, le maillage est constitué de 41 648 nœuds et de 231 206 éléments, et on montre qu'un rayon extérieur de 12mm pour le domaine Ω_{2a} suffit pour calculer les phénomènes mécaniques.

La figure 3 montre les distributions de température sur le plan de soudage avec une vitesse de soudage de 5 mm s^{-1} et une vitesse de rotation égale à 500 tours par minute. Comme montré dans [10], l'état périodique thermo-mécanique est atteint après 10 rotations du pion, ce qui correspond à un temps de

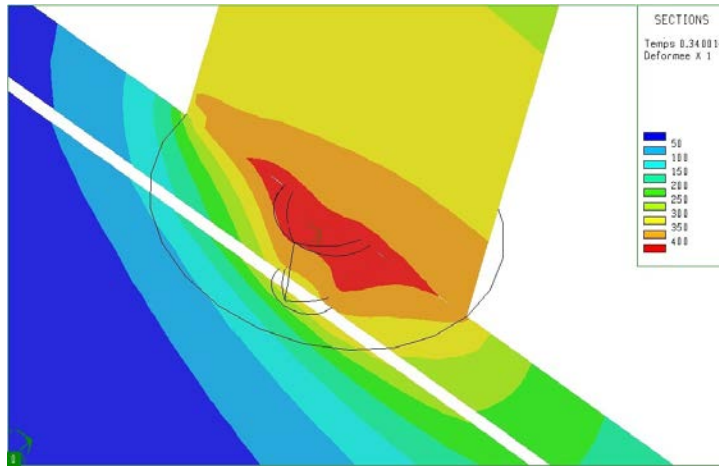


Fig. 3 – Distribution des températures dans le plan de soudage (en °C).

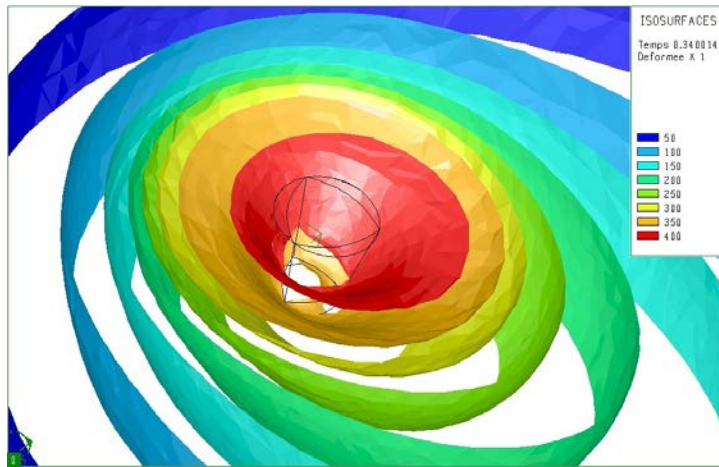


Fig. 4 – Distribution des températures dans les tôles (en °C).

calcul inférieur à 7 heures sur une base de processeur Intel(R) Core(TM) 2 Duo cadencé à 2,53 GHz avec 4 Go de mémoire.

La figure 4 montre la répartition de la température à travers l'épaisseur des tôles et la figure 5 la vitesse du matériau de base en contact avec le pion à l'interface entre l'outil et le domaine Ω_{2b} . Cette configuration de soudage conduit à une température maximale de 451 °C à l'arrière du pion. Elle est inférieure à la température de fusion de l'alliage qui est supérieure à 470 °C.

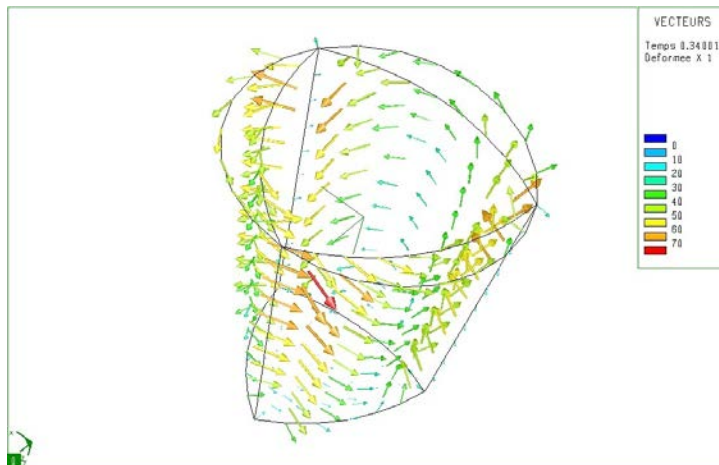


Fig. 5 – Vitesse du matériau de base en contact avec le pion (en mm s^{-1}).

La figure 6 montre la distribution des déformations équivalentes après avoir atteint l'état périodique, comme le montre la figure 7. On peut noter que l'évolution temporelle n'est pas l'évolution temporelle du matériau, mais la déformation équivalente du matériau observée en deux points situés sur la surface de l'outil. Bien que l'état périodique soit atteint après 1,2 secondes pour le problème thermo-mécanique [10], 12 secondes sont nécessaires pour atteindre l'état périodique concernant le problème d'advection. Cela correspond à 100 rotations de l'outil.

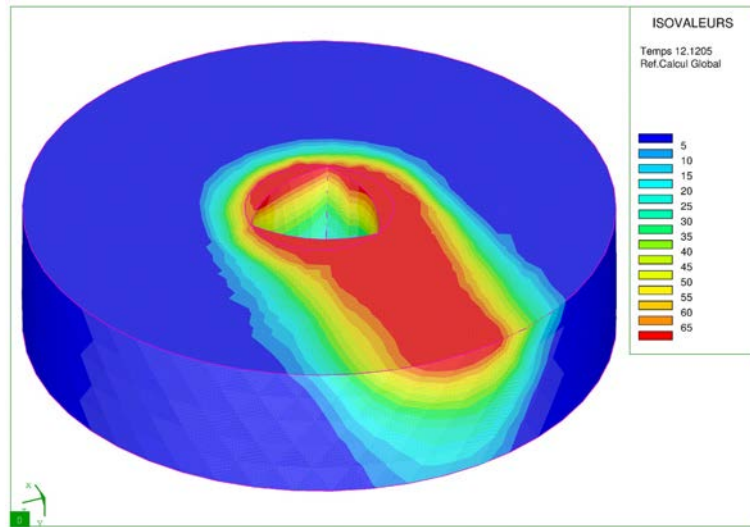


Fig. 6 – Distribution des déformations équivalentes dans Ω_{2a} et Ω_{2b} .

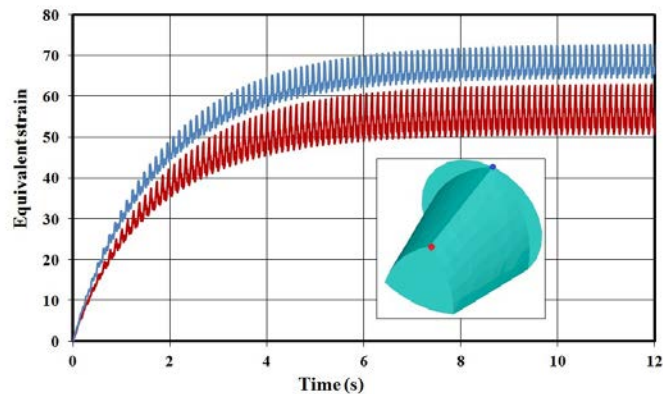


Fig. 7 – Évolution dans le temps de la déformation équivalente observée en 2 points situés sur la surface du pion.

5 Conclusion

Dans cet article, un couplage thermomécanique avec une équation d'advection est proposé afin d'intégrer l'historique du matériau dans un formalisme eulérien. Pour le traitement numérique de ce couplage, une amélioration a été proposée par rapport à la technique de maillage mobile proposée à l'origine par Feulvarch *et al.* [10], pour des géométries d'outils complexes. Les résultats sont obtenus en quelques heures et sont très satisfaisants en termes de température et de vitesse. La technique développée est capable d'intégrer les évolutions du matériau comme la déformation équivalente. D'autres quantités physiques telles que les changements de microstructure peuvent être simulées avec ce modèle de calcul en intégrant une cinétique d'évolution de la microstructure.

Références

- [1] M. Assidi, L. Fourment, S. Guerdoux, T. Nelson, *Friction model for friction stir welding process simulation : Calibrations from welding experiments*, International Journal of Machine Tools & Manufacture, vol. 50, 143-155, 2010.
- [2] A. Bastier, M.H. Maitournam, F. Roger, K. Dang Van, *Modelling of the residual state of friction stir welded plates*, Journal Material Processing Technology, vol. 200, 25-37, 2008.
- [3] A. Bastier, M.H. Maitournam, K. Dang Van, F. Roger, *Steady state thermomechanical modelling of friction stir welding*, Science and Technology of Welding and Joining, 11(3), 278-288, 2006.
- [4] J.-M. Bergheau, G. Mangialenti, F. Boitout, *Contribution of numerical simulation to the analysis of heat treatment and surface hardening processes*, Proc. of Heat Treat '98, 18th ASM Heat Treating Society Conference and Exposition, ASM International, 681-690, 1998.
- [5] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes, *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, 199-259, 1982.
- [6] P. A. Colegrove, H. R. Shercliff, *Development of Trivex friction stir welding tool - Part 1 - Two-dimensional flow modelling and experimental validation*, Science and Technology of Welding and Joining, 9(4), 345-351, 2004.
- [7] P. A. Colegrove, H. R. Shercliff, *Development of Trivex friction stir welding tool - Part 2 - Three-dimensional flow modelling*, Science and Technology of Welding and Joining, 9(4), 352-361, 2004.
- [8] E. Feulvarch, V. Robin, F. Boitout, J.M. Bergheau, *A 3D finite element modelling for thermo-fluid flow in friction stir welding*, Mathematical modelling of weld phenomena 8, edited by H. Cerjack, H.K.D.H. Bhadeshia, E. Kozeshnik, ISBN 978-3-902465-69-6, 711-724, 2007.
- [9] E. Feulvarch, J.M. Bergheau, *An implicit-fixed grid method for the finite element analysis of heat transfer involving phase changes*, Numerical Heat Transfer - Part B : Fundamentals, 51(6), 585-610, 2007.
- [10] E. Feulvarch, J.-C. Roux, J.-M. Bergheau, *A simple and robust moving mesh technique for the finite element simulation of Friction Stir Welding*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 246, 269-277, DOI 10.1016/j.cam.2012.07.013, 2013.
- [11] T. Heuzé, J.B. Leblond, J.M. Bergheau, E. Feulvarch, *A finite element for laminar flow of incompressible fluids with inertia effects and thermomechanical coupling*, European Journal of Computational Mechanics, vol. 19, 293-304, 2010.
- [12] D. Jacquin, B. de Meester, A. Simar, D. Deloison, F. Montheillet, C. Desrayaud, *A simple Eulerian thermo-mechanical modeling of friction stir welding*, Journal of Materials Processing Technology, vol. 211, 57-65, 2011.
- [13] O. Lorrain, J. Serri, V. Favier, H. Zahrouni, M. El Hadrouz, *A contribution to a critical review of FSW numerical simulation*, Journal of Mechanics of Materials and Structures, vol. 4, 351-369, 2009.
- [14] H. Schmidt, J. Hattel., *A local model for the thermomechanical conditions in friction stir welding*, Modell. Simul. Mater. Sci. Eng., vol. 13, 77-93, 2005.
- [15] H. R. Shercliff, P. A. Colegrove, *Modelling of Friction Stir Welding*, Mathematical modelling of weld phenomena, vol. 6, 927-974, 2002.
- [16] A. M Tartakovsky, G. Grant, X. Sun and M. Khaleel, *Modeling of Friction Stir Welding (FSW) Process with Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)*, SAE 2006 World Congress, Detroit, USA, 2006.
- [17] A. Timesli, B. Braikat, H. Zahrouni, A. Moufki, H. Lahmam, *Toward friction stir welding simulation using moving least square technique*, Proc of the 2nd International Conference on Friction Stir Welding and Processing FSWP'2012, ISBN 978-2911256-72-1, 119-121, 2012.
- [18] C. Tutum, J. H. Hattel, *Numerical optimisation of friction stir welding : review of future challenges*, Science and Technology of Welding and Joining, 16(4), 318-324, 2011.
- [19] G. Yoshikawa, F. Miyasaka, Y. Hirata, Y. Katayama, T. Fuse, *Development of numerical simulation model for FSW employing particle method*, Science and Technology of Welding and Joining, 17(4), 255-263, 2012.