



**HAL**  
open science

# Métamodélisation de problèmes multimodaux-application au flambement de panneaux raidis composites dans un processus MDO

Francois-Henri Leroy, François-Xavier Irisarri, Christophe Blondeau

## ► To cite this version:

Francois-Henri Leroy, François-Xavier Irisarri, Christophe Blondeau. Métamodélisation de problèmes multimodaux-application au flambement de panneaux raidis composites dans un processus MDO. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722093

**HAL Id: hal-01722093**

**<https://hal.science/hal-01722093>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Métamodélisation de problèmes multimodaux - application au flambement de panneaux raidis composites dans un processus MDO

François-Henri LEROY <sup>1</sup>\*, François-Xavier IRISARRI <sup>1</sup>, Christophe BLONDEAU <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Onera, DMSC, francois-henri.leroy@onera.fr, francois-xavier.irisarri@onera.fr

<sup>2</sup> Onera, DADS, christophe.blondeau@onera.fr

\* Auteur correspondant

**Résumé** — Nous proposons une nouvelle approche de type *compétition d'experts* pour la métamodélisation des problèmes structuraux de flambement. Les métamodèles classiques sont en difficulté face au caractère multimodal des réponses. Notre approche, basée sur la reconnaissance des modes propres, de leurs interactions et de leurs domaines de criticité, permet de simuler rapidement et finement la réponse de modèles structuraux détaillés au sein de processus d'optimisation plus globaux.

**Mots clés** — optimisation structurale, métamodélisation, flambement, reconnaissance modale

## 1. Introduction

La construction de métamodèles est aujourd'hui indispensable dans la plupart des processus d'optimisation afin de restituer avec un coût acceptable la réponse de modèles physiques de haute fidélité. Cela est d'autant plus vrai en optimisation multidisciplinaire (MDO). Notre cas applicatif concerne la prise en compte de la tenue au flambement de panneaux raidis composites (modèles détaillés par éléments finis) dans une optimisation d'avion plus globale de type aéro-structure ([1], cf. §4). Le caractère multimodal des réponses en flambement pose souvent des difficultés aux techniques de métamodélisation classiquement performantes (polynômes adaptatifs [2], kriging et autres méthodes à noyaux [3]) et le choix même de variantes adaptées aux changements de régime (bases radiales sous tension [4]) reste une solution perfectible. Nous proposons une nouvelle approche de type *compétition d'experts* s'inspirant des travaux sur la reconnaissance des modes propres en dynamique des structures (problèmes formellement équivalents au flambement).

## 2. Modélisation modale et difficultés liées aux interactions (veering)

L'estimation linéaire de la tenue au flambement en termes de *Reserve Factor (RF)* est obtenue par éléments finis en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé (Eq.1). *RF* correspond à la plus faible des valeurs propres  $\lambda_i$  et le mode associé  $V_i$  est dit critique.

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\theta) \cdot V = \lambda \cdot \mathbf{S}(\theta) \cdot V \\ RF(\theta) = \min(\lambda_i) \end{cases} \quad (1)$$

La modification des paramètres  $\theta$  du problème affecte les matrices de raideur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{S}$  et donc également les différents modes  $(V_i, \lambda_i)$  de façon généralement régulière. Par contre, la réponse  $RF(\theta)$  résulte d'une compétition entre modes (fonction *min*) et peut présenter des discontinuités  $C^1$  de changement de régime lors de permutations de mode critique (*crossing*). Cela est illustré à la figure 1 où l'on considère le flambement d'une plaque composite rectangulaire dont on modifie la stratification et donc les paramètres de rigidité  $\theta = D_{ij}$  [5]. Le modèle orthotrope de flambement utilisé dans cet exemple [6] est un modèle simplifié qui prévoit des croisements de modes linéaires.

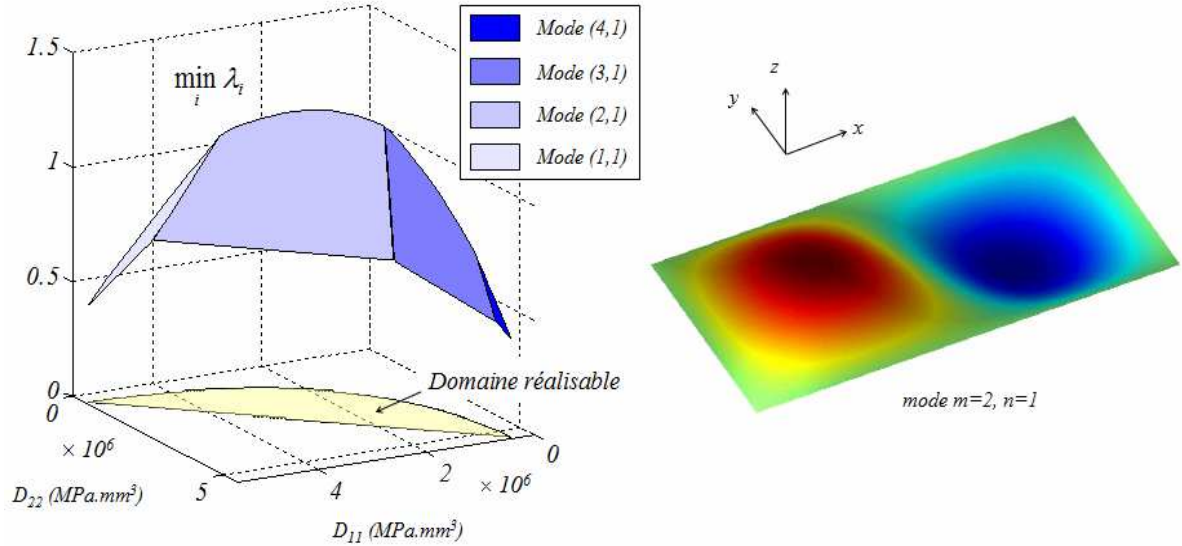


Fig. 1. Evolution multimodale simplifiée du flambement d'une plaque composite rectangulaire sujette à des modifications de stratification (cf. texte). Le croisement des modes crée des discontinuités  $C^1$ .

Une approche de type *compétition d'experts* semble particulièrement adaptée dans ce contexte tout en permettant de relâcher l'hypothèse de linéarité des réponses modales  $\lambda_i(\theta)$ . En supposant les modes  $V_i$  observables, cette approche consiste à les distinguer/séparer en identifiant leurs trajectoires individuelles  $V_i(\theta)$  par *mode tracking* [7] puis à modéliser séparément les réponses régulières  $\lambda_i(\theta)$  associées par différents métamodèles experts  $\hat{\lambda}_i(\theta)$ . La compétition entre experts  $\min \hat{\lambda}_i(\theta)$  peut alors restituer simplement et précisément l'irrégularité de la réponse en flambement.

Le suivi des modes (tracking) peut faire appel à un critère d'appariement tel que le critère MAC (*Modal Assurance Criterion* [7]). Il en existe une version non intrusive ne nécessitant que la connaissance des modes propres à comparer (vecteurs colonnes  $V_1$  et  $V_2$ ):

$$MAC(V_1, V_2) = \frac{(V_1' V_2)^2}{(V_1' V_1)(V_2' V_2)} \quad (2)$$

Un critère MAC proche de 1 caractérise une forte ressemblance (seuil classique à 0.9).

Cette approche attrayante de compétition d'experts inspirée des travaux de dynamique des structures rencontre dans la pratique plusieurs difficultés. Tout d'abord l'espace des paramètres d'entrée  $\theta$  est multidimensionnel dans nos applications structurales. Une mesure de proximité adaptée aux différentes sensibilités des paramètres doit donc être définie. Par ailleurs des interactions modales (*veering*) peuvent apparaître et provoquer des modifications rapides du mode critique et de son évolution. Des études récentes de dynamique soulignent numériquement et expérimentalement leur complexité, y compris dans des cas simples (Fig. 2). Nous avons également observé ce phénomène pour le flambement (Fig. 3). Nous pouvons montrer que la déformation continue des modes qu'il engendre autorise des chemins d'appariement aberrants (boucles) lorsque  $\theta$  est multivarié. Il est ainsi possible et fréquent de pouvoir associer de façon transitive des modes de rangs différents d'un même calcul (modes par définition différents). Un critère de détection du *veering* doit donc être formulé. Ceci n'est pas trivial [8] et nous souhaitons de plus pour des raisons pratiques que ce critère ne dépende que des sorties  $(V_i, \lambda_i)$  des codes de calcul.

On notera que l'approche de *compétition d'experts nodaux* se veut complémentaire à des approches de type *mélange d'experts* [9]. Ce type d'approche cherche également à distinguer différents modes mais uniquement parmi les modes critiques et en se basant sur la seule donnée des  $\lambda$  critiques (RF). Cela peut constituer un avantage opérationnel mais également une limitation.

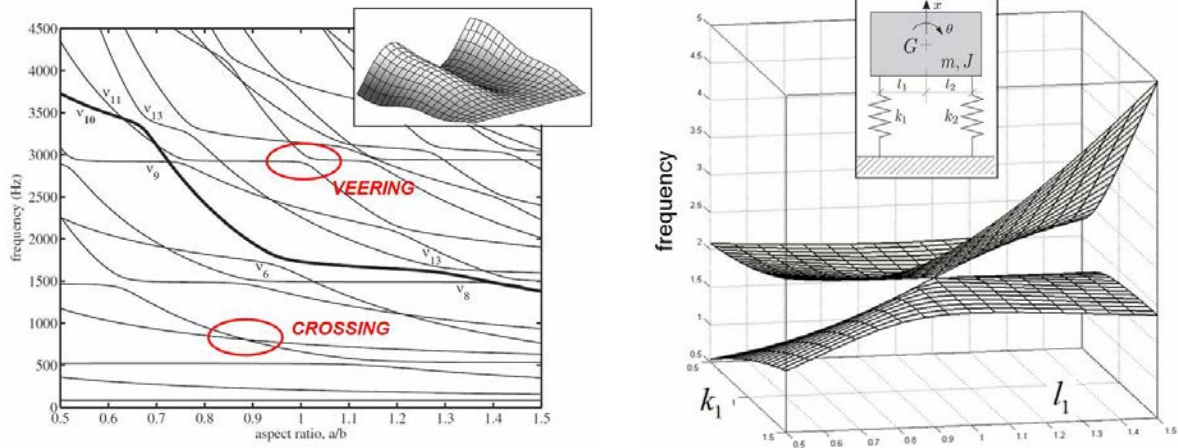


Fig. 2. A gauche: interactions entre modes dynamiques d'une plaque métallique [8]. A droite: interaction entre les deux premiers modes d'un système vibratoire simple [10].

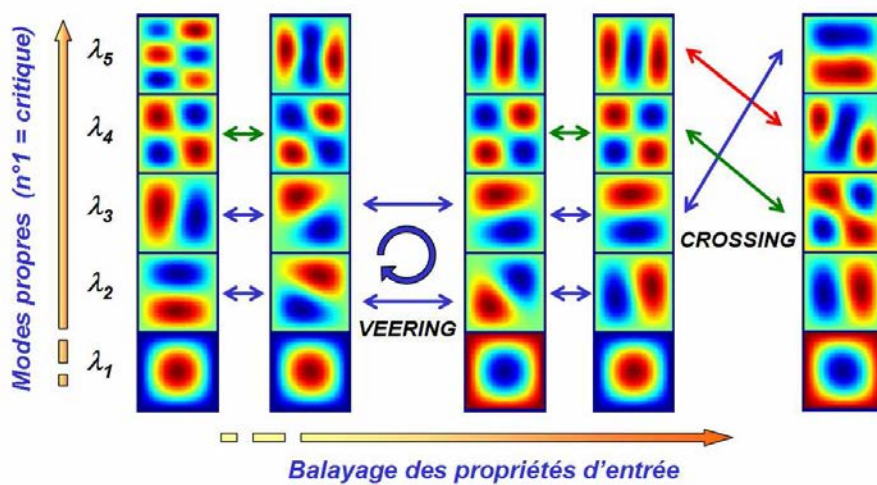


Fig. 3. Exemple schématique de suivi de mode (*mode tracking*) pour une plaque composite carrée soumise à une bi-compression et un cisaillement (modèle de type Rayleigh-Ritz). Les modifications progressives de stratification engendrent des croisements de modes (*crossing*) ou des interactions déformant les modes (*veering*).

### 3. Vers une approche adaptée de compétition d'experts nodaux

Une première adaptation des méthodes de tracking empruntées à la dynamique des structures a été réalisée. Elle concerne le suivi de mode par proche voisin et consiste à définir une notion de proximité qui puisse s'étendre au cas multivarié avec des paramètres d'entrée présentant des sensibilités différentes. Il se trouve que les métamodèles à noyaux (bases radiales, kriging, etc. [3]) reposent naturellement sur la notion de distance dans l'espace d'entrée et que l'apprentissage d'une métrique anisotrope (sensibilités différentes) est aujourd'hui une pratique courante. Nous proposons donc d'éduquer une méthode à noyau anisotrope sur l'ensemble des données critiques  $RF(\theta)$  du plan d'expériences disponible. Nous choisissons une technique robuste devant les irrégularités de la réponse  $RF(\theta)$  (technique RBFT). Le métamodèle construit n'est pas optimal, ce n'est pas le but, mais il fournit une métrique adaptée dans l'espace des  $\theta$ , de type euclidienne pondérée, qui va permettre de suivre les modes en balayant les expériences du plan par plus proches voisins.

L'appariement des modes (critère MAC) doit par ailleurs être bridé pour éviter que les combinaisons de *crossing* et *veering* ne produisent des boucles d'association aberrantes. L'approche est tout d'abord focalisée sur les modes critiques, responsables de la réponse recherchée. Ces derniers ne sont suivis que jusqu'à leur croisement avec un mode de rang supérieur afin de restituer les discontinuités de changement de modes (Fig. 4 gauche). Les suivre au-delà introduirait une complexité

inutile. On obtient à la fin de cette étape une partition de l'espace des paramètres  $\theta$ , chaque partie étant délimitée par des couples d'expériences exhibant un croisement de modes critiques, avec un léger recouvrement à ce niveau (Fig. 4 gauche).

La partition précédente est censée fournir pour chaque mode critique un domaine de criticité étendu dans lequel il est censé évoluer régulièrement (métamodèle expert  $\hat{\lambda}_i(\theta)$  aisé à construire). Or il est possible qu'un mode critique entre en interaction avec un mode supérieur sans le croiser (veering) et présente alors une évolution irrégulière (Fig. 4 droite). Un critère a été développé pour détecter ce type de comportement. Il est basé sur le fait que deux modes en interaction locale semblent opérer une rotation conjointe en restant dans le plan défini par les modes purs concernés. Cette observation est corroborée par des études plus théoriques [8]. Le critère repose sur la décomposition SVD (Singular Value Decomposition) des représentants  $V$  du mode critique étudié. On ne retient que les vecteurs de base les plus significatifs au sens de la qualité de reconstruction des modes critiques normés (erreur définie au sens du critère MAC). Deux cas de figure se présentent généralement (Fig. 5). Dans le premier, un seul vecteur de base est suffisant (Fig. 5 gauche). Le mode étudié est quasi pur sur son domaine de criticité. Dans le second cas, deux vecteurs de base au minimum sont nécessaires (Fig. 5 droite). On est en présence de veering et ces vecteurs définissent le plan de veering avec le mode supérieur couplé (ou l'hyperplan s'il y a plusieurs modes couplés). On peut enfin remarquer que dans certains cas (cf. application MDO) plusieurs zones de veering peuvent coexister de façon connexe dans un même domaine de criticité : le mode critique interagit successivement avec plusieurs modes supérieurs. Il faut dans ce cas sous-partitionner et distinguer les différentes zones de veering correspondantes en décomposant la base SVD en hyperplans. Nous utilisons pour cela une technique de réduction dimensionnelle respectant les notions angulaires (Conformal Eigenmaps [11]).

Il reste dans chaque domaine de la partition à utiliser les techniques de métamodélisation adaptées. Pour les domaines de criticité correspondant à des modes purs, on peut utiliser une technique de métamodélisation efficace en non-linéarité modérée, par exemple l'approche polynomiale adaptative ABFC [2]. Dans les domaines affectés par le veering, il est préférable d'utiliser une technique de métamodélisation robuste devant les fortes non-linéarités locales, par exemples des bases radiales sous tension (RBFT).

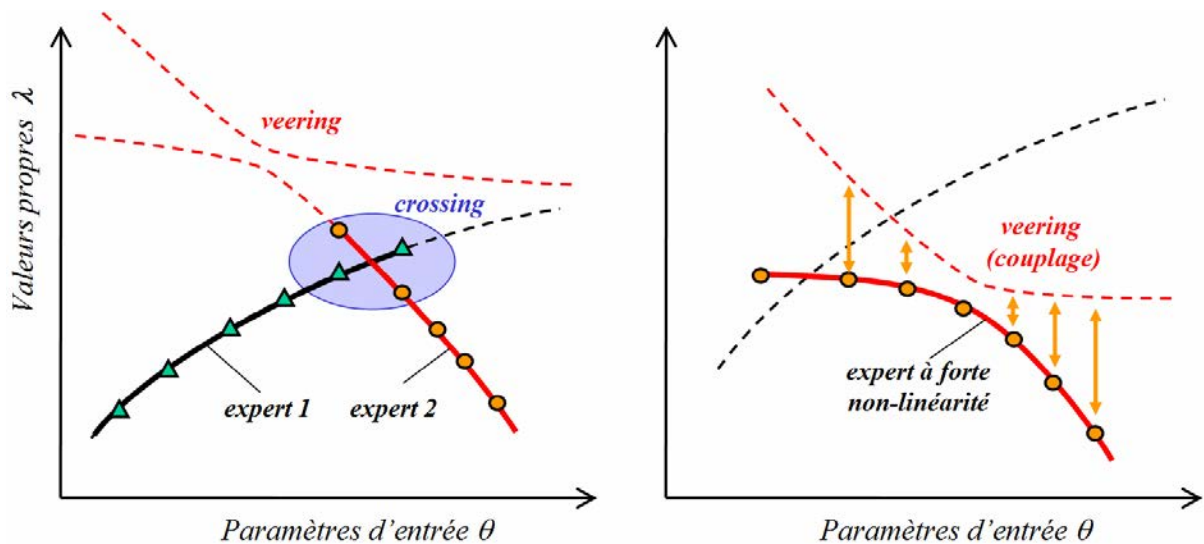


Fig. 4. Stratégie de clusterisation des modes/valeurs propres permettant d'éduquer différents métamodèles experts (cf. texte). Ces derniers sont spécialisés dans la description de portions de la réponse critique. Ils entrent en compétition au niveau des croisements de modes critiques (à gauche). Ils doivent pouvoir s'adapter à de fortes non-linéarités locales lorsque du couplage de mode est détecté (à droite).



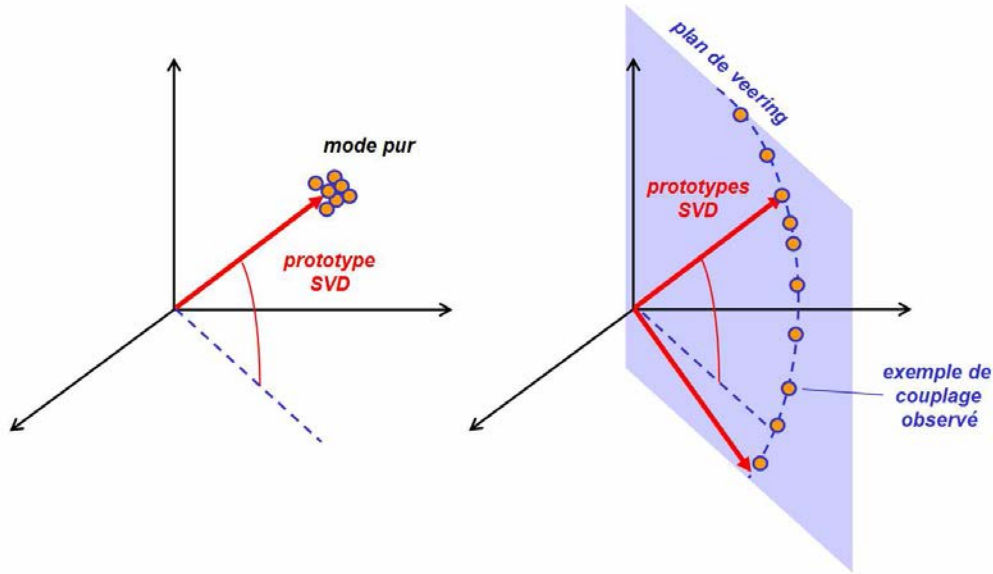


Fig. 5. Illustration schématique de la phase de détection du veering par réduction dimensionnelle (SVD). Chaque point/vecteur représente un mode propre (dimension élevée correspondant au nombre de degrés de liberté du maillage éléments finis). La dimension caractéristique d'un groupe de modes critiques associés par critère MAC indique un mode découplé (dimension 1, à gauche) ou couplé (dimension 2, à droite).

## 4. Applications

### 4.1 Flambement d'une plaque composite

L'approche a tout d'abord été mise au point et validée sur un cas-test de flambement académique présentant l'ensemble des difficultés identifiées. Il s'agit de la tenue au flambement d'une plaque plane rectangulaire (longueur  $a$ , largeur  $b$ ) simplement appuyée sur ses quatre bords et soumise à un chargement de bi-compression et de cisaillement  $(N_x, N_y, N_{xy})$ . Il s'agit de calculer le facteur de charge critique  $RF$  tel que le chargement  $RF \times (N_x, N_y, N_{xy})_i$  déclenche le flambement.

Afin d'être représentatif d'une application composite structurale, on considère une plaque constituée d'un stratifié de 30 plis unidirectionnels (fibres longues) symétrique et équilibré. Les propriétés du pli choisies sont typiques d'une fibre de carbone de type T700 et d'une matrice polymère de type M21:  $E_1 = 112$  GPa,  $E_2 = 8.2$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = 4.5$  GPa, épaisseur 0.26 mm. La plaque peut être considérée comme mince (dimensions  $\geq 1000$ mm). On considère 2000 stratifications différentes et les variations qu'elles engendrent sur les termes D11, D22, D16 et D26 de la matrice de rigidité ABD. Seuls ces 4 paramètres sont influents pour le problème de flambement qui nous intéresse (flambement linéaire, comportements découplés de membrane et de flexion). La modélisation du problème est réalisée par la méthode semi-analytique de Rayleigh-Ritz qui fournit des modes propres détaillés comparables dans leur complexité à des résultats de calculs par éléments finis.

Plusieurs exemples caractéristiques ont été traités. Nous considérons ici le cas d'une plaque carrée soumise à un chargement principal de compression et à des chargements secondaires plus faibles (cisaillement notamment) introduisant une dissymétrie et favorisant donc l'apparition de veering. Pour démontrer l'efficacité de l'approche proposée, seuls 50 exemples d'apprentissage sont considérés parmi les 2000 calculés. Les autres sont utilisés pour estimer l'erreur de validation. L'analyse détecte deux types de modes critiques (partition en deux groupes). On ne détecte pas de veering à leurs niveaux bien que ce soit le cas entre certains modes de rangs supérieurs. Des experts polynomiaux ABFC sont donc suffisants. Les résultats (Fig. 6) sont très satisfaisants comparés à ceux que l'on obtient en utilisant un seul métamodèle (type ABFC ou RBFT) pour décrire l'ensemble de la réponse. On notera également que l'augmentation du nombre d'exemples d'apprentissage ne permet pas de converger avec les modèles globaux qui s'adaptent mal aux zones singulières de crossing qui se trouvent enrichies.

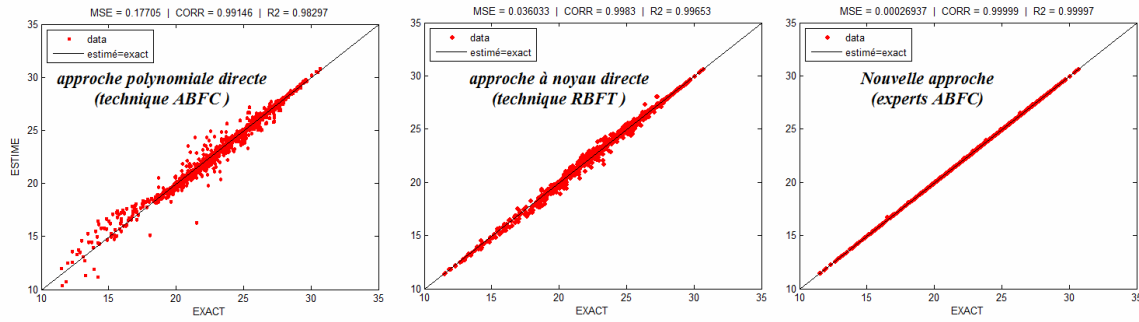


Fig. 6. Résultats obtenus par plusieurs techniques de métamodélisation pour une plaque carrée ( $a = b = 1000$  mm) soumise à un chargement  $N_x = -3$ ,  $N_y = -0.1$  et  $N_{xy} = 0.15$ . On compare les prévisions aux résultats exacts obtenus pour 1950 jeux de variables d'entrée jamais utilisés pour l'apprentissage (50 exemples d'apprentissage).

## 4.2 Flambement d'un panneau raidi (MDO)

L'approche proposée a été appliquée dans le cadre de l'optimisation multidisciplinaire menée dans le projet ARTEMIS (Advanced R&T Enablers for Multidisciplinary Integrated Systems) financé par la DGAC [1]. Le modèle d'avion global fourni par Airbus (XRF1, Fig. 7) est traité sous NASTRAN. Il doit faire appel durant l'optimisation à des estimations fines des RF de flambement de panneaux d'extrados de voilure réalisés en composites stratifiés carbone/époxy de type T800/M21. Ces estimations nécessitent des modèles de panneaux détaillés (réalisés en l'occurrence sous SAMCEF). Leur coût de calcul les rend inutilisables en l'état pour la MDO et l'objectif est de leur substituer des métamodèles *métier*.

Pour un panneau donné, les paramètres d'entrée  $\theta$  du métamodèle à construire comprennent la variable d'optimisation  $x$ , qui régit l'épaisseur globale des peaux composites, ainsi que deux variables de chargement  $z_{1,2}$  déterminées par réduction dimensionnelle des conditions aux limites de déplacement imposées à ce panneau par le reste de la voilure (analyse des itérations d'une première optimisation grossière). Pour la démonstration de faisabilité nous avons choisi un panneau clé et réalisé un plan de 200 expériences virtuelles dans l'espace conjoint  $(x, z_1, z_2)$  avec calculs détaillés des *RF* associés mais également des 4 premiers modes/valeurs propres  $(V_i, \lambda_i)$ .

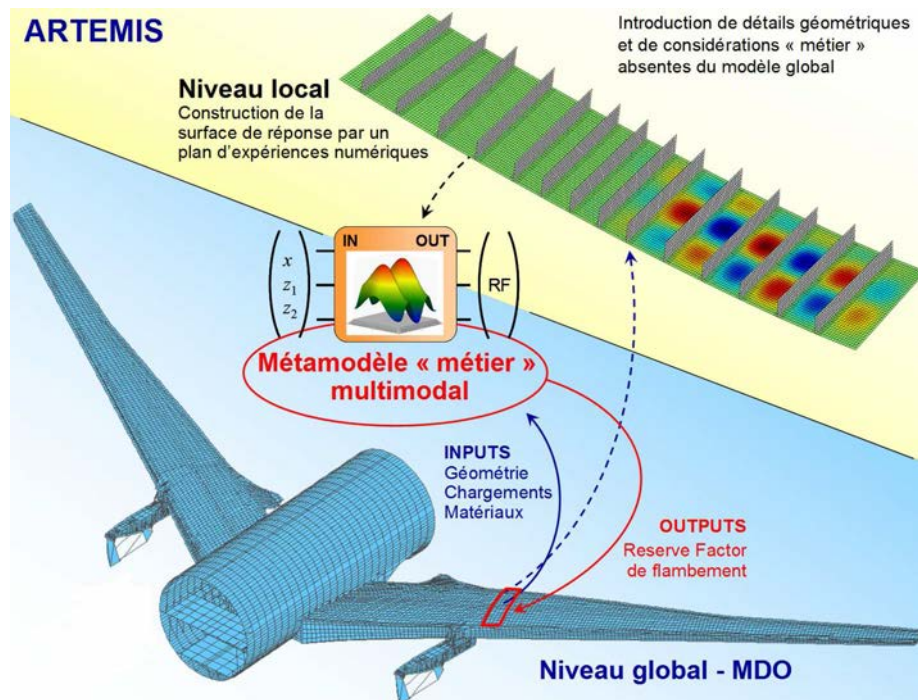


Fig. 7. Exemple d'application en optimisation multidisciplinaire [1].

La méthode d'analyse proposée conduit à un partitionnement de l'espace des paramètres d'entrée en 4 zones distinctes  $A_i$  (Fig. 8 droite). On observe tout d'abord un croisement de modes critiques à la frontière des zones A1 et A2. Puis on détecte plusieurs sous-zones connexes (A2-4) dans lesquelles ont lieu des interactions du mode critique avec un mode d'ordre supérieur différent. Les plans de veering des zones A2 et A3 sont séparés par un angle de  $68^\circ$ , A3 et A4 par  $81^\circ$ . Cela montre bien l'indépendance des différentes phases de veering. On observe donc de nombreuses évolutions du mode critique. Cela s'explique par le fait que les raidisseurs favorisent les modifications mineures de modes. Ils isolent les différentes mailles en autorisant des modifications relativement indépendantes de mode local (Fig. 8 gauche).

Il s'avère que les différents veerings sont relativement progressifs et qu'il n'est pas nécessaire de recourir à des experts robustes de type RBFT. Des experts polynomiaux ABFC suffisent à obtenir d'excellents résultats avec 110 exemples d'apprentissage. On obtient des erreurs relatives inférieures à 0.5% sur les 90 exemples restants de validation. La difficulté de l'exemple traité est au final faible car la juxtaposition de zones de veering aux caractères progressifs donne à la surface de réponse globale un comportement régulier. On peut le constater à la figure 9 qui illustre l'influence des différents paramètres. L'influence de l'épaisseur  $x$  (à gauche) explique l'essentiel de la réponse et de façon modérément non-linéaire (un seul changement de régime se manifeste clairement vers  $x = 1.15$ ). L'influence du chargement ( $z_1, z_2$ ) est par ailleurs quasi linéaire.

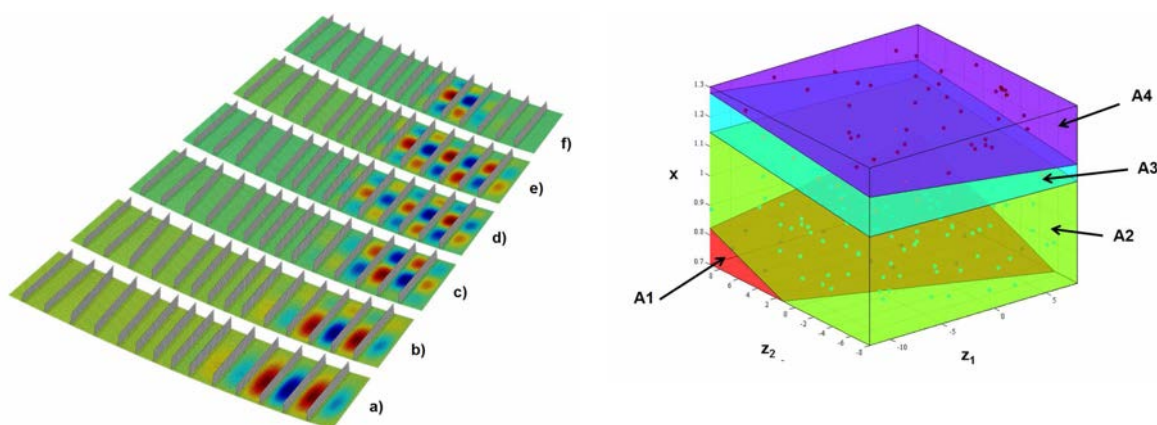


Fig. 8. A gauche: exemples de modes critiques. A droite: partition du domaine paramétrique d'entrée par analyse des modes. Le mode critique évolue entre les modes a) et b) dans la zone A1 (veering), autour du mode c) inversé dans la zone A2, entre les modes c) et d) dans A3 (veering) et entre les modes e) et f) dans A4 (veering).

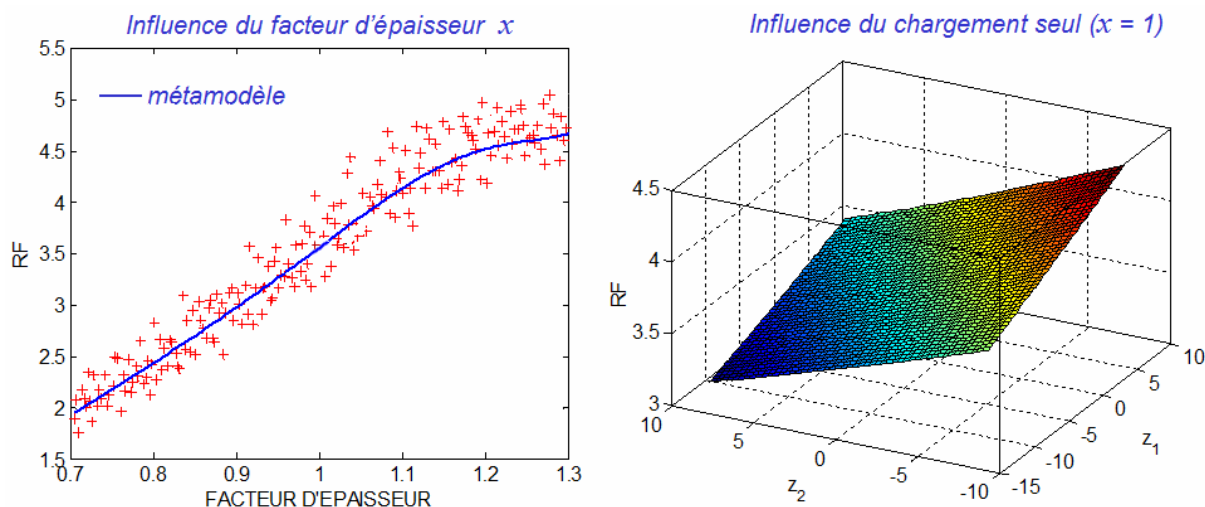


Fig. 9. Visualisation de l'influence des différents paramètres d'entrée. A gauche: on représente la part d'évolution expliquée par le seul paramètre d'épaisseur  $x$  (prépondérant). A droite: influence des paramètres de chargement à épaisseur fixée.



## 5. Conclusions et perspectives

Nous proposons une approche de métamodélisation permettant de mieux décrire les réponses des modèles de flambement dont l'irrégularité résulte de compétitions et d'interactions entre modes. Cette approche repose sur la partition du domaine des paramètres d'entrée en zones de modes critiques purs ou couplés (veering). Chaque zone donne lieu à la construction d'un métamodèle expert adapté à son type. Les différentes zones se recouvrent sur leurs frontières de façon à bien décrire les compétitions entre modes/experts qui engendrent à ce niveau les discontinuités  $C^1$  (crossing) si difficiles à capturer par des métamodèles globaux classiques.

Notre approche exploite la richesse des données fournies par certains codes de calcul qui précisent non seulement la réponse critique en flambement (plus faible valeur propre) mais également les modes propres associés et l'ensemble de ces données aux rangs supérieurs. La similarité formelle avec les problèmes rencontrés en dynamique (GEV) nous a orientés vers l'utilisation d'outils de *mode tracking* développés dans ce domaine. Ces techniques rencontrent toutefois des problèmes fondamentaux dans un contexte multiparamétrique et en présence de veering. Ceci est encore peu traité dans la littérature et nous proposons des adaptations permettant d'obtenir une première approche fonctionnelle.

Les premières applications sont encourageantes. L'application de plus grande ampleur concernant le flambement de panneaux raidis composites dans un processus MDO [1] s'est pour l'instant révélée la moins exigeante. Des analyses de configurations de panneaux plus délicates à traiter sont prévues.

Des travaux sont en cours pour comparer et éventuellement fusionner notre approche à celle de *mélange d'experts* proposée par ailleurs [9]. Cette dernière pourrait notamment être utilisée de façon locale dans les zones de veering en remplacement de la technique à noyau RBFT. D'autres types de métamodèles sont également en cours d'étude pour ces zones potentiellement très non-linéaires.

## Références

- [1] C. Blondeau, F.X. Irisarri, F.H. Leroy, I. Salah El Din, A Bi-Level High Fidelity Aero-Structural Integrated Design Methodology - A Focus on the Structural Sizing Process, RAeS 3rd Aircraft Structural Design Conference, Delft, The Netherlands, 2012.
- [2] G. Jekabsons, Ensembling Adaptively Constructed Polynomial Regression Models, World Academy of Science, Engineering and Technology, V.38, 162-167, 2008
- [3] G.E. Fasshauer, Positive Definite Kernels: Past, Present and Future, Dolomites Research Notes on Approximation, V.4, 21-63, 2011
- [4] A. Bouhamidi, Pseudo-differential operator associated to the radial basis functions under tension, ESAIM: Proceedings, Vol. 20, 2007.
- [5] F.H. Leroy, F.X. Irisarri, F. Laurin, Dimensionnement et justification des structures composites: vers une optimisation des campagnes de simulation, 9ème Colloque National en calcul des structures, Giens, 2009.
- [6] A. Rama Mohan Rao, N.A. Arvind, Scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites. Composite Structures, V.70, 383-402, 2005.
- [7] R.J. Allemang, The modal assurance criterion: Twenty years of use and abuse, S.V. Sound and Vibration, V.37(8), 14-23, 2003.
- [8] J.L. du Bois, On the quantification of Eigenvalue Curve Veering: A Veering Index. J. of Applied Mechanics, V.78(4), 2011.
- [9] D. Bettebghor, N.Bartoli,S.Grihon,J.Morlier,M.Samuelides, Surrogate modeling approximation using a mixture of experts based on EM joint estimation, Struct. and Multidisciplinary Optim,V.43(2), 243-259, 2010
- [10] A.Gallina,L.Pichler,T.Uhl, Enhanced metamodelling technique for analysis of mode crossing, mode veering and mode coalescence in structural dynamics, Mech. Syst. and Signal Process., V.25(7), 2297-2312, 2011.
- [11] F. Sha, L.K. Saul, Analysis and extension of spectral methods for nonlinear dimensionality reduction. In Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning, 785–792, 2005.