



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-échelle des instabilités à l'aide d'une formulation tridimensionnelle de coque mince

Yu Cong, Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, Julien Yvonnet

## ► To cite this version:

Yu Cong, Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, Julien Yvonnet. Modélisation multi-échelle des instabilités à l'aide d'une formulation tridimensionnelle de coque mince. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722074

**HAL Id: hal-01722074**

**<https://hal.science/hal-01722074>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## **Modélisation multi-échelle des instabilités à l'aide d'une formulation tridimensionnelle de coque mince**

Yu CONG <sup>1</sup>, Saeid NEZAMABADI <sup>2</sup>, Hamid ZAHROUNI <sup>1</sup>, Julien YVONNET <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR CNRS 5508, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier, France

<sup>3</sup> Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Échelle, UMR CNRS 8208, Université Paris-Est, 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France

---

**Résumé** — Nous proposons dans cet article une approche multi-échelle dans le cadre de l'homogénéisation numérique des structures minces. Dans la méthode proposée, la solution des problèmes à conditions aux limites au niveau de la microstructure permet de construire un milieu continu équivalent, que l'on modélise par l'utilisation d'un élément de coque tridimensionnelle. La précision de la méthode est étudiée en prenant pour référence des modèles complets en présence de grands déplacements et de grandes rotations, pour lesquels toutes les hétérogénéités sont maillées.

**Mots clés** — homogénéisation numérique, matériaux hétérogènes, coque, méthode multi-échelle

---

### **1 Introduction**

L'utilisation croissante des structures minces constituées de matériaux hétérogènes est croissante dans divers secteurs industriels, allant de l'aérospatiale, du génie civil, jusqu'aux sports et loisirs. Grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques en termes de rigidité et de légèreté, ces structures permettent potentiellement de remplacer les solutions techniques classiques basées sur des matériaux homogènes. Dans le domaine de la mécanique, ce phénomène a suscité un grand intérêt dans la recherche visant à développer des approches multi-échelles permettant d'étudier les comportements mécaniques de ces matériaux à l'aide de modèles homogénéisés. Or, si l'homogénéisation des matériaux hétérogènes semble être bien maîtrisée dans le cadre volumique [3, 5, 8, 7], elle demeure peu développée pour traiter les problèmes incluant des structures minces [4]. L'objectif de ce travail est donc de proposer une nouvelle approche numérique, permettant de traiter les structures de coque en matériaux hétérogènes multiphasés, tels que les matériaux composites, en présence d'instabilités.

Le principe de l'approche proposée consiste à modéliser les structures minces hétérogènes à l'aide d'un milieu continu formulé par un modèle de coque particulièrement polyvalent, qui intègre des comportements matériels obtenus par pré-intégration des comportements locaux à travers l'épaisseur de la microstructure. Il s'agit d'une formulation de coque tri-dimensionnelle [2, 13, 9], dont le champ de déformation est enrichi par une composante variant linéairement suivant la direction transversale. La cinématique du modèle est décrite de façon à ce que les cinématiques élémentaires puissent être clairement distinguées entre celles décrivant les effets de membrane et celles relatives à la flexion [1]. Cette cinématique particulière offre un lien naturel vers l'échelle microscopique, car elle permet de définir clairement les cinématiques possibles au niveau de la microstructure pour formuler chaque problème à conditions aux limites. La microstructure est modélisée en prenant en compte toutes les hétérogénéités présentes dans la coque à travers l'épaisseur. Par conséquent, les lois de comportement homogènes issues du calcul à l'échelle microscopique seront directement intégrées au modèle macroscopique au niveau des points d'intégration.

Dans cette étude, nous prenons systématiquement en compte la non linéarité géométrique pour le modèle à l'échelle macroscopique. Pour les lois de comportement matériel, nous nous limiterons aux comportements linéaires, en considérant que la déformation microscopique demeure petite. La méthode sera testée et illustrée à l'aide d'exemples numériques incluant de grands déplacements et de grandes rotations. Certains exemples présentent de fortes instabilités, montrant le potentiel de la méthode.

## 2 Stratégie d'homogénéisation

### 2.1 Cinématique du modèle macroscopique

Dans le cadre de la procédure d'homogénéisation proposée, nous modélisons le problème macroscopique à l'aide d'un élément de coque basé sur une formulation tridimensionnelle [13, 2]. La cinématique de cette formulation est représentée par la Figure 1, où les vecteurs de position sont exprimés à l'aide des coordonnées curvilignes  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ , telles que  $\theta^1$  et  $\theta^2$  reposent sur la surface moyenne de la coque, et  $\theta^3$  représente les coordonnées dans l'épaisseur.

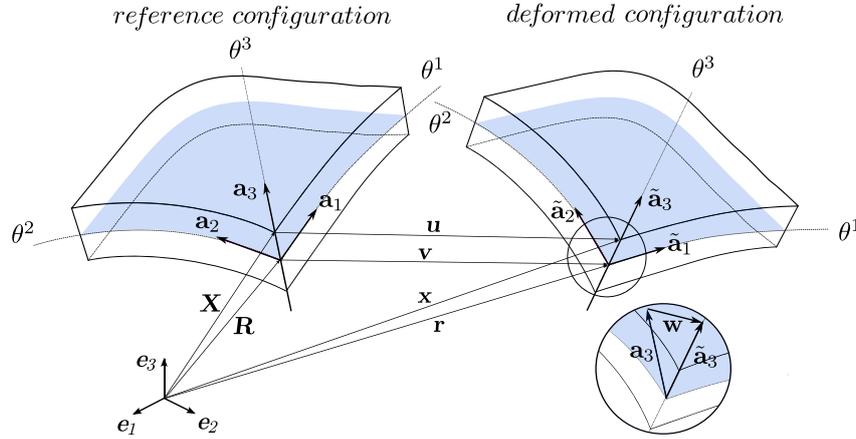


Fig. 1 – Représentation géométrique et cinématique de la coque

Dans la configuration initiale, le vecteur de position  $\mathbf{X}$  d'un point quelconque appartenant à la structure de coque est défini par :

$$\mathbf{X}(\theta^\alpha, \theta^3) = \mathbf{R}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^\alpha), \quad (1)$$

où  $\mathbf{R}(\theta^\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) désigne la projection du point  $\mathbf{X}$  sur la surface moyenne, et  $\theta^3$  décrit sa position dans la direction transversale avec  $\theta^3 \in [-H/2, H/2]$  ( $H$  est l'épaisseur de la coque). La base covariante  $\mathbf{a}$  est définie sur la surface moyenne, avec ses composantes données par  $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$  et  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  étant normale à la surface moyenne. De cette définition, on définit  $\mathbf{G}$ , base covariante au point quelconque  $\mathbf{X}$  de la configuration initiale, dont les composantes sont :

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{X}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}, \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{X}_{,3} = \mathbf{a}_3. \quad (2)$$

De façon similaire, on définit la position du point  $\mathbf{X}$  dans sa configuration actuelle par le vecteur  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x}(\theta^\alpha, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \theta^3 \tilde{\mathbf{a}}_3(\theta^\alpha), \quad (3)$$

où  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{v}$  et  $\tilde{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{w}$  sont issus des vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{a}_3$  transportés dans la configuration actuelle, ce qui nous permet d'obtenir le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ , associé à un point quelconque appartenant à la coque comme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}. \quad (4)$$

Comme pour la définition de  $\mathbf{G}_i$ , voir Eq. (2), on définit la base covariante d'un point quelconque dans la configuration actuelle par dérivation du vecteur de position  $\mathbf{x}$  :  $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ainsi, les composantes de  $\mathbf{g}$  s'écrivent :

$$\mathbf{g}_\alpha = \tilde{\mathbf{r}}_{,\alpha} + \theta^3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,\alpha}, \quad \mathbf{g}_3 = \tilde{\mathbf{a}}_3. \quad (5)$$

Connaissant les bases  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{g}$ , on peut exprimer le gradient de déformation sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i &= \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \\ &= \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha + \theta^3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \tilde{\mathbf{a}}_3 \otimes \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\mathbf{G}^i$  représente la forme contravariante des composantes de la base  $\mathbf{G}$ , et s'obtient en prenant le tenseur métrique  $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ , avec  $\mathbf{G}^i = G^{ij} \cdot \mathbf{G}_j$ . On regroupe ensuite les termes de Eq. (6) suivant l'ordre des coordonnées curvilignes transversales  $\theta^3$ , et on obtient le gradient de déformation qui se décompose en une partie à l'ordre 0 et une partie à l'ordre 1, ainsi :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \theta^3 \mathbf{F}^1 . \quad (7)$$

Dans le cadre de la théorie de coque ici formulée, les quantités physiques énergiquement conjuguées vis-à-vis des variables cinématiques  $\mathbf{F}^0$  et  $\mathbf{F}^1$  sont les contraintes généralisées  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$ . Elles sont calculées à partir du premier tenseur de contraintes Piola-Kirchhoff, en prenant en compte leur distribution suivant l'épaisseur de la coque, ainsi :

$$\mathbf{N} = \int_H \mathbf{P} \, d\theta^3 \quad , \quad \mathbf{M} = \int_H \theta^3 \mathbf{P} \, d\theta^3 , \quad (8)$$

où  $\mathbf{N}$  représente les forces de membrane et  $\mathbf{M}$  désigne les moments. Par la suite, la notation " $\bar{\cdot}$ " sera utilisée pour désigner les variables macroscopiques. Notre problème à l'échelle macroscopique décrit par la structure de coque peut être résumé par la forme faible :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{P}} : \delta \bar{\mathbf{F}} \, d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma , \quad (9)$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  désigne le champ de déplacement macroscopique,  $\mathbf{f}$  représente le vecteur de force imposée, qui est contrôlé par un coefficient de chargement  $\lambda$ . Dans cette expression,  $\bar{\mathbf{P}}$  représentant les contraintes généralisées macroscopiques, sont composées des forces de membrane macroscopiques  $\bar{\mathbf{N}}$  et des moments macroscopiques  $\bar{\mathbf{M}}$ . En considérant Eq. (8), on peut écrire le problème macroscopique comme :

$$\int_A {}^t \bar{\mathbf{N}} : \delta \bar{\mathbf{F}}^0 \, dA + \int_A {}^t \bar{\mathbf{M}} : \delta \bar{\mathbf{F}}^1 \, dA = \lambda \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma , \quad (10)$$

## 2.2 Transition d'échelle et formulation du problème microscopique

Dans le contexte général de l'homogénéisation numérique, les relations de couplage d'échelles s'effectuent en associant le tenseur gradient de déformation macroscopique  $\bar{\mathbf{F}}$  comme la moyenne de sa contrepartie microscopique  $\mathbf{F}$ . Pour l'homogénéisation des coques, les contraintes généralisées  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  (Eq. (8)) sont formulées en incluant leur intégration dans l'épaisseur [1]. En conséquence, seule l'homogénéisation dans le plan de la structure de coque s'avère nécessaire. Ainsi, nous considérons que le tenseur  $\bar{\mathbf{F}}^{\mathcal{L}}(X_3)$  représentant la déformation macroscopique relative à une couche de la microstructure à la position  $X_3$ , est égal à la moyenne des déformations microscopiques  $\mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X_3)$  associées à cette couche,  $X_3$  étant les coordonnées de la couche considérée dans le repère local associé à la microstructure suivant la direction transversale. Nous avons donc :

$$\bar{\mathbf{F}}^{\mathcal{L}}(X_3) = \langle \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X_3) \rangle = \frac{1}{|A^{\mathcal{L}}|} \int_{A^{\mathcal{L}}} \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X_3) \, dA^{\mathcal{L}} . \quad (11)$$

On suppose que la position actuelle d'un point matériel est issue de la superposition d'un champ moyen et d'un champ de fluctuation  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$  due à la présence des hétérogénéités :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{u}} , \quad (12)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{u}}_{,\mathbf{X}} . \quad (13)$$

En introduisant Eq. (13) dans Eq. (11), et par la suite en appliquant le théorème de la divergence, on peut démontrer que l'intégration de la fluctuation  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$  sur la couche considérée à  $X_3$  donne un champ nul :

$$\int_{A^{\mathcal{L}}} \tilde{\mathbf{u}}_{,\mathbf{X}}^{\mathcal{L}}(X_3) \, dA^{\mathcal{L}} = \int_{\partial A^{\mathcal{L}}} \tilde{\mathbf{u}}_{,\mathbf{X}}^{\mathcal{L}}(X_3) \mathbf{N}(X_3) \, d\Gamma^{\mathcal{L}} = 0 , \quad (14)$$

avec  $\mathbf{N}(X_3)$  les vecteurs normaux sortants situés aux limites de la couche considérée. Dans le cadre de ce travail, la condition Eq. (14) est satisfaite par application des conditions limites périodiques sur les bords de la microstructure. Ainsi, nous prenons deux points  $\mathbf{x}^+ \in (\partial A^\mathcal{L})^+$  et  $\mathbf{x}^- \in (\partial A^\mathcal{L})^-$  afin d'y imposer les conditions de périodicité, qui sont relatives aux gradients de déformation macroscopiques de la coque Eq. (7) :

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = (\bar{\mathbf{F}}^0 + X_3 \bar{\mathbf{F}}^1) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), \quad (15)$$

ce qui permet de définir notre problème microscopique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{du}, \delta\mathbf{u}) &= 0 && \text{in } \omega \\ + \text{C.L. : } \mathbf{du}^+ - \mathbf{du}^- &= (\mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + X_3 \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) && \text{on } \partial\omega, \end{aligned} \quad (16)$$

où l'opérateur tangent  $\mathcal{L}$  est défini comme :

$$\mathcal{L}(\mathbf{du}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\omega} {}^t \nabla \mathbf{du} : \mathbb{H}^{(r)} : \nabla \delta\mathbf{u} \, d\omega. \quad (17)$$

Ici, le tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{H}^{(r)}$  donne les lois de comportement de la phase  $(r)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , avec  $\mathbf{P}(\mathbf{X})$  le premier tenseur de contraintes Piola-Kirchhoff associé au point  $\mathbf{X}$ . Par définition, le tenseur  $\mathbb{H}^{(r)}$  est donné par :

$$\mathbb{H}^{(r)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(r)}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}^2}, \quad (18)$$

où  $\Psi^{(r)}$  représente la fonction d'énergie de déformation décrivant le comportement matériel de la phase  $(r)$ . Selon la forme de cette fonction, diverses lois de comportements, linéaires ou non-linéaires, peuvent être prises en compte [12] dans le cadre de notre procédure d'homogénéisation.

Etant donné que le problème (Eq. (16) et Eq. (17)) est linéaire à l'échelle microscopique, sa solution  $\mathbf{du}$  peut être exprimée comme la combinaison linéaire des modes de solution en résolvant indépendamment chaque problème à conditions aux limites défini par Eq. (16). Chaque problème est relatif à une composante du gradient de déformation macroscopique, ce qui donne au total 18 problèmes à résoudre :

$$\begin{aligned} \mathbf{du} &= \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{11}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(11)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{12}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(12)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{13}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(13)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{21}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(21)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{22}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(22)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{23}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(23)}^0 \\ &+ \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{31}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(31)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{32}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(32)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{33}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{(33)}^0 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{11}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(11)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{12}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(12)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{13}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(13)}^1 \\ &+ \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{21}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(21)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{22}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(22)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{23}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(23)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{31}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(31)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{32}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(32)}^1 + \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}_{33}^1 \tilde{\mathbf{u}}_{(33)}^1 \end{aligned} \quad \text{dans } \omega, \quad (19)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^0$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^1$  sont des solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^0, \delta\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \omega \\ \tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^{0+} - \tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^{0-} = \mathbf{X}^{0(ij)} & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^1, \delta\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \omega \\ \tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^{1+} - \tilde{\mathbf{u}}_{(ij)}^{1-} = \mathbf{X}^{1(ij)} & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (21)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{0(11)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), & \mathbf{X}^{0(12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), \\
\mathbf{X}^{0(13)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), & \mathbf{X}^{0(21)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), \\
\mathbf{X}^{0(22)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), & \mathbf{X}^{0(23)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), \\
\mathbf{X}^{0(31)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), & \mathbf{X}^{0(32)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), \\
\mathbf{X}^{0(33)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-), & \mathbf{X}^{1(ij)} &= X_3 \mathbf{X}^{0(ij)}.
\end{aligned}$$

Les exposants  $(ij)$  dans les expressions ci-dessus indiquent que le problème posé correspond aux conditions aux limites relatives à la composante  $\bar{F}_{ij}$  du gradient de déformation macroscopique. On distingue également parmi les composantes  $\bar{F}_{ij}^0$  de l'ordre 0 et celles  $\bar{F}_{ij}^1$  de l'ordre 1. D'une manière différente, nous pouvons exprimer la solution  $\mathbf{du}$  sous la forme :

$$\mathbf{du} = \mathbb{A}^0 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + \mathbb{A}^1 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1, \quad (22)$$

où  $\mathbb{A}^0$  et  $\mathbb{A}^1$  sont des tenseurs d'ordre trois définis comme  $A_{ijk}^0 = \tilde{u}_i^{0(jk)}$  et  $A_{ijk}^1 = \tilde{u}_i^{1(jk)}$ . Par introduction de Eq. (22) dans la définition du tenseur de gradient de déformation microscopique  $\mathbf{dF}$ , nous avons :

$$\mathbf{dF} = \mathbb{A}_{,X}^0 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + \mathbb{A}_{,X}^1 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1, \quad (23)$$

dans laquelle  $\mathbb{A}_{,X}^0$  et  $\mathbb{A}_{,X}^1$  sont des tenseurs d'ordre quatre, que l'on peut identifier comme étant des tenseurs de localisation.

### 2.3 Tenseur d'homogénéisation et résolution du problème macroscopique

Afin d'obtenir la relation de comportement matériel homogénéisé, on considère la relation Eq. (18), ce qui donne :

$$\mathbf{dP} = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{dF}. \quad (24)$$

Par introduction de Eq. (23) dans Eq. (24), on obtient :

$$\mathbf{dP} = \left( \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^0 \right) : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + \left( \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^1 \right) : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1. \quad (25)$$

Les contraintes généralisées sont par définition (Eq. (8)) obtenues en intégrant les contraintes dans l'épaisseur de la coque. En prenant en compte l'expression des contraintes Eq. (25), on obtient :

$$\mathbf{d}\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} \mathbf{dP} \, d\omega = \bar{\mathbb{C}}^1 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + \bar{\mathbb{C}}^2 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1, \quad (26)$$

$$\mathbf{d}\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} X_3 \mathbf{dP} \, d\omega = \bar{\mathbb{C}}^3 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 + \bar{\mathbb{C}}^4 : \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1, \quad (27)$$

où  $\bar{\mathbb{C}}^i$  ( $i = 1..4$ ) représentent les tenseurs d'homogénéisation d'ordre quatre et définis par :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{C}}^1 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^0 \, d\omega, & \bar{\mathbb{C}}^2 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^1 \, d\omega, \\
\bar{\mathbb{C}}^3 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} X_3 \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^0 \, d\omega, & \bar{\mathbb{C}}^4 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\omega} X_3 \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,X}^1 \, d\omega.
\end{aligned}$$

On introduit à ce stade Eq. (26) et Eq. (27) dans Eq. (10), et on obtient la forme finale du problème macroscopique à résoudre :

$$\int_A ({}^t \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 : \bar{\mathbf{C}}^1 : \delta \bar{\mathbf{F}}^0 + {}^t \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1 : \bar{\mathbf{C}}^2 : \delta \bar{\mathbf{F}}^0 + {}^t \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^0 : \bar{\mathbf{C}}^3 : \delta \bar{\mathbf{F}}^1 + {}^t \mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}^1 : \bar{\mathbf{C}}^4 : \delta \bar{\mathbf{F}}^1) dA = d\lambda \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (28)$$

La résolution de ce problème Eq. (28) est basée sur la méthode des éléments finis [2, 9].

### 3 Exemples numériques

#### 3.1 Flexion d'une coque composite élançée

Dans cet exemple, nous étudions la flexion d'une structure mince multiphasée et renforcée par des fibres à section elliptique. Le modèle homogène est modélisé par une coque élançée à 12 éléments, qui incorpore les comportements matériels obtenus à l'aide du calcul multi-échelle effectué au niveau de la microstructure (voir Figure 2).

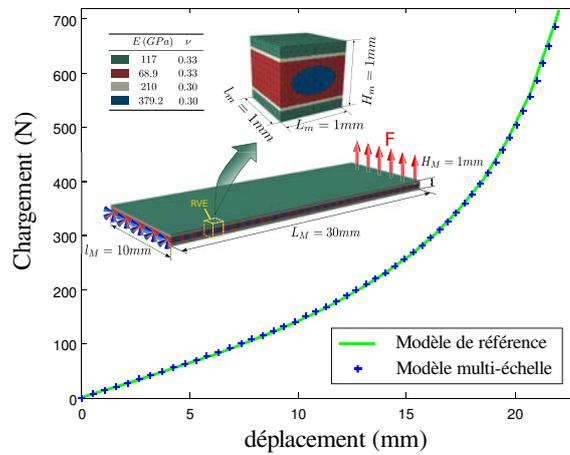


Fig. 2 – Flexion coque composite : comparaison entre le modèle homogénéisé et le modèle complet réalisé à l'aide d'Abaqus [6].

La comparaison s'effectue en prenant pour référence un modèle complet à 500000 ddl réalisé à l'aide du logiciel Abaqus [6]. La très bonne cohérence entre les deux modèles permet de valider la procédure d'homogénéisation. En revanche, le modèle complet a nécessité plus de 30 minutes en temps de calcul avec parallélisation sur 4 cœurs, sur une station de calcul, contre une minute pour le calcul multi-échelle, sur un Pc portable de moyenne puissance.

#### 3.2 Flambage d'un toit mince en composite

Dans ce deuxième exemple, nous étudions le phénomène de flambage lié à une structure de toit mince multi-couche lorsque ce dernier est soumis à un chargement vertical ponctuel au centre de la structure. Les deux courbes de la Figure 3 sont issues des calculs effectués respectivement aux points B et C. Pour chaque calcul, nous comparons le modèle homogénéisé au modèle de référence réalisé avec Abaqus [6] à l'aide de l'outil disponible pour modéliser des structures multi-couches.

Etant donnée la difficulté de modéliser les instabilités en utilisant des éléments solides, nous avons choisi la présente microstructure multi-couche seulement dans le but de faciliter la réalisation du modèle de référence. La procédure proposée peut s'adapter à tout type de microstructure, offrant un grand nombre de possibilités pour les applications.

#### 3.3 Déversement d'une coque mince en composite

Dans cet exemple, nous considérons le flambage latéral d'une coque mince élançée en composite. La géométrie de la structure ainsi que le détail de la microstructure sont décrits dans la Figure 4. Pour le modèle macroscopique, nous utilisons un maillage régulier avec 12 éléments pour modéliser la coque

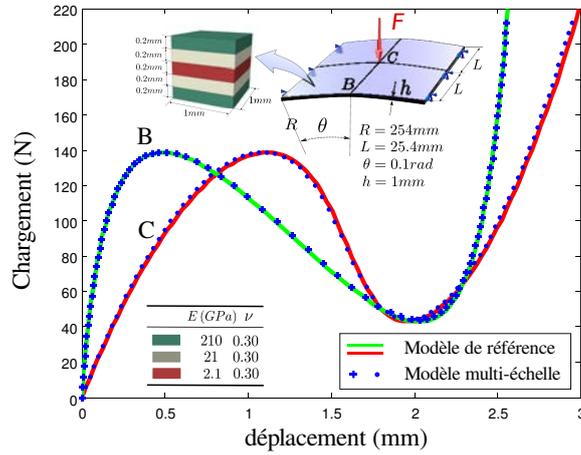


Fig. 3 – Les courbes B et C représentent les déplacements verticaux calculés respectivement aux points correspondants de la structures. Les résultats présentent de bonne cohérence avec le calcul de référence effectué avec Abaqus.

homogénéisée. A l'extrémité libre de la structure où le chargement est appliqué, une petite perturbation de l'ordre de  $1/1000$  de  $F$  est introduite selon la direction hors-plan afin d'éviter le cas d'une bifurcation. Comme pour l'exemple précédent, nous utilisons Abaqus avec son module de modélisation des structures multi-couches pour produire les résultats de référence.

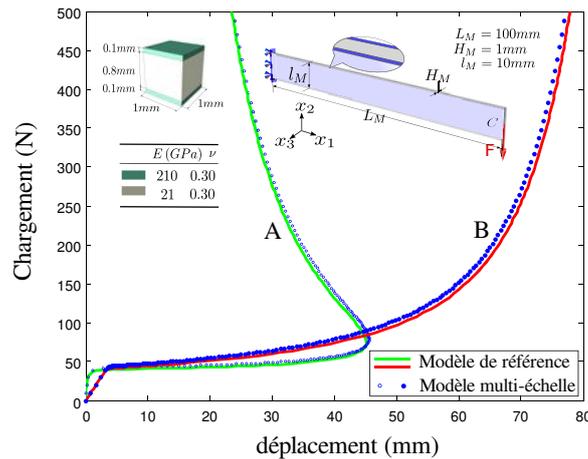


Fig. 4 – Les courbes A et B représentent les déplacements calculés au point C, respectivement dans la direction hors-plan  $\vec{x}_3$  et la direction verticale  $\vec{x}_2$ .

Nous avons calculé la réponse en déplacement du point C (voir Figure 4) en fonction du de la force de chargement  $F$ . Les deux composantes du déplacement, respectivement suivant la direction hors-plan et se trouvant dans le plan de chargement, sont reportées dans la Figure 4 par les courbes A et B. On remarque que les résultats issus du modèle homogénéisé sont en parfaite cohérence avec le modèle de référence.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé dans cette étude une approche multi-échelle dans le cadre de l'homogénéisation numérique permettant de traiter des structures minces multiphasées. La particularité de l'approche est de prendre en compte des instabilités, tel que le flambage. Nous avons testé la méthode sur plusieurs exemples numériques, et avons obtenu des résultats en parfaite cohérence avec ceux issus de la modélisation classique, ce qui prouve la validité de l'approche. Les travaux en cours consistent à étendre la méthode pour prendre en compte les comportements matériels non-linéaires, et de modéliser des structures qui présentent des instabilités au niveau de la microstructure.

## 5 Références bibliographiques

### Références

- [1] M. Bischoff, E. Ramm, *On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation*, International Journal of Solids and Structures , 6933-6960 , 2000
- [2] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl, *Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*, International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2551-2568 , 1994
- [3] D. Caillerie, *Thin Elastic and Periodic Plates*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 159-191, 1984
- [4] E. W. C. Coenen, V. G. Kouznetsova, M. G. D. Geers, *Computational homogenization for heterogeneous thin sheets*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1180–1205, 2010
- [5] F. Feyel, *Multiscale  $FE^2$  elastovisplastic analysis of composite structures*, Computational Materials Science, 344-354, 1999
- [6] Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. *Theory Manual ABAQUS v6.8*, 2008.
- [7] V. G. Kousnetzova, W. A. M. Brekelmans, F. P. T. Baaijens, *An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials*, Computational Mechanics , 37-48 , 2001
- [8] C. Miehe, J. Schröder, J. Schotte, *Computational homogenization analysis in finite plasticity. Simulation of texture development in polycrystalline materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 317-418 , 1999
- [9] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, *Computing finite rotations of shells by an asymptotic numerical method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 71-85 , 1999
- [10] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, *A multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2099-2110 , 2009
- [11] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet , M. Potier-Ferry, *A Multiscale Finite Element Approach for Buckling Analysis of Elastoplastic Long Fiber Composites*, International Journal on Multiscale Computational Engineering , 287-301 , 2010
- [12] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet, *Solving hyperelastic material problems by asymptotic numerical method*, Computational Mechanics , 47 :77-92 , 2011
- [13] C. Sansour, *A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change : Circumventing the use of a rotation tensor*, Archive of Applied Mechanics , 194-216 , 1995