



HAL
open science

Modélisation multi-échelle du comportement des câblés textiles

Houda Attia, Damien Durville, Patrick Le Tallec

► **To cite this version:**

Houda Attia, Damien Durville, Patrick Le Tallec. Modélisation multi-échelle du comportement des câblés textiles. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722084

HAL Id: hal-01722084

<https://hal.science/hal-01722084>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modélisation multi-échelles du comportement des câblés textiles

Houda ATTIA¹, Damien DURVILLE¹, Patrick LE TALLEC²

¹ LMSSMat, Ecole Centrale Paris, houda.attia@ecp.fr, damien.durville@ecp.fr

² LMS, Ecole Polytechnique, patrick.letaltec@polytechnique.edu

Résumé — Une stratégie multi-échelles est proposée pour aborder la simulation de câblés textiles à grands nombres de filaments, en vue de déterminer le comportement global de ces structures tout en approchant les sollicitations locales subies à l'échelle des filaments. Cette stratégie repose sur le développement d'un modèle simplifié de macro-fibres pour résoudre le problème à l'échelle macroscopique, et la formulation d'un problème à l'échelle microscopique piloté par des quantités pertinentes déterminées à l'échelle macroscopique. Les paramètres du modèle macroscopique sont recalés de manière à obtenir un accord entre les densités déterminées aux échelles macroscopique et microscopique. Dans un premier temps, le cadre de l'étude a été simplifié en se ramenant à un problème 2D. On présente alors dans cet article une illustration 2D de l'approche multi-échelles proposée.

Mots clés — multi-échelles, câblés textiles, erreur, densité

1 Introduction

Les câblés textiles sont fréquemment utilisés en industrie, notamment comme renforts dans les matériaux composites (aéronautique, automobile, pneumatique...). A l'échelle du composite, la modélisation du comportement mécanique a fait l'objet de divers travaux [2]. Dans notre étude, on se place à l'échelle des renforts et nous n'aborderons pas les problématiques concernant l'échelle du composite.

Les câblés étudiés se présentent comme un réseau de fibres, obtenus par un enchevêtrement de mèches, qui sont constituées à leur tour d'un assemblage de filaments. Leur comportement est gouverné par ce qui se passe à l'échelle des fibres élémentaires, et hérite des phénomènes complexes dus aux interactions de contact-frottement entre les filaments constituant ces milieux. Leur géométrie initiale, c'est-à-dire la description de la trajectoire de chacune des fibres du câblé, est a priori non connue et dépend du procédé d'élaboration. Pour décrire de manière pertinente cette géométrie initiale, il est nécessaire de simuler les différentes opérations d'assemblage subies par ces fibres.

La connaissance et la description du comportement mécanique de ces renforts textiles sont nécessaires d'une part pour prédire à l'échelle globale le comportement du renfort, et d'autre part pour prévoir les endommagements à l'échelle locale des fibres sous sollicitations externes du câblé. La réponse à ces deux questions nécessite une modélisation à l'échelle des fibres élémentaires.

L'objectif de ce travail est de développer une approche multi-échelles permettant de simuler le comportement des câblés textiles au cours des différentes étapes de leur cycle de vie, en déterminant les contraintes locales sous chargement externe.

2 Modèle multi-échelles proposé pour les câbles

2.1 Modèle mécanique existant

L'approche existante pour simuler le comportement des assemblages de fibres est basée sur une modélisation éléments finis à l'échelle des fibres élémentaires [1]. Chaque fibre est représentée par un modèle de poutre dit à cinématique enrichie à 9 degrés de libertés par noeud et tel que la position de chaque particule dans le volume de la poutre s'écrit comme un développement limité de Taylor de premier ordre par rapport à ses coordonnées transverses dans la configuration matérielle (configuration de référence de la poutre), voir équation 1. Cette approximation de la cinématique, inspirée de la théorie

d'Antman [3], fait intervenir 3 vecteurs : un vecteur relatif à la position des centres des sections et deux vecteurs variables en norme et en angle dits vecteurs de section. Une telle approche permet de représenter d'une part les modes d'élongation des fils et d'autre part des modes de déformations planes des sections qui peuvent être circulaires ou elliptiques.

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{x}(0, 0, \xi_3) + \xi_1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{x}(0, 0, \xi_3)}_{\underline{g}_1} + \xi_2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_2} \underline{x}(0, 0, \xi_3)}_{\underline{g}_2} + o(\xi_1, \xi_2). \quad (1)$$

Les vecteurs \underline{g}_1 et \underline{g}_2 sont interprétés comme des vecteurs de section dont la variation en norme et en angle définit les modes de déformations planes des sections des fibres.

2.2 Notion de macro-fibre

Comme nous l'avons relevé précédemment, en utilisant une approche basée sur la méthode des éléments finis à l'échelle microscopique des fils élémentaires, la simulation du comportement des câbles ne peut être réalisée que sur des assemblages comprenant un nombre réduit de filaments. Or les câbles qui font l'objet de notre étude comptent plusieurs dizaines de milliers de fibres. L'idée est d'introduire un modèle mécanique dit de macro-fibre, formulé à une échelle intermédiaire (entre l'échelle microscopique -celle des fibres- et l'échelle macroscopique -celle des câbles-) et dont le comportement soit équivalent à celui d'un paquet de quelques dizaines de fibres.

2.3 Motivations et principe général de l'approche

Si on utilise le modèle existant pour représenter les macro-fibres, une étude préliminaire a montré que les résultats numériques obtenus ne sont pas cohérents avec l'expérience, et que cet écart semble du au défaut de prise en compte des phénomènes de densification locale des macro-fibres (écrasements transverses, réduction des vides entre elles). Partant de ce constat, et en absence d'un modèle rhéologique de macro-fibre consistant (prise en compte des non linéarités, des variations de volume...), l'idée est de considérer des macro-fibres (en un assez grand nombre) dotées d'une loi de comportement élastique, mais avec des rigidités de flexion et de torsion réduites, correspondant à une première approximation du comportement d'un paquet de filaments en négligeant le frottement entre filaments. Les erreurs commises sur le modèle à l'échelle macroscopique semblent alors se traduire en termes de densité, ce qui peut être lié à une moindre capacité des macro-fibres à s'enchevêtrer. Afin de mieux prendre en compte ces effets de densification locale (écrasement transverse, réduction des vides), l'idée est d'autoriser des pénétrations importantes entre les macro-fibres. Ces interpénétrations sont contrôlables par un modèle de contact adapté de manière à obtenir une densité convenable. Le principe général de l'approche est le suivant :

- le modèle macroscopique simplifié avec interpénétration nous permettra d'avoir une estimation globale du comportement mécanique d'une macro-fibre ;
- le passage au problème à l'échelle microscopique nous permettra ensuite d'en juger la pertinence, et de recalculer/corriger les paramètres du modèle de contact macroscopique de façon à avoir un bon accord entre les densités déterminées aux deux échelles.

Afin de cerner les diverses difficultés de l'approche retenue, on propose d'écrire dans un premier temps un problème modèle simplifié bidimensionnel, correspondant à une section du câblé. Ce modèle simplifié sera implémenté pour tester numériquement les différentes options choisies (conditions aux limites du problème local, méthode de recalage des paramètres de la loi de contact macroscopique,...). Les difficultés relatives au passage en 3D (définition des cellules locales en 3D, conditions aux extrémités du câblé, la prise en contact du frottement...) seront traitées dans une prochaine étape.

3 Mise en oeuvre sur un problème modèle bidimensionnel

L'enjeu ici est d'écrire un problème 2D permettant de retrouver les problématiques qui nous intéressent sur des câblés 3D, ce qui revient à se placer au niveau d'une section du câble. Afin de lever toute ambiguïté de langage, on parlera de disques et de macro-disques respectivement à la place de fibres et de macro-fibres.

3.1 Choix préliminaires

3.1.1 Potentiel d'énergie

Les déformations des sections des filaments étant négligeables, nous considérons les disques comme étant des grains solides indéformables. La cinématique d'un disque est décrite par la donnée du vecteur position de son centre et de son angle de rotation, notés respectivement \underline{x} et ω .

Afin de contourner le problème de disques flottants, on associe à chaque disque une énergie interne, s'écrivant sous la forme :

$$\Psi = \frac{EI}{2L^3} \|\underline{x}_{0i}^{t_0} - \underline{x}_{0i}^t\|^2 + \frac{GJ}{L} \omega_i^2 \quad (2)$$

Dans le problème modèle 2D, un disque correspond alors à la section extrémité d'une poutre cantilever de longueur L fixée à son autre extrémité.

3.1.2 Chargement externe

Le deuxième choix concerne le type de chargement externe à appliquer sur les disques, qui nous permettrait de s'approcher des problématiques d'un câblé textile en 3D. On cherche en particulier à prendre en compte les sollicitations axiales que subit majoritairement le câble, qui comprennent une mise en tension et une compression.

Considérant à titre d'exemple une mise en tension d'un câblé textile, les filaments ont tendance à s'agglomérer au centre de l'assemblage. En effet, étant disposés en hélice, les filaments internes reprennent la sollicitation imposée en un effort radial proportionnel à leur distance par rapport au centre du câblé. Ainsi, cette première constatation met en évidence un phénomène de compaction radiale interne engendré par une sollicitation d'ordre macroscopique (la mise en tension de l'assemblage). L'idée est d'imposer une force radiale proportionnelle à la distance par rapport au centre de l'assemblage et à une élongation "longitudinale", qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{F} = -\alpha T \underline{x} \quad (3)$$

Le terme T représente la tension appliquée au câblé.

On souhaite avec ce type de chargement se rapprocher des phénomènes observés dans un câble textile : une mise en tension de l'ensemble (correspond à prendre T positif) induit alors un effort centripète proportionnel à la distance au centre. A mesure que l'on se rapproche du centre de l'amas, chaque disque reprend les efforts développés par les disques les plus éloignés. On retrouve par conséquent l'effet de compression radiale que nous avons relevé dans le cas des câbles textiles.

3.1.3 Modélisation des interactions de contact entre les disques

Puisque les disques sont considérés indéformables, on estime que le contact entre deux disques est ponctuel. Il sera représenté alors comme étant une interaction entre deux points matériels appartenant au contour extérieur des disques. D'un point de vue géométrique, le contact se produira au niveau du point d'intersection de la tangente commune aux deux disques et de la droite passant par leurs deux centres. On définit un élément de contact comme étant le couple de points d'intersection de la droite reliant le centre de deux disques voisins avec leurs contours extérieurs respectifs.

Condition cinématique de contact

On détermine l'état de contact entre deux disques par la mesure de la distance entre les deux points de l'élément de contact. Il n'y a pas contact tant que cette distance, nommée gap, est strictement positive :

$$gap = (\underline{x}_c^1 - \underline{x}_c^2, \underline{N}_{12}) \geq 0$$

où \underline{N}_{12} est la normale au contour des deux disques en contact, définie par la ligne des centres :

$$\underline{N}_{12} = \frac{\underline{x}_{02} - \underline{x}_{01}}{\|\underline{x}_{02} - \underline{x}_{01}\|}$$

Modèle mécanique de contact

Pour imposer cette condition cinématique de contact, on introduit au niveau des éléments de contact une raideur normale s'opposant à la pénétration mesurée. La relation entre la réaction normale et le gap est déterminée par deux modèles mécaniques différents selon l'échelle où on se place :

- A l'échelle macroscopique : Comme nous l'avons déjà noté, l'idée de l'approche proposée est de tolérer des pénétrations importantes entre les macro-fibres à l'échelle globale. La capacité d'interpénétration des macro-disques est étroitement liée à la densité du milieu correspondant à l'échelle locale. Ainsi, on se propose de contrôler les paramètres de cette loi de contact macroscopique, y compris le seuil d'interpénétration, de manière à minimiser l'erreur commise sur la densité. Sans être forcément définitive, on propose une loi linéaire à double pente définie par trois paramètres : deux coefficients de raideur normale de contact κ_1 et κ_2 , et un paramètre de distance Seuil (figure 1(a)). Pour des pénétrations inférieures à la distance seuil autorisée, le modèle de contact est alors très mou, autorisant l'interpénétration des macro-disques.
- A l'échelle microscopique : La loi de contact utilisée pour modéliser le contact entre les disques à l'échelle microscopique est basée sur un modèle mécanique dit "modèle de contact régularisé" défini par deux paramètres : une raideur κ et une valeur seuil de pénétration [1].
Suivant ce modèle, en cas de contact et pour des valeurs de pénétration inférieures à un certain seuil, les réactions normales s'écrivent sous forme quadratique en fonction de la pénétration. Pour le cas des pénétrations plus importantes (supérieures en valeur absolue à la valeur de seuil) la dépendance est linéaire. On note au passage qu'une telle loi permet une continuité de la dérivée de l'effort normal entre l'état de contact et l'état de non-contact (figure 1(b)).

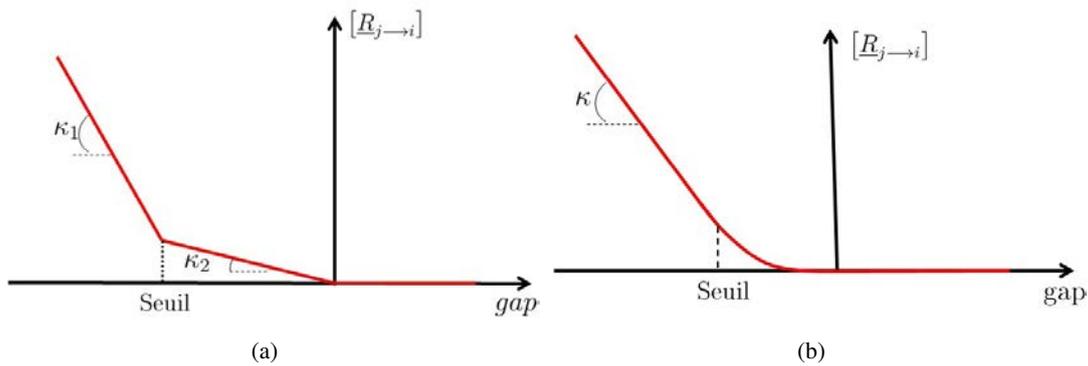


Fig. 1 – (a) Modèle de contact à l'échelle macroscopique. (b) Modèle de contact à l'échelle microscopique.

3.2 Formulation du problème 2D

3.2.1 Formulation du problème à l'échelle macroscopique

Le modèle macroscopique correspondant à une structure composée d'un ensemble de M macro-disques non déformables, en interaction de contact glissant entre eux et soumis à un chargement externe

incrémental donné par l'équation 3, correspondant à une mise en tension ou en compression de la structure de câble 3D correspondante.

On note $\underline{X} = (x_{0j}, \omega_i)$ le vecteur contenant la position du centre et l'angle de rotation de tous les macro-disques. Le problème mécanique à l'échelle macroscopique revient alors à chercher les positions \underline{X} tel que, $\forall \hat{\underline{X}}$ variation virtuelle de position, on ait

$$\sum_{i=1}^M \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{X}} \cdot \hat{\underline{X}} + \sum_{j \text{ voisin de } i} \left\| [R_{j \rightarrow i}]_N \right\| (\hat{x}_c^i - \hat{x}_c^j, N_{ij}) = \sum_{i=1}^M -\alpha T \cdot \underline{x}_{0i}^t \cdot \hat{x}_{0i}. \quad (4)$$

3.2.2 Formulation du problème à l'échelle locale

Définition de la cellule locale

Une cellule locale, notée ξ_i est associée à chaque macro-disque. Elle est définie géométriquement par les médiatrices des segments joignant le centre du macro-disque auquel elle est associée avec les centres de tous ses voisins. La normale de chaque plan est en d'autres termes une direction de contact entre deux macro-disques voisins (figure 2). Le nombre des plans définissant une cellule peut être alors au maximum égal à 6, ce qui correspond à un cas d'empilement hexagonal compact. On suppose ici que les plans sont mobiles selon leurs directions normales, qui correspondent aux directions de contact inter macro-disques héritées du calcul macroscopique. Les micro-disques appartenant à une cellule ξ_i sont en interaction de contact glissant entre eux et avec les plans de la cellule.

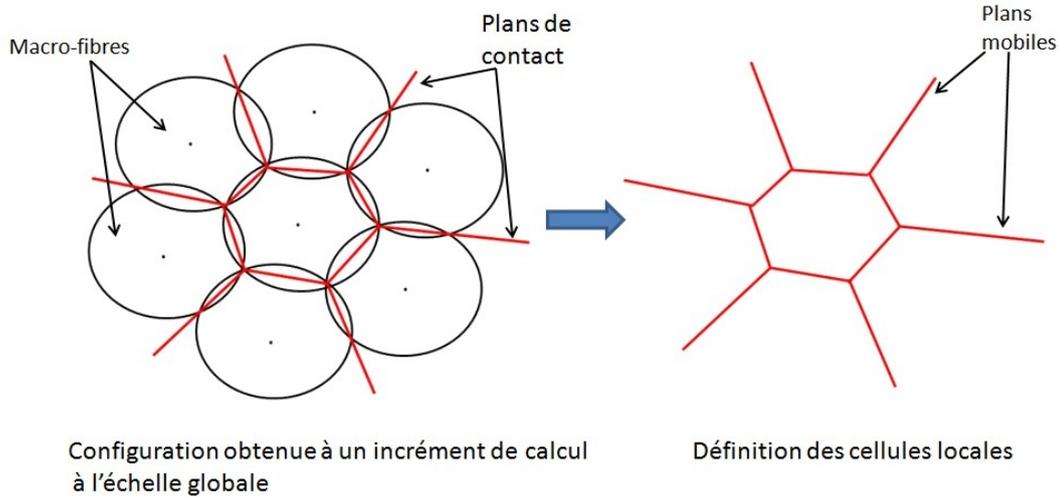


Fig. 2 – Description du problème à l'échelle locale

Héritage du calcul macroscopique

Dans notre approche, on transmet de l'échelle macroscopique à l'échelle locale (figure 3) :

- La position du macro-disque qu'on imposera en moyenne aux disques locaux associés. L'imposition de cette condition cinématique est faite par le biais de multiplicateurs de Lagrange. Pour chaque macro-disque i , le multiplicateur de Lagrange correspondant est noté $\underline{\lambda}_i$.
- Des efforts appliqués sur les facettes des cellules locales, relatifs aux efforts de contact entre les macro-disques. Les paramètres définissant ces efforts (la valeur T_{ij} , la direction \underline{n}_{ij} qui correspond à la direction normale de contact) sont alors déterminés à la fin de chaque incrément de calcul à l'échelle macroscopique.

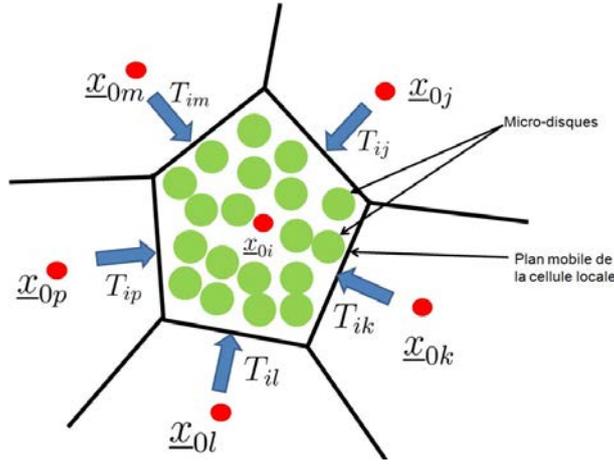


Fig. 3 – Conditions aux limites au niveau d’une cellule

Écriture du problème à l’échelle microscopique

Pour chaque incrément de calcul et au niveau de chaque cellule locale ξ_i , les paramètres \underline{x}_i et T_{ij} étant fixés, le problème local consiste à trouver la position $\underline{y}_k = (y_{0k}, \omega_k)$ des disques ($k = 1, \dots, N$), le multiplicateur λ_i associé à la contrainte cinématique de position moyenne et la position β_{ij} du plan P_{ij} tels que $\forall (\hat{\underline{y}}_k, \hat{\lambda}_i, \hat{\beta}_{ij})$ on ait

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi_k(\underline{y}_k)}{\partial \underline{y}_k} \cdot \hat{\underline{y}}_k + \sum_{l \text{ voisin de } k} \|[R_{l \rightarrow k}]_N\| (\hat{\underline{y}}_k - \hat{\underline{y}}_l, \underline{n}_{kl}) + \left(\frac{\sum_{k=1}^N (y_{0k})}{N} - \underline{x}_{0i}, \hat{\lambda}_i \right) + \left(\frac{\sum_{k=1}^N (\hat{y}_{0k})}{m}, \hat{\lambda}_i \right) + \sum_{j \text{ voisin de } i} \left(\sum_{k \text{ proche du plan } P_{ij}} \|[R_{j \rightarrow k}]_N\| (\hat{\underline{y}}_k - \hat{\underline{y}}_{ij}, \underline{n}_{ij}) \right) + \sum_{j \text{ voisin de } i} T_{ij} \hat{\beta}_{ij} = \sum_{k=1}^N \alpha_k T_{\underline{y}_{0k}}' \cdot \hat{\underline{y}}_{0k}' \quad (5)$$

3.3 Méthode de résolution numérique

On résout successivement le problème global puis local. L’originalité de la méthode de résolution utilisée aux deux échelles est l’algorithme de contact, qui a été introduit dans [1] : La normale de contact intervenant dans l’expression du gap dépend de la solution du problème, ce qui introduit une non-linéarité géométrique, notamment pour le modèle de contact régularisé utilisé à l’échelle locale. Ceci pourrait rendre difficile la convergence d’un algorithme de Newton classique. L’idée est alors d’introduire un second niveau d’itérations, en séparant le calcul des normales de contact : à normales fixées, on résout un algorithme de Newton-Raphson sur les autres non-linéarités (état de contact, grandes déformations), puis on actualise les normales pour évaluer leurs variations. On obtient la convergence du problème lorsqu’on converge aux deux niveaux (itérations sur la normale et itération de l’algorithme de Newton).

Par ailleurs, à l’échelle locale, le pilotage en efforts des plans engendre une difficulté supplémentaire : il n’est pas possible de prédire d’une part les disques qui seront en contact et d’autre part ceux qui seront en contact avec les plans délimitant la cellule, ce qui implique que la rigidité de l’ensemble des disques sur lequel on applique l’effort est inconnue a priori. Un effort très important peut donc induire des fortes interpénétrations entre les disques aux premières itérations, ce qui engendre un état à partir duquel la convergence du calcul devient très difficile voire impossible. Pour garantir qu’on ne s’éloigne jamais trop du minimum d’énergie recherché, on utilise alors une méthode de recherche linéaire, qui consiste à ajuster la longueur de l’incrément de déplacement.

4 Résultats numériques

4.1 Mise en évidence de l'erreur commise entre échelles

L'approche présentée est mise en oeuvre sur un cas test numérique. On présente ici un calcul purement macroscopique sur des macro-disques (disques en rouge sur la figure 4) et tel que cela a été formulé dans la section 3.2.1. Ainsi, on définit une topologie des centres des macro-disques, les orientations des plans séparateurs en cas de contact (les plans représentés en rouge) et par conséquent les cellules locales. Dans un second temps, on procède à la résolution du problème local au niveau de(s) cellule(s) locale(s) sur les micro-disques (disques en blanc sur la figure 4). Comme les deux échelles microscopiques et macroscopiques ne sont pas équilibrées, l'erreur commise se traduit visuellement par un écart sur les plans séparateurs des cellules locales (écart sur les plans noirs représenté sur la figure 5(a)). Cette erreur semble ajustable à travers les paramètres du modèle de contact macroscopique.

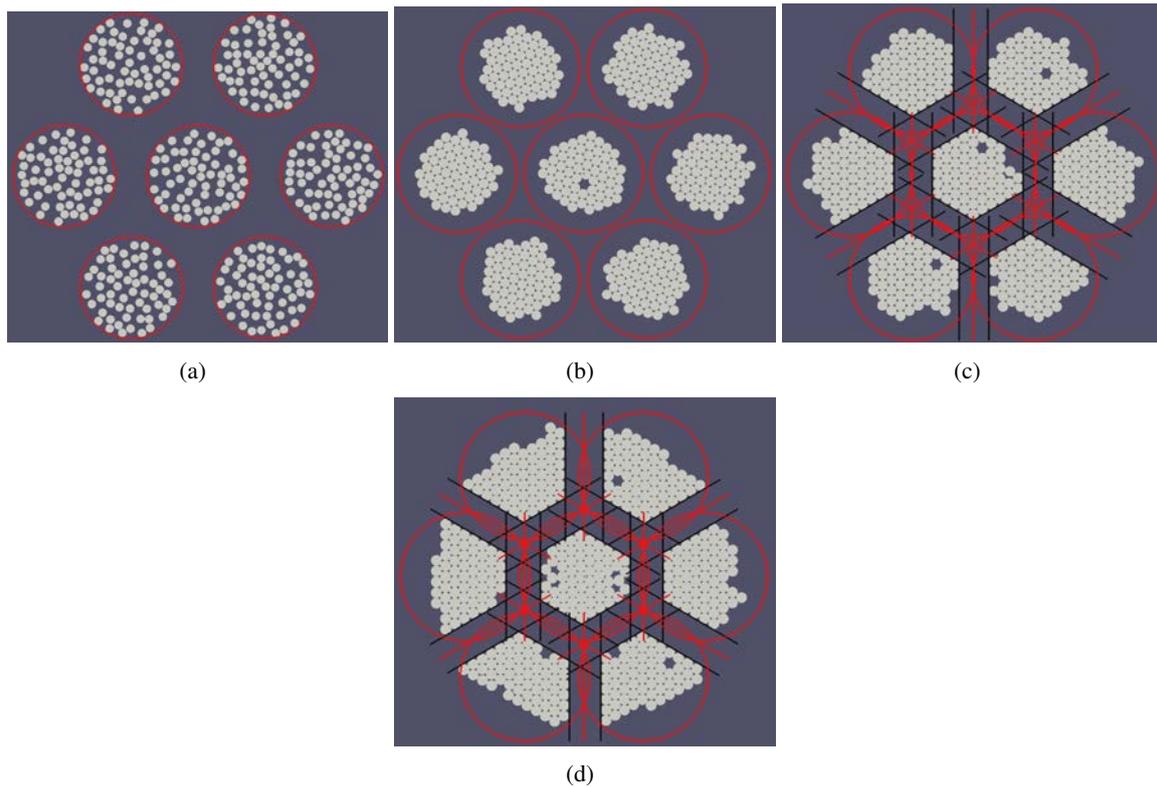


Fig. 4 – Exemple d'un cas test multi-échelles : différents incréments d'un calcul de traction (en rouge : les macro-disques, en blanc : les disques à l'échelle microscopique, en noir : les plans séparateurs après résolution micro).

4.2 Processus de recalage

Le processus de recalage a pour but de corriger le modèle macroscopique via un ajustement des paramètres du modèle de contact global. Ceci est réalisé grâce à un indicateur d'erreur, qui consiste dans notre cas en la valeur de densité. Plus concrètement, à l'issue de la résolution du problème macro et du problème micro correspondant, l'idée est d'accorder les mesures de densité obtenues aux deux échelles en adaptant les paramètres du modèle de contact. Dans notre cas, la densité est définie comme étant le taux de vide autour d'un disque. La figure 6 illustre un exemple de carte de densité obtenue à l'échelle locale.

Le résultat obtenu sur le même cas test après ajustement des paramètres de la loi de contact macroscopique est donné par la figure 5(b).

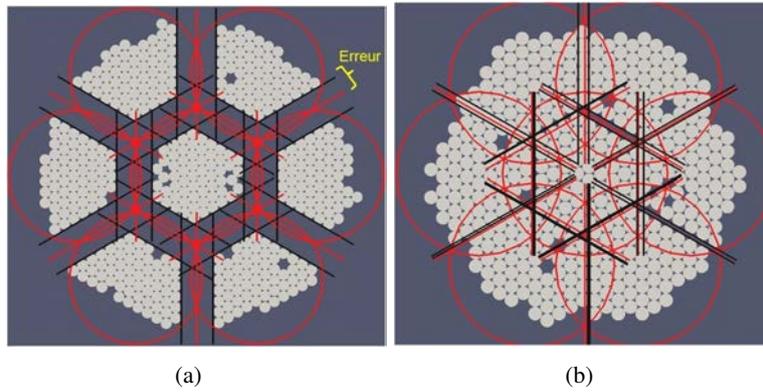


Fig. 5 – (a) Estimateur d'erreur : écart sur le déplacement des plans séparateurs.(b) Diminution de l'erreur commise après recalage.

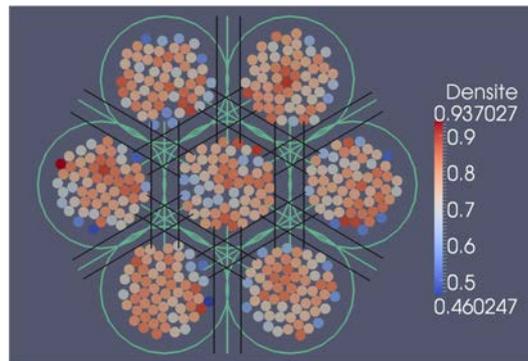


Fig. 6 – Carte de densité à l'échelle locale.

5 Conclusions

Nous avons proposé une approche fondée sur la notion de macro-fibre, permettant de simuler le comportement d'un câblé textile comportant un grand nombre de filaments. Le modèle bidimensionnel présenté a permis de se rapprocher des problématiques rencontrées sur des câblés, avec des phénomènes de densification et de migration. L'étude basée sur ce modèle a démontré la faisabilité de l'approche multi-échelle envisagée : les échanges entre échelles sont clarifiés, et il a été vérifié que les problèmes sont bien posés aux deux échelles. Les premiers tests de recalage réalisés à l'échelle macroscopique, basés sur un accord de la densité entre les deux échelles, sont très encourageants. Ainsi, l'approche présentée semble prometteuse en terme de pertinence physique et en gain de temps (par rapport à un calcul sur la géométrie complète). La prochaine étape de travail portera sur l'adaptation de cette approche en trois dimensions.

6 Références bibliographiques

Références

- [1] D. Durville. Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers, *International Journal of Material Forming*, Springer, pp. 1241-1251, 2010.
- [2] P. Le Tallec, R. Boussetta, E. Lignon. *An enriched model of fiber reinforced thin flexible structures with in plane buckling capabilities*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91, page872–page895, 2012.
- [3] S. S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag New York, 1995