



**HAL**  
open science

# Le modèle hybride MAX-FEM pour l'analyse thermique transitoire des structures des couches minces

Abderrazzaq Ifis, François Bilteryst, Mohammed Nouari

## ► To cite this version:

Abderrazzaq Ifis, François Bilteryst, Mohammed Nouari. Le modèle hybride MAX-FEM pour l'analyse thermique transitoire des structures des couches minces. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722081

**HAL Id: hal-01722081**

**<https://hal.science/hal-01722081>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## Le modèle hybride MAX-FEM pour l'analyse thermique transitoire des structures des couches minces

Abderrazzaq IFIS<sup>1\*</sup>, François BILTERYST<sup>1</sup>, Mohammed NOUARI<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, LEMTA, GIP-InSIC, 27 rue d'Hellieule, 88100, Saint Dié des Vosges, France, [abderrazzaq.ifis@insic.fr](mailto:abderrazzaq.ifis@insic.fr)

**Résumé** — Un modèle hybride est proposé pour l'analyse thermique multi-échelles des assemblages sans raffinement du maillage au voisinage de la couche mince. Le modèle est un couplage de la méthode analytique des développements asymptotiques raccordées (MAE) et la méthode numérique des éléments finis étendus (X-FEM). Ce couplage, dit MAX-FEM [1], consiste à intégrer la perturbation issue de l'approche MAE dans la partie d'enrichissement de la formulation X-FEM. Le modèle proposé est programmé sous MATLAB et intégré dans ABAQUS sous forme d'une subroutine UEL. Des analyses thermiques transitoires unidimensionnelles et bidimensionnelles sont présentées pour des structures avec couches minces.

**Mots clés** — MAE, X-FEM, MAX-FEM, couche minces.

Nomenclature			
		<b>T</b>	Vecteur des températures nodales
$T$	Température extérieure	<b>Q</b>	Vecteur de chargement thermique
$T^0$	Température du problème homogène	<b>KT</b>	Matrice de conductivité
$T^1$	Premier ordre de perturbation	<b>CT</b>	Matrice de capacité
$L$	La longueur de l'assemblage	$\lambda_{th1}, \lambda_{th2}$	Conductivités thermiques du substrat et de la couche mince
$e$	Épaisseur de la couche mince	$\rho_1, c_{p1}$	Densité et capacité calorifique du substrat
$\lambda, \mu$	Coefficients de Lamés	$\varepsilon = e/L$	Caractéristique de l'interface

### 1. Introduction

L'intégration de couches minces au sein des structures mécaniques relève souvent du développement de procédés innovants de fabrication dans la plupart des domaines industriels de pointe. En contrepartie, elles se doivent d'assurer les fonctions sensibles, telles que par exemple l'assemblage (soudage, brasage et collage) ou le revêtement d'outillages. Des performances thermomécaniques que ces couches procurent aux structures est né un grand besoin en termes de modélisation pour la simulation du comportement de ces structures finement hétérogènes. Pourtant, la plupart des approches théoriques et méthodes numériques développées pour cet objectif présentent certaines limitations. En effet, tantôt les joints sont modélisés en utilisant des hypothèses de simplification dans le cas des approches théoriques, tantôt l'utilisation des éléments finis classiques ou d'alternatives numériques (éléments frontière, méthodes sans maillage,...etc.) présente des difficultés en termes de maillage et d'implémentation numérique. Le présent travail applique le nouveau modèle MAX-FEM [1] à la modélisation thermique des couches minces sans raffinement de maillage.

## 1.1 Méthodes de modélisation des couches minces

Ces dernières années, plusieurs travaux se sont intéressés à la modélisation des couches minces et des assemblages adhésifs. Dans leurs livres « Adhesive joint in engineering », Adams et al. [2], ont illustré l'importante utilisation des assemblages adhésifs dans les secteurs industriels les plus évolués ainsi qu'ils ont présenté les différentes approches de modélisation de ce type de structure. Plusieurs autres travaux se sont confrontés à la même problématique dans l'objectif d'approximer les champs thermiques et mécaniques dans les assemblages contenant des couches minces en utilisant des approches analytiques ou des méthodes numériques basées sur la Méthode des Eléments Finis (FEM) (Volkerson [3], Carpenter [4], Spencer et al. [5], Edlund and Klarbring [6], Mortensen [7] et Lazard [8]).

Dans le cas des approches théoriques, la majorité des modèles sont limités à des problèmes moins complexes en termes de géométrie et de chargement, ou encore basés sur des approximations et des hypothèses simplificatrices. Tandis que pour les méthodes basées sur les FEM, la présence de la couche mince impose un maillage avec un nombre important d'éléments dans la direction de l'épaisseur des joints.

Afin de surmonter ses limites, plusieurs modèles analytiques basés sur les développements asymptotiques ont été développés. En ayant recours à des approches mathématiques, ces modèles permettent de donner, à différentes échelles, une approximation de la solution globale des structures contenant des couches minces, voir Geymonat [9], Leguillon [10], Krasucki [11], Schmidt [12]. Cependant, la difficulté de ces approches réside dans leur implémentation numérique. En effet, plusieurs simulations numériques alternées doivent être effectuées afin de calculer les différents termes des développements asymptotiques introduits par ces approches.

Par ailleurs, des méthodes numériques plus évoluées permettent de traiter le problème des couches minces sans raffinement de maillage, voir Sussmanna et al. [13], Nguyen [14]. Ces méthodes introduisent des nouveaux éléments spécifiques traitant la couche mince comme étant une interface de discontinuité qui crée un saut des champs calculés. Ainsi la solution locale n'est pas donnée par le calcul. Comme exemples de ces éléments finis spécifiques, nous citons les éléments d'interface [13-14], les éléments finis étendus X-FEM [15], les éléments MAE-X-FEM [14] et MAX-FEM [1].

Le modèle MAX-FEM [1] couplant les deux méthodes MAE [10] et X-FEM [15] est proposé. L'idée de ce couplage est née en exploitant la similitude entre les deux approximations et en utilisant MAE pour construire la partie enrichissement dans la formulation X-FEM.

## 1.2 Objectif du présent travail

Les travaux présentés s'inscrivent dans la continuité des travaux antérieurs présentés dans [1] où le modèle MAX-FEM est introduit pour la modélisation des couches minces (joint brasé, colle, revêtement, ...). Ici, ce modèle est étendu à l'analyse thermique transitoire d'assemblages intégrant des couches minces internes. En outre, la même procédure peut être appliquée pour la modélisation des revêtements.

L'extension du modèle MAX-FEM consiste en une formulation éléments finis spécifique pour l'approximation du champ de température dans les assemblages. Cette formulation est programmée sous MATLAB, et aussi intégrée à ABAQUS via la subroutine UEL. Ces deux codes sont par la suite utilisés pour effectuer des analyses thermiques transitoires pour des assemblages unidimensionnels et bidimensionnels. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution FEM standard obtenue sous les mêmes codes en maillant finement le joint.

## 3. Le modèle *MAX-FEM*

La méthode X-FEM [14] représente un outil très efficace qui traite les problèmes singuliers. Leur introduction a permis de surmonter les limitations de la méthode FEM standard. En effet, au lieu de raffiner et de mettre à jour la topologie du maillage afin de décrire la singularité à chaque incrément, cette dernière est décrite par un enrichissement des éléments finis standard en utilisant des fonctions et

des paramètres spécifiques. La formulation classique de la méthode X-FEM est donnée pour le champ thermique par :

$$T(x) = \sum_i^N N_i(x) T_i + \sum_k^{N_{enr}} N_k(x) \psi_k(x) b_k \quad (1)$$

où le premier membre décrit la solution non perturbée approchée par la formulation standard FEM, tandis que le second terme, dit d'enrichissement, permet d'introduire, à l'aide des fonctions  $\psi_k$  et des paramètres d'enrichissement  $b_k$ , la perturbation sur  $N_{enr}$  nœuds localisés dans son voisinage.

Le modèle MAX-FEM [1] se base sur la formulation X-FEM, elle-même construite, pour l'enrichissement des éléments spécifiques, à partir de la méthode des Développement Asymptotiques Raccordés (MAE). En effet, le modèle substitue la couche mince par une interface de discontinuité, voir Figure 1.

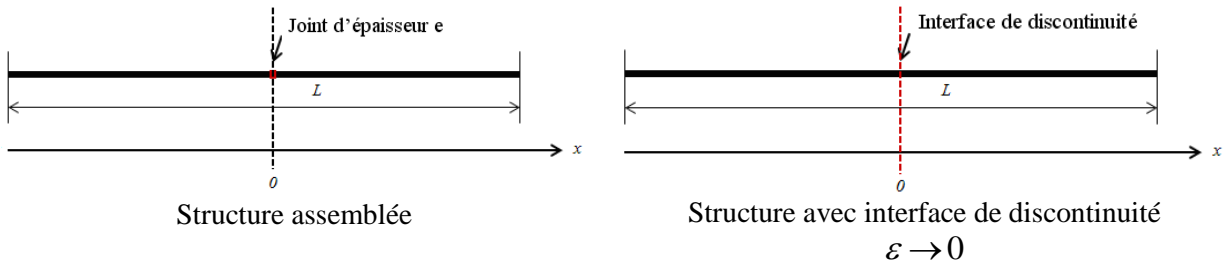


Fig. 1. Modèle MAX-FEM avec interface de discontinuité.

Un maillage FEM standard est alors appliqué aux éléments loin de l'interface, tandis que les éléments contenant la position de l'interface sont eux enrichis, voir Figure 2.

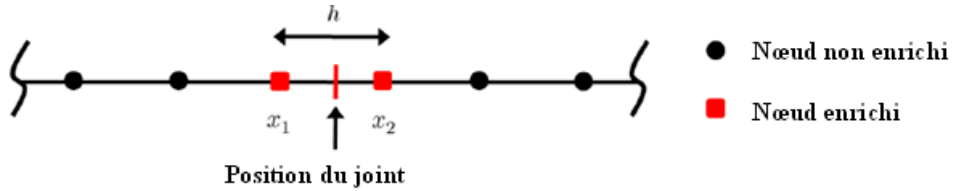


Fig. 2. La discrétisation éléments finis considérée par le modèle MAX-FEM

La formulation éléments finis proposée ici est analogue à celle introduite pour le champ de déplacement dans [1]. Ainsi, l'approximation donnée pour le champ de température est:

$$T(x) = \sum_i^N N_i(x) T_i^0 + \sum_i^N N_i(x) H(x_i) b_k \quad (2)$$

$H$  étant la fonction Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Et  $b_k$  sont les paramètres d'enrichissement construits en utilisant la méthode MAE. De ce fait, ces derniers sont liés au saut de température généré par interface de discontinuité introduite :

$$b_k = q_k \frac{1}{2} (1-h) T \quad (4)$$

Avec :

$$q_1 = \frac{|x_2|}{h}, \quad q_2 = \frac{|x_1|}{h} \quad \text{and} \quad q_1 + q_2 = 1$$

Le saut de température est calculé en utilisant la méthode MAE, voir [1]:

$$T = \varepsilon \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\partial T^0}{\partial x}(0) = c_{th} \frac{\partial T^0}{\partial x}(0) = c_{th} \phi \quad (5)$$

La formulation éléments finis proposée dans l'équation 2 est ensuite utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur en employant un schéma d'intégration explicite ou implicite (Equation 6). Les matrices de capacité et de conductivité, ainsi que le vecteur de chargement, sont alors calculés en suivant l'algorithme MAX-FEM, voir [1].

$$\text{schéma implicite: } \left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{K} \right) \mathbf{T}^{n+1} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}^n + \mathbf{Q}^{n+1} \quad (6)$$

$$\text{schéma explicite: } \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{K} \right) \mathbf{T}^n + \mathbf{Q}^{n+1}$$

La stabilité du schéma explicite est vérifiée par la condition exprimée dans l'équation 7.

$$\frac{1}{6} < \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} \quad (7)$$

Ainsi, l'incrément du temps  $\Delta t$  est fixé en respectant cette condition. De ce fait, le temps de calcul est lié à la taille du maillage  $\Delta x$ . Par conséquent, le gain sur le maillage du modèle MAX-FEM décrit dans [1] se confirme, ici, par la réduction significative du temps de calcul pour des analyses transitoires. Ceci est l'objectif principal de l'étude proposée.

## 4. Exemples numériques et discussion

Les premiers exemples considérés présentent l'analyse thermique transitoire de structure contenant des couches minces. Dans ce travail, deux analyses, uni- et bidimensionnelle sont considérées. L'implémentation numérique du modèle est effectuée sous MATLAB pour les applications unidimensionnelles et sous forme d'une UEL subroutine sous ABAQUS pour l'application bidimensionnelle. Les solutions obtenues par le modèle MAX-FEM sont ensuite comparées avec les résultats donnés par la FEM standard en maillant finement la couche mince sous les mêmes codes.

### 3.1 Analyse explicite d'un assemblage brasé unidimensionnel

Pour cette première application, nous considérons un assemblage à un seul joint. Le rapport des conductivités thermiques ne présente pas une source de perturbation supplémentaire pour cette application. Les données géométriques et matériaux de l'analyse sont données par la figure 3.

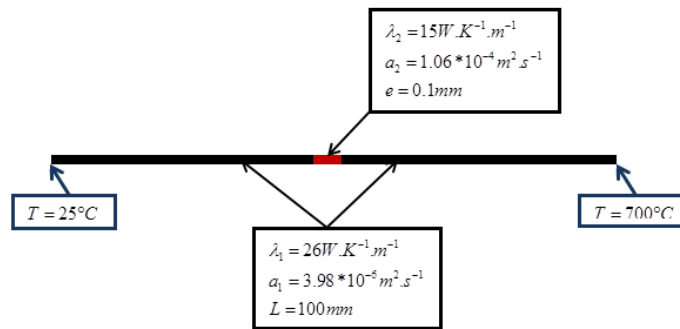


Fig. 3. Assemblage brasé à un seul joint sous un chargement thermique.

Les données du maillage et du calcul éléments finis sont données par le tableau ci-dessous :

	$h_{min}$	Nombre de nœuds	$\Delta t$	Temps de calcul
FEM	0.1mm	35	0.0005s	11 mn
MAX-FEM	3mm	33	0.12s	Instantané

Tableau 1. Données du maillage.

Le modèle ainsi que la FEM sont programmés sous MATLAB. L'évolution de la température dans l'assemblage est donnée pour plusieurs instants : 50, 100, 200, 500, 1000 et 2000s, voire (Figure 4).

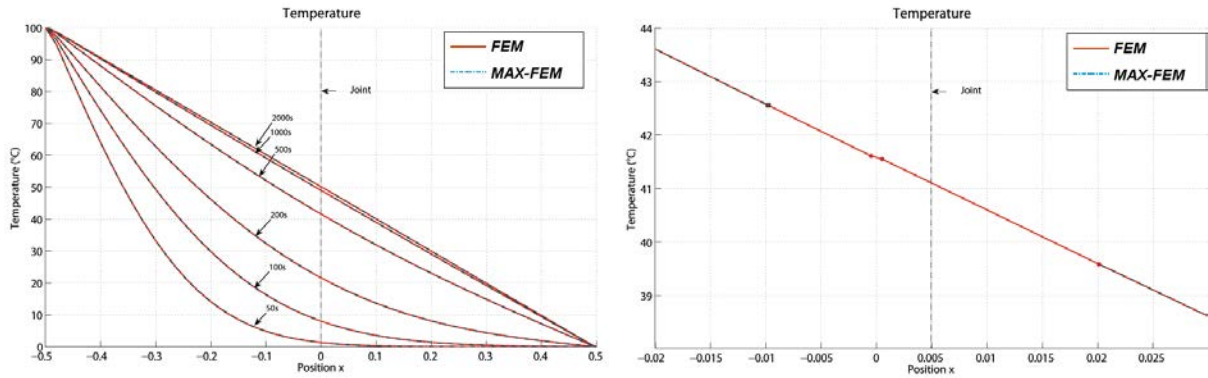


Fig. 4. Distribution de la température dans l'assemblage brasé.

Afin de contrôler la précision du modèle, nous comparons l'évolution de la température dans le temps pour le premier nœud enrichi. Cette comparaison est donnée par la figure 5.

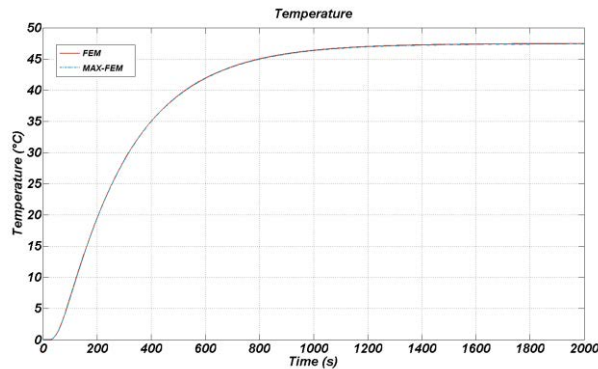


Fig. 5. Evolution de la température dans un nœud enrichi.

Des deux figures 3 et 4 nous constatons que le modèle MAX-FEM reproduit la solution FEM dès le premier nœud enrichi. Par ailleurs, à partir du tableau 1, nous relevons un gain considérable en termes de temps de calcul. En effet, la solution MAX-FEM est obtenue instantanément alors que la FEM prend 11mn de calcul.

Dans cet exemple un seul joint est considéré, et le rapport des conductivités thermiques n'est pas perturbant. Dans l'application qui suit, nous considérons plusieurs joints avec des faibles conductivités thermiques des joints.

### 3.2 Analyse explicite d'un assemblage brasé à plusieurs joints

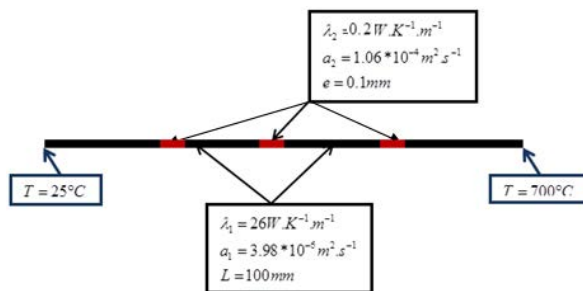


Fig. 6. Assemblage brasé à plusieurs joints sous un chargement thermique.

La deuxième application consiste à décrire la distribution de la température dans l'assemblage brasé à plusieurs joints présenté ci-dessus. Pour l'instant 200s, les deux solutions obtenues par le modèle MAX-FEM et la FEM sont présentées. De plus, la solution FEM obtenue pour une structure monobloc est présentée dans la même figure 7.

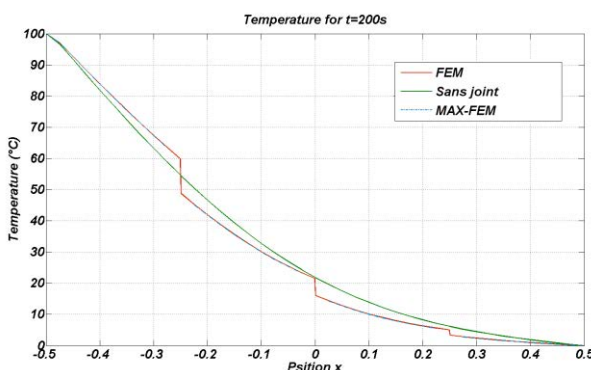


Fig. 7. Distribution de la température dans l'assemblage à l'instant 200s.

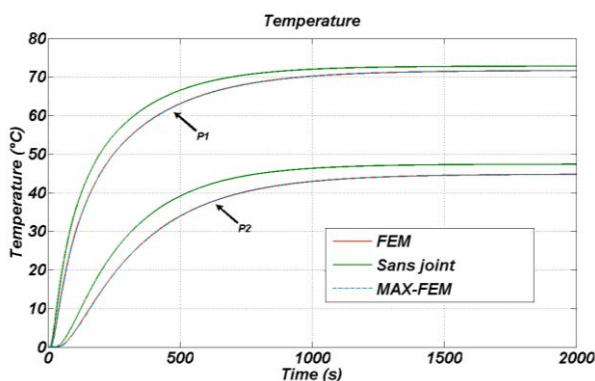


Fig. 8. Evolution de la température dans le premier nœud enrichi.

Des deux figures, nous constatons que le modèle reproduit, avec grande précision, la solution FEM sans raffinement de maillage et ainsi en minimisant le temps de calcul. De plus, la comparaison avec la structure « sans joints » illustre l'importance de modéliser l'assemblage en tenant compte de la présence des joints. En effet, la présence de ces derniers influence de manière considérable le comportement de l'assemblage. Par ailleurs, aucun écart sensible entre le modèle proposé et la solution FEM de référence n'est constaté malgré le rapport significatif des conductivités des différents substrats. Pourtant, le calcul MAE repris ici affiche un domaine de validité sensible au rapport des caractéristiques matériau retenues. Un cas d'étude à ce sujet est présenté dans [9].

### 3.3 Analyse implicite d'un assemblage brasé bidimensionnel

Dans cette troisième application, nous étendons le modèle unidimensionnel pour décrire le comportement d'un assemblage brasé bidimensionnel sous un chargement thermique comme présenté dans la Figure 9. La mise en œuvre du modèle bidimensionnel est présentée dans [1].

Pour cette étude, le schéma d'Euler implicite (Equation 6) est utilisé, et une analyse thermique transitoire est effectuée sous ABAQUS en utilisant les deux méthodes FEM et MAX-FEM.

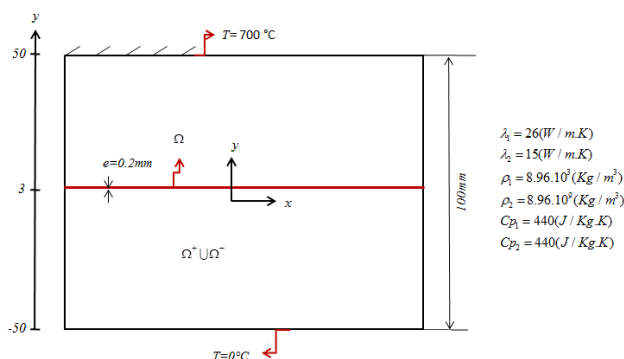


Fig. 9. Assemblage brasé sous chargement thermomécanique.

Afin de comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes, nous représentons l'évolution de la température dans la section  $x = -30\text{mm}$ , voir Figure 10.

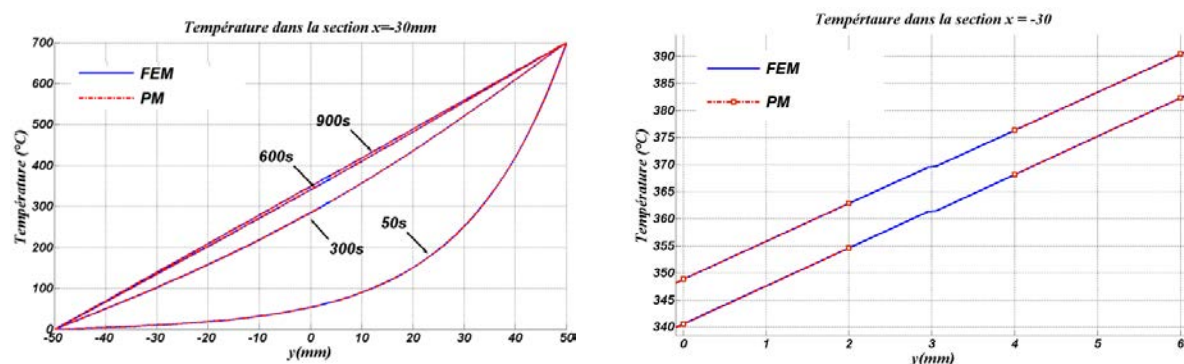


Fig. 10. Evolution de la température dans la section  $x = -30\text{mm}$ .

Ces résultats montrent que le modèle MAX-FEM reproduit, toujours, la solution nodale au premier nœud enrichi sans aucun raffinement de maillage et avec un temps de calcul court.

## Conclusion

Les structures contenant des couches minces ne peuvent être traitées comme des structures homogènes, notamment en présence d'un rapport de conductivités thermiques important. Et l'utilisation de la FEM standard demeure très coûteuse en temps de calcul.

Dans le présent travail, nous avons fait appel au modèle hybride MAX-FEM couplant MAE et X-FEM. Ce dernier, permettant de décrire le comportement des structures contenant des couches minces, est utilisé pour décrire l'évolution du champ de température dans les assemblages à un seul et plusieurs joints. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenue par la FEM. Cette comparaison montre une grande précision du modèle, et une optimisation significative du maillage et du temps de calcul dans le cas de l'approche explicite. La pertinence du travail présenté peut être par ailleurs directement confrontée à d'autres études récentes dédiées à la modélisation des couches minces par des couplages asymptotique/numérique [13].

Dans ce travail, seul les assemblages sont étudiés, mais l'approche peut être appliquée aux revêtements avec un enrichissement spécifique. De plus, une extension du modèle est envisagée pour tenir compte de certains phénomènes locaux qui peuvent être présents au voisinage de la couche mince.

## Références

- [1] A. Ifis, F. Bilteryst, M. Nouari, Transient thermomechanical analysis of assembly structures with brazed joints using a hybrid "MAX-FEM" model, Finite Elements in Analysis and Design, (à paraître).



- [2] R.D. Adams, J. Comyn, W.C. Wake, *Structural Adhesive Joints in Engineering*, second ed., Chapman and Hall, London, 1997.
- [3] Volkersen Die, Niekraft vertleilingin Zugheans pruchten mit Konstanten Laschen quersritten, *Luftfahrtfoeshing*, 15 (1938) 41–7.
- [4] WC Carpenter, Finite element analysis of bonded connection, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 6 (1973) 450–1.
- [5] A.J.M. Spencer, Three-dimensional elasticity solutions for stretching of inhomogeneous and laminated plates. In: Eason, G., Ogden, R.W. Eds., *Elasticity, Math, Methods and Applications*, 1990,. 347–356.
- [6] U. Edlund, A. Klarbring A, Analysis of elastic and elastic-plastic adhesive joints using a mathematical programming approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78 (1990) 19-47.
- [7] F. Mortensen, OT Thomsen, Analysis of adhesive bonded joints: aunified approach, *Composites Science and Technology*, 62 (2002) 1011-31.
- [8] M. Lazard, Transient thermal behaviour of multilayer media: modelling and application to stratified moulds, *Journal of Engineering Physics and Thermo physics*, Vol.79, No.4, 2006,. 758-767.
- [9] G. Geymonat, F Krasucki, S Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4(1999) 201-25.
- [10]D. Leguillon, R. Abdelmoulah, Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 2651-2672.
- [11]F. Krasucki , A. Munch , Y. Ousset, Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joint, *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002) 6355–6383.
- [12]P. Schmidt, Modeling of adhesively bonded joints by an asymptotic method, *International Journal of Engineering Science*, 46 (2008) 1291–1324.
- [13]C. Sussmann , D. Givoli, Y. Benveniste, Combined asymptotic finite-element modeling of thin layers for scalar elliptic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, Issues 47–48 (2011) 3255–3269.
- [14]D.H. Nguyen, M. Lazard, F. Bilteryst, P. Lamesle, G. Dour, Modelling the brazed assembly by the coupling of the eXtended Finite Element and the matched asymptotic development methods, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2, 2008,. 321-331.
- [15]N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 46 (1999) 131–150.