



**HAL**  
open science

## Identification paramétrique de modèles à échelles de temps multiples

Guillaume Puel, Denis Aubry

► **To cite this version:**

Guillaume Puel, Denis Aubry. Identification paramétrique de modèles à échelles de temps multiples. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722088

**HAL Id: hal-01722088**

**<https://hal.science/hal-01722088>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## Identification paramétrique de modèles à échelles de temps multiples

Guillaume PUEL<sup>1</sup>, Denis AUBRY<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire MSSMat (Ecole Centrale Paris/CNRS UMR8579), {guillaume.puel,denis.aubry}@ecp.fr

**Résumé** — L'objet de cette communication est l'étude de modèles multiéchelles en temps, et de leur identification paramétrique. Lorsque les échelles de temps considérées sont bien séparées, et que les chargements appliqués sont périodiques, il est possible d'utiliser une méthode d'homogénéisation périodique en temps pour obtenir un modèle homogénéisé. L'identification paramétrique de ce dernier nécessite alors un certain nombre d'adaptations spécifiques décrites ici sur un exemple académique.

**Mots clés** — multiéchelles en temps, homogénéisation périodique, identification, problème inverse

### 1 Introduction

Lorsque l'on entreprend la résolution numérique de problèmes d'évolution dans le domaine temporel, on peut être rapidement confronté à la question du coût de calcul et de comment le réduire efficacement. Ceci est d'autant plus recherché lorsque le problème considéré présente des phénomènes très rapides qui nécessitent de considérer un pas de temps très petit par rapport à la durée de l'étude. Cependant, lorsque les échelles de temps dans le problème traité sont bien séparées, et que les chargements appliqués sont périodiques, il peut être envisageable d'utiliser une méthode d'homogénéisation périodique en temps [6]. Le modèle homogénéisé ainsi obtenu est alors moins coûteux à résoudre numériquement, car il peut être calculé à l'échelle de temps la plus lente seulement, même si les échelles plus rapides sont prises en compte de manière spécifique lors de la résolution.

Pour qu'ils puissent être prédictifs, de tels modèles homogénéisés doivent être confrontés à des données expérimentales. La question se pose alors de savoir comment utiliser ces données pour identifier les paramètres de ces modèles. L'objectif de cette étude est d'analyser, sur un exemple académique, l'influence de différents choix constituant la procédure d'identification sur les résultats obtenus.

### 2 Homogénéisation périodique en temps

La méthode d'homogénéisation périodique en temps, telle qu'elle a été initialement proposée dans [6], s'inspire des méthodes classiques d'homogénéisation périodique en espace, comme celles développées dans [12]. Elle consiste à séparer deux échelles de temps  $t$  et  $\tau = t/\xi$  en introduisant, dans les équations du problème initial, un développement asymptotique en puissances de  $\xi$  de chaque variable du problème :

$$\alpha(t, \tau) = \alpha_0(t, \tau) + \xi \alpha_1(t, \tau) + \xi^2 \alpha_2(t, \tau) + O(\xi^3) \quad (1)$$

Dans le cas où le rapport  $\xi$  est petit, il est possible de considérer que les deux échelles de temps sont indépendantes, et que toute dérivation temporelle fait alors intervenir les deux dérivées partielles par rapport aux deux variables de temps.

$$d_t \alpha = \partial_t \alpha + \frac{1}{\xi} \partial_\tau \alpha \quad (2)$$

où  $d_t$ ,  $\partial_t$ , et  $\partial_\tau$  désignent respectivement la dérivation totale par rapport au temps, la dérivation partielle par rapport au temps lent, et la dérivation partielle par rapport au temps rapide. Si, de plus, le chargement associé à l'échelle de temps rapide est périodique, il est raisonnable de supposer que chaque variable du problème est quasipériodique, c'est-à-dire périodique par rapport à la variable rapide  $\tau$ .

Après introduction des développements asymptotiques (1) dans les équations du problème, et écriture de l'égalité des différents ordres de  $\xi$ , les équations homogénéisées sont déterminées en prenant la

moyenne sur une période rapide des différentes expressions obtenues, calculée comme :

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \alpha(t, \tau) d\tau \quad (3)$$

où  $T_f$  est la période associée à la variable de temps rapide  $\tau$ . Le résidu associé à cette opération est noté  $\alpha^* = \alpha - \langle \alpha \rangle$ , et dépend des deux échelles  $t$  et  $\tau$  *a priori*. Au final, ces équations homogénéisées sont seulement résolues à l'échelle de temps lente, en introduisant l'effet moyenné des cycles à haute fréquence dans les équations vérifiées par les quantités homogénéisées à l'ordre zéro.

Cette méthode a été détaillée récemment pour différents modèles et cadres d'étude, pour des simulations du comportement de structures soumises à des chargements de fatigue biharmoniques :

- prise en compte d'une loi viscoplastique à deux écrouissements de type Lemaître-Chaboche dans [1] ;
- prise en compte d'une loi d'endommagement isotrope dans [5] ;
- extension du problème au cas dynamique (prise en compte des effets d'inertie) dans [2] ;
- extension de la méthode à trois échelles de temps dans [11].

Elle avait auparavant été reprise par d'autres auteurs, notamment dans le cas de la réponse de matériaux viscoélastiques [14], ou pour le comportement vibratoire de poutres soumises à des précontraintes harmoniques [13].

### 3 Identification paramétrique

Indépendamment des modèles homogénéisés décrits dans le paragraphe précédent, la démarche d'identification proposée est exposée ici dans sa forme générale. Le problème direct traité est décrit sous forme implicite en introduisant une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  sur un intervalle de temps fixé  $[0; T]$  :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(t), d_t \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0; T] \quad (4a)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{Y}_0 \quad (4b)$$

où  $d_t$  désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ .  $\mathbf{u}$  est le vecteur d'état, de taille  $N$ , et contient l'évolution au cours du temps des  $N$  degrés de liberté (DDL) du système étudié. Le vecteur  $\mathbf{p}$  quant à lui désigne le vecteur des  $P$  paramètres scalaires du modèle décrit par l'équation différentielle proposée.

Le problème d'identification revient alors à déterminer le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_{opt}$  tel que la solution  $\mathbf{u}(t; \mathbf{p}_{opt})$  de l'équation d'état (4) obtenue avec ce jeu de paramètres soit la plus proche possible des données expérimentales disponibles. Celles-ci sont alors comparées aux grandeurs correspondantes  $\mathbf{A}\mathbf{u}(t; \mathbf{p})$  calculées avec le modèle direct (4), où  $\mathbf{A}$  est un opérateur de projection qui permet de sélectionner pour chaque grandeur le DDL le plus proche du point de mesure expérimental. Pour rendre les notations plus cohérentes, on propose de noter  $\mathbf{A}\mathbf{u}_{exp}(t)$  la grandeur expérimentale correspondante. Cette notation ne laisse bien sûr rien présager de la connaissance de l'intégralité de  $\mathbf{u}_{exp}$ .

On introduit alors la fonction coût suivante, qui est une norme de l'écart entre les grandeurs calculées avec le modèle direct (4) et les grandeurs expérimentalement mesurées :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_0^T |\mathbf{A}(\mathbf{u}(t; \mathbf{p}) - \mathbf{u}_{exp}(t))|^2 dt + \frac{1}{2} |\mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)|^2 \quad (5)$$

où  $\mathbf{u}(t; \mathbf{p})$  vérifie l'équation d'état (4). Le terme proposé ici pour la fonction coût  $\mathcal{J}(\mathbf{p})$  est de type moindres carrés avec régularisation, dite de Tikhonov : celle-ci permet d'atténuer le caractère mal posé du problème d'identification en limitant l'amplitude du vecteur  $\mathbf{p}$  des paramètres identifiés ; elle fait intervenir un vecteur  $\mathbf{p}_0$  de valeurs nominales, qui peuvent être proposées grâce à une certaine connaissance *a priori* des paramètres recherchés, et une matrice diagonale  $\mathbf{R}$  dont les termes, à fixer, permettent de modifier le poids de la régularisation associée à chaque paramètre. Au final, la solution du problème d'identification est alors le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_{opt}$  qui minimise cette fonction coût :

$$\mathbf{p}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{p}} \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad (6)$$

Pour trouver ce minimum, nous avons choisi ici de nous concentrer sur des méthodes de type descente de gradient, où ce dernier est estimé à l'aide de la résolution d'un problème d'état adjoint. Un exemple

typique de son utilisation pour un problème inverse dans le domaine de la mécanique est notamment proposé dans [4] dans le cas de l'identification de paramètres matériau élastoplastiques à partir d'essais d'indentation. Ici, la forme générique du problème d'état adjoint est la suivante :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z} - d_t (\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{exp}) \quad \forall t \in [0; T] \quad (7a)$$

$$(\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z})|_{t=T} = \mathbf{0} \quad (7b)$$

où les termes  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$  et  $\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}$  désignent les dérivées directionnelles de  $\mathcal{F}$ , respectivement par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $d_t \mathbf{u}$ . Le problème adjoint est donc régi par une équation différentielle rétrograde en temps, faisant intervenir les sensibilités à l'ordre un du problème direct, et où une condition finale est imposée à  $\mathbf{z}$ .

Une fois le problème adjoint (7) résolu, on peut montrer que le gradient de la fonction coût vis-à-vis de  $\mathbf{p}$  est donné par :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \mathbf{R}^T \mathbf{R} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \int_0^T \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}(t) dt \quad (8)$$

Du point de vue du coût de calcul, il est intéressant de noter la comparaison que l'on peut effectuer avec le cas où l'on évaluerait le gradient de la fonction coût par différences finies. Dans ce dernier cas, lorsque le vecteur de paramètres est de dimension  $P$ , le calcul du gradient passe par l'estimation de la fonction coût en  $P$  « points » supplémentaires, qui correspondent à la perturbation selon chacune des  $P$  composantes du vecteur de paramètres initial. Le coût final s'élève alors à  $P + 1$  résolutions du problème direct (4) et à  $P$  estimations d'intégrales temporelles par gradient estimé. Par contre, lorsque l'on utilise l'estimation à l'aide de l'état adjoint, il n'y a plus que 2 résolutions d'équations différentielles à effectuer : celle du problème direct (4) et celle du problème adjoint (7). À ces deux résolutions s'ajoutent  $P$  estimations d'intégrales correspondant à l'expression (8) du gradient. Le gain est donc d'autant plus appréciable qu'il y a de paramètres à identifier. En outre, il est plus facile de contrôler la précision de l'estimation du gradient avec la méthode de l'état adjoint qu'avec les formules de différences finies, pour lesquelles les choix de la formule et du pas de discrétisation influent sur le résultat.

## 4 Identification d'un modèle à deux échelles de temps

On considère ici un exemple académique qui permettra de préciser les différentes étapes de l'identification paramétrique d'un modèle homogénéisé. Il s'agit d'une barre rectiligne de longueur  $L$  soumise à une force normale biharmonique à l'une de ses extrémités. Le déplacement de cette dernière est alors mesuré pour permettre la détermination des valeurs des paramètres matériau de la barre, dont le comportement est élastique viscoplastique.

### 4.1 Problème de référence

L'équation d'équilibre quasistatique de la barre est scalaire, et fait intervenir à chaque instant  $t \in [0; T]$  la contrainte normale  $\sigma(x, t)$  en tout point  $x \in [0; L]$  :

$$\partial_x \sigma = 0 \quad (9)$$

où  $\partial_x$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $x$ . On a considéré ici qu'il n'y avait pas d'effort réparti le long de la barre. Tandis que la barre est encadrée en  $x = 0$ , le chargement biharmonique  $f_s(t)$  est imposé de manière surfacique sur la section d'abscisse  $x = L$ . On en déduit donc que :

$$\sigma(x, t) = f_s(t) \quad \forall x \in [0; L] \quad \forall t \in [0; T] \quad (10)$$

La relation de comportement permet de relier la contrainte normale au déplacement longitudinal  $u(x, t)$  le long de la barre :

$$\sigma = E (\partial_x u - \varepsilon^p) \quad (11)$$

où  $E$  est le module de Young, et  $\varepsilon^p(x, t)$  désigne la déformation plastique longitudinale. Celle-ci vérifie une loi d'évolution viscoplastique de type Norton :

$$d_t \varepsilon^p = \left( \frac{|\sigma|}{K} \right)^n \quad (12)$$

avec  $\varepsilon^p(x, 0) = 0 \forall x \in [0; L]$ .  $K$  et  $n$  sont deux paramètres constants.

Puisque la contrainte  $\sigma$  est homogène, la déformation plastique  $\varepsilon^p$ , et donc la déformation totale  $\partial_x u$ , le sont également. Le problème direct revient donc à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$d_t \partial_x u = \frac{d_t \sigma}{E} + d_t \varepsilon^p \quad (13)$$

Au final, le déplacement en  $x = L$ , quantité qui sera comparée avec les données expérimentales, doit donc vérifier :

$$\frac{d_t u(L, t)}{L} = \frac{d_t f_s(t)}{E} + \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \quad \forall t \in [0; T] \quad (14a)$$

$$u(L, 0) = 0 \quad (14b)$$

## 4.2 Problème homogénéisé

Le chargement auquel est soumise la barre est typique d'une sollicitation de fatigue à cycles combinés (CCF), où les deux fréquences considérées sont très différentes l'une de l'autre ( $F = 0.05\text{Hz}$  et  $F/\xi = 500\text{Hz}$ ) :

$$f_s(t, \tau) = \langle f_s \rangle (t) + f_s^*(\tau) \quad (15)$$

où  $\langle f_s \rangle (t) = f_0 + f_1 \cos 2\pi F t$  et  $f_s^*(\tau) = f_2 \cos 2\pi F \tau$ , avec  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  des constantes données telles que  $f_s(0, 0) = 0$ .

L'équation du problème homogénéisé d'ordre zéro vient de l'expression à l'ordre zéro du problème direct (14), après calcul de la moyenne par rapport à la variable de temps rapide :

$$\frac{\partial_t \langle u_0 \rangle (L, t)}{L} = \frac{\partial_t \langle f_s \rangle (t)}{E} + \left\langle \left( \frac{|f_s(t, \tau)|}{K} \right)^n \right\rangle \quad \forall t \in [0; T] \quad (16a)$$

$$\langle u_0 \rangle (L, 0) = \frac{\langle f_s \rangle (0)L}{E} \quad (16b)$$

Le terme associé à l'équation d'évolution peut être estimé à l'aide d'une formule de quadrature, comme par exemple une loi des trapèzes avec  $M + 1$  points :

$$\left\langle \left( \frac{|f_s(t, \tau)|}{K} \right)^n \right\rangle = \sum_{k=0}^M w_k \left( \frac{|\langle f_s \rangle (t) + f_s^*(\frac{k\xi}{MF})|}{K} \right)^n \quad (17)$$

où  $w_0 = 1/2M$ ,  $w_{0 < k < M} = 1/M$ ,  $w_M = 1/2M$ .

Au final, le déplacement en  $x = L$  peut être reconstruit en ajoutant au déplacement homogénéisé d'ordre zéro le résidu associé  $u_0^*(L, \tau)$ , solution d'un problème de traction élastique, en remplaçant la variable de temps rapide par son expression  $\tau = t/\xi$  :

$$u(L, t) = \langle u_0 \rangle (L, t) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} \quad \forall t \in [0; T] \quad (18)$$

Par rapport au problème de référence, dont la résolution nécessite des pas de temps de  $10^{-4}\text{s}$  (en considérant qu'il faut 20 pas de temps pour bien représenter une période rapide), des pas de temps de 0.01s sont suffisants pour obtenir une estimation du déplacement parfaitement équivalent à celui de référence. Il devient donc possible de résoudre de tels problèmes d'évolution en fatigue CCF pour des intervalles de temps très longs, alors que la résolution du problème de référence ne serait pas atteignable. Plus de détails et de résultats sont donnés à ce sujet dans [11] pour cet exemple académique, dans le cas d'une loi d'évolution plus complexe (loi viscoplastique à deux écrouissages de type Lemaître-Chaboche [8]).

## 4.3 Formulation du problème d'identification

Le problème d'identification associé a pour but d'être capable de déterminer les paramètres  $E$ ,  $K$  et  $n$  des lois de comportement matériau, à l'aide de mesures effectuées sur des intervalles de temps très longs : en effet, dans le cas de la fatigue CCF, il faut généralement solliciter la structure avec un très grand nombre de cycles avant de pouvoir mesurer une évolution notable de la réponse. Nous allons étudier ici l'influence du choix de la fonction coût sur les résultats de l'identification.

### 4.3.1 Fonction coût sur les quantités homogénéisées

Le premier choix possible de fonction coût consiste à reprendre l'expression (5) proposée plus haut, et à l'adapter pour des quantités homogénéisées. On considère ici que c'est le déplacement  $u_{exp}(t)$  en bout de barre ( $x = L$ ) qui peut être mesuré :

$$\mathcal{J}_1(E, K, n) = \frac{1}{2} \int_0^T | \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t) |^2 dt + \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2 \quad (19)$$

$\langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n)$  est la solution du problème direct (16) homogénéisé à l'ordre zéro. Ce que l'on a noté ici  $\langle u_{exp} \rangle (t)$  désigne la quantité expérimentale correspondante, obtenue en calculant, pour chaque pas de temps  $t_k$  du déplacement homogénéisé, la moyenne suivante :

$$\langle u_{exp} \rangle (t_k) = \frac{F}{\xi} \int_{t_k}^{t_k + \frac{\xi}{F}} u_{exp}(t) dt \quad (20)$$

Le gradient de cette fonction coût est évalué comme dans le paragraphe 3, à l'aide de la résolution d'un problème d'état adjoint. Celui-ci peut s'écrire comme :

$$d_t z_1(t) = L (\langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t)) \quad \forall t \in [0; T] \quad (21a)$$

$$z_1(T) = 0 \quad (21b)$$

c'est-à-dire, comme précédemment, une équation différentielle rétrograde en temps, avec une condition finale nulle. Compte tenu du second membre de cette équation, l'état adjoint  $z_1$  est une quantité qui évolue « lentement », à l'échelle du temps lent  $t$ , ce qui permet de le calculer de façon efficace avec des pas de temps similaires à ceux du calcul du problème homogénéisé (16). Le gradient de la fonction coût est alors constitué des trois dérivées partielles suivantes :

$$\nabla_E \mathcal{J}_1(E, K, n) = \int_0^T \frac{L}{E^2} \langle |d_t f_s(t)| \rangle z_1(t) dt + \frac{L}{E^2} \langle f_s \rangle (0) z_1(0) + \alpha_E (E - E_0) \quad (22a)$$

$$\nabla_K \mathcal{J}_1(E, K, n) = \int_0^T \frac{nL}{K} \left\langle \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_1(t) dt + \alpha_K (K - K_0) \quad (22b)$$

$$\nabla_n \mathcal{J}_1(E, K, n) = - \int_0^T L \left\langle \ln \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right) \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_1(t) dt + \alpha_n (n - n_0) \quad (22c)$$

Il est facile de montrer que les expressions précédentes (21) et (22) sont en fait les expressions homogénéisées à l'ordre zéro du problème adjoint et du gradient de la fonction coût pour le problème d'identification associé au problème de référence (14). Ce résultat a déjà été obtenu précédemment dans le cas de l'homogénéisation périodique en espace, pour ce qui constitue le domaine du « contrôle bon marché » [10, 7, 9].

### 4.3.2 Fonction coût sur les quantités « instantanées »

Un deuxième choix possible de fonction coût revient à comparer cette fois-ci le déplacement expérimental « complet »  $u_{exp}(t)$  au déplacement reconstruit (18) :

$$\mathcal{J}_2(E, K, n) = \frac{1}{2} \int_0^T | \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} - u_{exp}(t) |^2 dt + \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2 \quad (23)$$

Le calcul du gradient de cette fonction coût fait intervenir l'état adjoint  $z_2$  vérifiant l'équation différentielle suivante, toujours rétrograde en temps :

$$d_t z_2(t) = L \left( \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} - u_{exp}(t) \right) \quad \forall t \in [0; T] \quad (24a)$$

$$z_2(T) = 0 \quad (24b)$$

À cause du terme rapide en  $t/\xi$ , il n'est pas intéressant de résoudre directement cette équation, car on perdrait tout le bénéfice du coût de calcul réduit obtenu avec l'homogénéisation en temps. Il est donc préférable d'appliquer les principes de cette dernière à la résolution de l'équation. On trouve alors que l'état adjoint à l'ordre zéro  $z_{2,0}$  est une fonction du temps lent  $t$  seulement, et qu'il vérifie l'équation différentielle homogénéisée suivante :

$$d_t z_{2,0}(t) = L \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t) \quad \forall t \in [0; T] \quad (25a)$$

$$z_{2,0}(T) = 0 \quad (25b)$$

qui est identique à l'équation différentielle (21).

L'état adjoint homogénéisé  $z_{2,0}$  intervient ensuite dans l'estimation du gradient de la fonction coût de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_E \mathcal{J}_2(E, K, n) = & \int_0^T \frac{L}{E^2} \langle |d_t f_s(t)| \rangle z_{2,0}(t) dt + \frac{L}{E^2} \langle f_s \rangle (0) z_{2,0}(0) + \alpha_E (E - E_0) \\ & - \int_0^T \frac{L}{E^2} f_s^*(t/\xi) \left( \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} - u_{exp}(t) \right) dt \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\nabla_K \mathcal{J}_2(E, K, n) = \int_0^T \frac{nL}{K} \left\langle \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_{2,0}(t) dt + \alpha_K (K - K_0) \quad (26b)$$

$$\nabla_n \mathcal{J}_2(E, K, n) = - \int_0^T L \left\langle \ln \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right) \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_{2,0}(t) dt + \alpha_n (n - n_0) \quad (26c)$$

dont les dérivées partielles sont identiques à celles estimées dans (22), mis à part l'ajout d'un terme complémentaire lié au terme  $f_s^*(t/\xi)$  dans l'expression de  $\nabla_E \mathcal{J}_2$ . La principale différence entre les deux choix de fonction coût est donc lié au fait de considérer la partie rapide liée à ce terme.

### 4.3.3 Résultats de l'identification

Pour illustrer la résolution du problème d'identification avec les deux fonctions coûts proposés précédemment, des données synthétiques  $u_{exp}(t)$  sont créées en résolvant le problème direct de référence (14), en prenant comme paramètres  $E_{exp} = 200\text{GPa}$ ,  $K_{exp} = 100\text{MPa}$ ,  $n_{exp} = 10$  et un chargement du même type que (15). Des valeurs  $E_0 = 220\text{GPa}$ ,  $K_0 = 110\text{MPa}$ ,  $n_0 = 11$  sont choisies pour ces mêmes paramètres comme initialisation d'une méthode de Newton de type *interior-reflective* [3] pour minimiser les deux fonctions coûts (19) et (23) considérées sans termes de régularisation. Les résultats sont résumés dans le tableau 1 et montrent que la minimisation des deux fonctions coûts conduit à des résultats similaires, même si la fonction coût basée sur les quantités « instantanées » semble un peu meilleure. La figure 1 montre la comparaison entre les deux modèles identifiés et la référence synthétique pour l'évolution de la déformation plastique, qui n'est pas directement accessible à l'expérience. Dans les deux cas, le coût de l'identification est fortement réduit par rapport à celui qui consisterait à traiter le problème inverse relatif au problème de référence (14).

| Fonction coût   | Nombre d'itérations | $E_{id}$ | $K_{id}$ | $n_{id}$ |
|-----------------|---------------------|----------|----------|----------|
| $\mathcal{J}_1$ | 18                  | 200,0GPa | 97,6MPa  | 10,2     |
| $\mathcal{J}_2$ | 21                  | 200,0GPa | 97,9MPa  | 10,1     |

Tableau 1 – Valeurs des paramètres identifiés après minimisation de  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$

## 4.4 Influence du rapport $\xi$

Les résultats précédents ont été obtenus pour un rapport  $\xi$  entre les fréquences lente et rapide extrêmement faible ( $10^{-4}$ ), ce qui peut expliquer que l'ordre zéro est suffisant pour représenter la réponse de référence. Dans le cas où ce rapport n'est pas si petit, il peut devenir nécessaire de tenir compte des ordres supérieurs, dans le problème direct comme dans la formulation de l'identification paramétrique.

La figure 2 (à gauche) montre l'évaluation du déplacement en bout de barre ( $x = L$ ) pour différents ordres considérés, lorsque le rapport  $\xi$  vaut 1/5 : comparés au déplacement de référence, représenté en

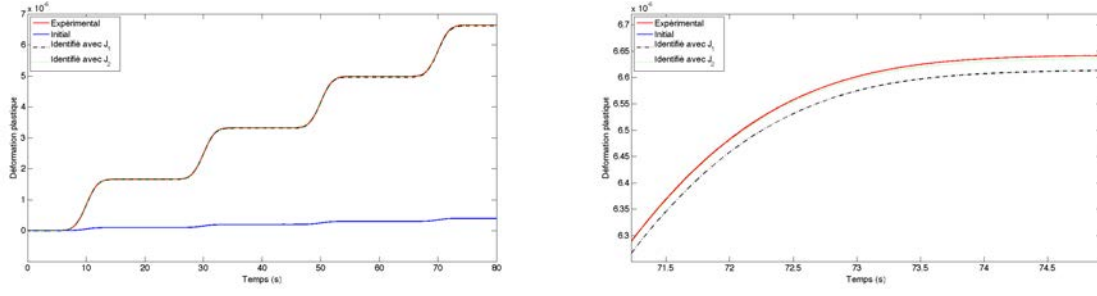


Fig. 1 – Identification paramétrique d’un modèle homogénéisé. Déformation plastique longitudinale : données synthétiques (rouge), paramètres initiaux (bleu), paramètres identifiés avec  $\mathcal{J}_1$  (noir), paramètres identifiés avec  $\mathcal{J}_2$  (vert).

rouge, le déplacement homogénéisé à l’ordre zéro  $\langle u_0 \rangle(L, t)$  (en noir) et le déplacement « instantané » à l’ordre zéro  $\langle u_0 \rangle(L, t) + f_s^*(t/\xi)L/E$  (en bleu) ne sont pas corrects ; l’ajout du terme à l’ordre un  $u_1(L, t, t/\xi)$  permet alors de corriger ce dernier (en vert). Ce terme d’ordre un provient de la résolution de l’équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial_\tau u_1(L, t, \tau)}{L} = \left[ \left( \frac{|f_s(t, \tau)|}{K} \right)^n \right]^* \quad \forall t \in [0; T] \quad (27a)$$

$$u_1(L, 0, 0) = 0 \quad (27b)$$

De manière similaire, le problème d’identification nécessite de considérer une reconstruction à l’ordre un de la réponse de la barre dans la fonction coût :

$$\mathcal{J}_3(E, K, n) = \frac{1}{2} \int_0^T \left| \langle u_0 \rangle(L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} + \xi u_1(L, t, t/\xi; E, K, n) - u_{exp}(t) \right|^2 dt \quad (28)$$

$$+ \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2$$

La minimisation de cette fonction coût passe par la résolution d’un deuxième problème d’état adjoint, en complément du problème adjoint (25) qui reste inchangé :

$$d_t z_3(t) = L \left( \langle u_0 \rangle(L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} + \xi u_1(L, t, t/\xi; E, K, n) - u_{exp}(t) \right) \quad \forall t \quad (29a)$$

$$z_3(T) = 0 \quad (29b)$$

Le gradient de la fonction coût fait alors intervenir les dérivées partielles suivantes :

$$\nabla_K \mathcal{J}_3(E, K, n) = \frac{nL}{K} \int_0^T \left\langle \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_{2,0}(t) + \left[ \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right]^* z_3(t, t/\xi) dt + \alpha_K (K - K_0) \quad (30a)$$

$$\nabla_n \mathcal{J}_3(E, K, n) = - \int_0^T L \left\langle \ln \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right) \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right\rangle z_{2,0}(t) dt$$

$$- \int_0^T L \left[ \ln \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right) \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \right]^* z_3(t, t/\xi) dt + \alpha_n (n - n_0) \quad (30b)$$

sachant que la dérivée partielle par rapport à  $E$  reste semblable à l’expression (26a).

Un exemple d’identification a été mené avec des données synthétiques  $u_{exp}(t)$  créées en prenant comme paramètres  $E_{exp} = 200\text{GPa}$ ,  $K_{exp} = 100\text{MPa}$ ,  $n_{exp} = 10$  et un chargement de type (15). Des valeurs  $K_0 = 110\text{MPa}$  et  $n_0 = 11$  sont choisies comme initialisation d’une méthode de Newton de type *interior-reflective* [3] pour minimiser la fonction coût (28) considérée sans régularisation. Après 18 itérations, les valeurs identifiées sont  $K_{id} = 102,0\text{MPa}$  et  $n_{id} = 9,9$ . La figure 2 (à droite) permet de constater la bonne évaluation de la déformation plastique, qui n’est pas directement accessible à l’expérience.



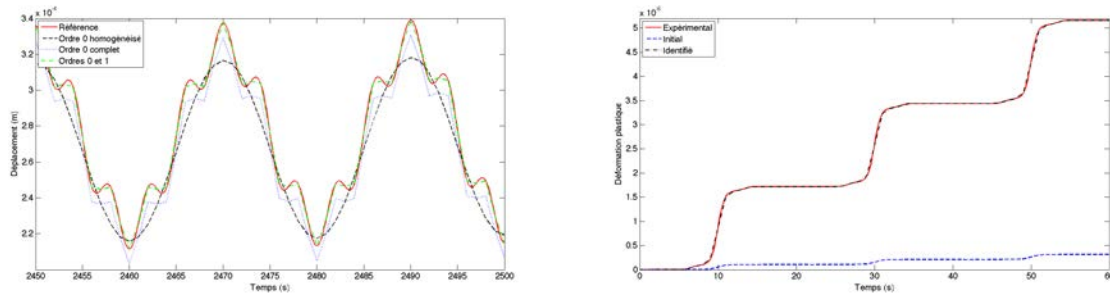


Fig. 2 – Cas d’un rapport  $\xi = 1/5$ . Déplacement en  $x = L$  pour différentes estimations homogénéisées (à gauche). Identification associée : comparaison des estimations de la déformation plastique (à droite).

## 5 Conclusion

L’exemple présenté ici a permis d’éprouver sur un cas simple la formulation d’un problème d’identification paramétrique d’un modèle homogénéisé en temps. L’approche classique par état adjoint peut être adaptée à ce cadre, et conduit à considérer la version homogénéisée de l’état adjoint du problème d’identification de référence. Enfin, l’influence du rapport  $\xi$  entre les deux échelles de temps a permis de montrer qu’il est possible d’inclure des ordres supérieurs lorsque ceux-ci sont nécessaires.

Ces résultats constituent une première étape avant de considérer des exemples plus complexes : prise en compte des effets d’inertie, loi d’évolution plus riche... L’extension de cette étude à des modèles faisant intervenir trois échelles de temps bien séparées, au lieu de deux seulement, devrait également permettre de considérer des applications où la réduction du temps de simulation est primordiale.

## Références

- [1] D. Aubry et G. Puel. *CCF modelling with use of a two-timescale homogenization model*, Procedia Engineering, 2, 787–796, 2010.
- [2] D. Aubry et G. Puel. *Two-timescale homogenization method for the modeling of material fatigue*, IOP Conference Series : Material Science and Engineering, 10, 012113, 2010.
- [3] T. F. Coleman et Y. Li. *On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds*, Mathematical Programming, 67 :1-3, pp. 189–224, 1994.
- [4] A. Constantinescu et N. Tardieu. *On the identification of elastoviscoplastic constitutive laws from indentation tests*, Inverse Problems in Science and Engineering, 9 :1, 19–44, 2001.
- [5] A. Devulder, D. Aubry et G. Puel. *Two-time scale fatigue modelling : application to damage*, Computational Mechanics, 45 :6, 637–646, 2010.
- [6] T. Guennouni et D. Aubry. *Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargements cycliques*, Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série II, 303 :20, 1765–1768, 1986.
- [7] S. Kesavan et J. Saint Jean Paulin. *Quelques problèmes de contrôle bon marché*, Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série I, 332, 67–72, 2001.
- [8] J. Lemaitre et J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [9] R. Mahadevan et T. Muthukumar. *Homogenization of some low-cost control problems*, arXiv, 0910.2761, 2009.
- [10] S.-G. Peng. *Analyse asymptotique et problème homogénéisé en contrôle optimal avec vibrations rapides*, SIAM Journal on Control and Optimization, 27 :4, pp. 673–696, 1989.
- [11] G. Puel et D. Aubry. *Material fatigue simulation using a periodic time homogenization method*, European Journal of Computational Mechanics, 21 :3-6, pp. 312–324, 2012.
- [12] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer, 1980.
- [13] E. V. Shishkina, I. I. Blekhman, M. P. Cartmell et S. N. Gavrilov. *Application of the method of direct separation of motions to the parametric stabilization of an elastic wire*, Nonlinear Dynamics, 54 :4, pp. 313–331, 2008.
- [14] Q. Yu et J. Fish. *Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading*, Computational Mechanics, 29 :3, pp. 199–211, 2002