



**HAL**  
open science

## Identification rapide de dispersions matérielles à partir d'un modèle réduit PGD

François Louf, Laurent Champaney

► **To cite this version:**

François Louf, Laurent Champaney. Identification rapide de dispersions matérielles à partir d'un modèle réduit PGD. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722073

**HAL Id: hal-01722073**

**<https://hal.science/hal-01722073>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

## Identification rapide de dispersions matérielles à partir d'un modèle réduit PGD

François LOUF<sup>1</sup>, Laurent CHAMPANEY<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan, ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris, France, louf,champany@lmt.ens-cachan.fr

---

**Résumé** — Dans ce travail, nous proposons d'utiliser un modèle réduit basé sur la PGD pour estimer rapidement la réponse probabiliste d'une structure dont les paramètres matériaux sont incertains. Dans un premier temps, nous montrons comment construire le modèle réduit dans un cadre éléments finis classique. Dans un second temps, nous illustrons sur deux exemples la qualité du modèle réduit PGD construit. Enfin, nous montrons comment ce modèle réduit peut être utilisé dans une approche inverse, pour estimer, via des mesures sur une famille de structures, les dispersions sur des paramètres matériau.

**Mots clés** — Modèle réduit, PGD, recalage de modèles, modèle probabiliste

---

### 1 Contexte

La simulation numérique du comportement mécanique des structures est aujourd'hui devenue incontournable dans la plupart des bureaux d'études. Dans les cas linéaires, il est désormais relativement aisé de garantir à l'utilisateur que la solution approchée est de bonne qualité relativement à la solution du problème de référence. Un certain nombre d'outils ont été développés pour cela au cours des 30 dernières années au travers des estimateurs d'erreur. Par contre, le passage du "réel", au "modèle" pose de réelles difficultés : l'environnement de la structure peut être mal connu ou difficile à représenter (chargement, conditions aux limites), le comportement des liaisons peut être complexe et fortement dépendant du processus d'assemblage (assemblages boulonnés, ou collés par exemple). La prise en compte, dans la validation de la conception, de toutes ces méconnaissances se fait alors *a posteriori*, via des coefficients de sécurité. Mais ces coefficients conduisent très souvent à un sur-dimensionnement. Pour réduire ces marges, dimensionner au plus juste tout en garantissant un niveau de fiabilité donné, il est impératif de prendre en compte d'une manière ou d'une autre les dispersions en entrée du modèle. Parmi les méthodes qui permettent de prendre en compte les incertitudes dans les modèles et obtenir en sortie, des surfaces de réponses ou des intervalles de confiance, on peut distinguer deux grandes familles en fonction de leur capacité ou non à traiter de fortes incertitudes. On peut trouver un état de l'art des méthodes les plus classiques dans [1]. Parmi les méthodes permettant de traiter de fortes incertitudes en entrée, la méthode la plus aisée à implémenter reste la méthode de Monte Carlo mais elle a l'inconvénient majeur d'être très coûteuse en nombre d'évaluations du modèle éléments finis déterministe, et donc en coût de calcul. Les approches de type éléments finis stochastiques [2] sont une alternative mais elles restent coûteuses, notamment lorsque le nombre de variables aléatoires devient important. Pour limiter les coûts de calculs inhérent à la méthode de Monte Carlo, différents auteurs ont cherché à construire, à partir du modèle éléments finis déterministe, un méta-modèle [3, 4]. L'idée est d'évaluer la sortie du modèle déterministe pour différents jeux de paramètres en entrée, et de construire une surface de réponse par interpolation à partir des points obtenus. Ce méta-modèle est ensuite bien plus rapide à évaluer lors de la simulation de Monte Carlo. D'autres méthodes permettant la réduction de modèles, et basées sur une représentation à variables séparées, ont été l'objet de développements spectaculaires ces dix dernières années : la POD (Proper Orthogonal Decomposition) présentée de manière pédagogique dans [5] et initialement développée pour la compression de données, et la PGD (Proper Generalized Decomposition) [6, 7], dont l'origine réside dans l'approximation radiale de la méthode LATIN [8, 9]. Les travaux présentés ici proposent donc d'utiliser la PGD pour construire un méta-modèle d'une structure dont le comportement dépend d'un certain nombre de paramètres, afin d'évaluer, dans un deuxième temps, via une simulation de Monte Carlo, la réponse probabiliste de la structure à un chargement donné. Le modèle réduit est

ensuite utilisé pour obtenir des informations probabilistes à partir de recalages multiples.

## 2 Présentation du problème de référence

On considère une structure élastique sous l'hypothèse des petites perturbations. Une distribution surfacique d'effort  $\underline{F}_d$  est imposée sur la frontière  $\partial_2\Omega$  et un déplacement  $\underline{U}_d$  est imposé sur  $\partial_1\Omega$ . Des forces volumiques  $\underline{f}_d$  sont également imposées sur tout  $\Omega$ . On considère que le domaine  $\Omega$  peut être divisé en  $n_E$  zones  $(\Omega_l)_{l=1..n_E}$  où les propriétés matérielles sont homogènes. Les paramètres du problème sont  $\underline{M}$  pour le domaine  $\Omega$  et les différents  $(e_l)_{l=1..n_E}$  pour les modules d'élasticité des différentes zones. Les espaces associés à ces paramètres sont les  $E_l = [e_{lmin}, e_{lmax}]$ ,  $\forall l = 1..n_E$ .

### 2.1 Formulation éléments finis

On introduit les espaces  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \underline{U} \in [H^1(\Omega)]^3, \quad \underline{U}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \right\} \quad \mathcal{V} = \left\{ \underline{V} \in [H^1(\Omega)]^3, \quad \underline{V}|_{\partial_1\Omega} = \underline{0} \right\}$$

On introduit un maillage  $\Omega^h$  du domaine  $\Omega$  et une approximation éléments finis du déplacement  $\underline{U}$  ainsi que deux espaces  $\mathcal{U}^h$  et  $\mathcal{V}^h$  qui sont associés à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  respectivement. Le problème de référence peut être formulé sous forme discrète : trouver  $\{U\} \in \mathcal{U}^h$  tel que :

$$\{V\}^T [K] \{U\} = \{V\}^T \{F\} \quad \forall \{V\} \in \mathcal{V}^h \quad (1)$$

### 2.2 Formulation globale sur les $n_E$ espaces $E_l$

On introduit les  $n_E$  espaces

$$\mathcal{E}_k = \left\{ \underline{V}, \int_{E_k} \|\underline{V}(\cdot, (e_l)_{l=1..n_E})\|_{H^1(\Omega)}^2 \mathbf{d}e_k < +\infty \right. \\ \left. \forall ((e_l)_{l=1..n_E, l \neq k}) \in \left( \bigotimes_{l=1, l \neq k}^{n_E} E_l \right) \right\}, \quad \forall k = 1..n_E \quad (2)$$

La formulation globale sur les  $n_E$  espaces  $E_l$  du problème discrétisé consiste à trouver  $\underline{U} \in \mathcal{U}^h \otimes \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_{n_E}$  tel que :

$$A(\{U\}, \{V\}) = L(\{V\}) \quad \forall \underline{V} \in \mathcal{V}^h \otimes \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_{n_E} \quad (3)$$

$$\text{avec} \quad A(\{U\}, \{V\}) = \int_{\bigotimes_{l=1}^{n_E} E_l} \{V\}^T [K] \{U\} (\mathbf{d}e_l)_{l=1..n_E} \\ L(\{V\}) = \int_{\bigotimes_{l=1}^{n_E} E_l} \{V\}^T \{F\} (\mathbf{d}e_l)_{l=1..n_E}$$

## 3 Introduction d'un modèle réduit

### 3.1 Représentation à variables séparées

On cherche une approximation du problème (3) sous la forme d'une somme de produits de fonctions d'espaces et des paramètres  $e_l$  :

$$\{U((e_l)_{l=1..n_E})\} \approx \{U_m(e_l)_{l=1..n_E}\} = \sum_{p=1}^m \{\Psi_p\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} \lambda_{lp}(e_l) \right) \quad (4)$$

où  $m$  désigne l'ordre de la représentation. Les fonctions  $(\lambda_l)_{l=1..n_E}$  sont approchées par des fonctions éléments finis  $\lambda_l^h(e_l) = [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \quad \forall l \in \{1..n_E\}$  où  $[N_l(e_l)]$  représente le vecteur des fonctions de forme associées au maillage 1D  $E_l^h$  du domaine  $E_l$  et  $\{\lambda_l\}$  représente les valeurs nodales de  $\lambda_l^h$ . Les espaces éléments finis associés sont notés  $(\mathcal{E}_l^h \subset \mathcal{E}_l)_{l=1..n_E}$ .

### 3.2 L'approximation PGD

On suppose que la décomposition à l'ordre  $(m-1)$  est connue :

$$\{U_{m-1}\} = \sum_{p=1}^{m-1} \{\Psi_p\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_{lp}\} \right) \quad (5)$$

Le  $(n_E + 1)$ -uplet suivant  $(\{\Psi\}, (\{\lambda_l\})_{l=1..n_E}) \in \mathcal{U} \otimes \left( \bigotimes_{l=1}^{n_E} \mathcal{E}_l \right)$  est cherché tel qu'il vérifie les critères d'orthogonalité suivants :

$$A(\{U_{m-1}\} + \{\Psi\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right), \{V\}) = L(\{V\}), \quad (6)$$

avec

$$\{V\} = \left( \{\Psi\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right) \right)^*, \quad \forall (\{\Psi\}^*, (\{\lambda_l^*\})_{l=1..n_E}) \in \mathcal{V}^h \otimes \left( \bigotimes_{l=1}^{n_E} \mathcal{E}_l^h \right)$$

On introduit alors deux types d'application :

- $S_m : \left( \bigotimes_{l=1}^{n_E} \mathcal{E}_l^h \right) \rightarrow \mathcal{U}^h$  est l'application qui associe les fonctions des paramètres  $(e_l)_{l=1..n_E}$  à la fonction d'espace  $\{\Psi\} = S_m((\{\lambda_l\})_{l=1..n_E})$  définie par :

$$\begin{aligned} A \left( \{U_{m-1}\} + \{\Psi\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right), \{\Psi^*\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right) \right) \\ = L \left( \{\Psi^*\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right) \right) \quad \forall \{\Psi^*\} \in \mathcal{V}^h \end{aligned} \quad (7)$$

- $P_{mk} : \mathcal{U}^h \otimes \left( \bigotimes_{l=1, l \neq k}^{n_E} \mathcal{E}_l^h \right) \rightarrow \mathcal{E}_k^h$  est l'application qui associe la fonction d'espace  $\{\Psi\}$  et les fonctions des paramètres  $(\{\lambda_l\})_{l=1..n_E, l \neq k}$  à une fonction du paramètre  $e_k$   $\{\lambda_k\} = P_{mk}(\{\Psi\}, (\{\lambda_l\})_{l=1..n_E, l \neq k})$  définie par :

$$\begin{aligned} A \left( \{U_{m-1}\} + \{\Psi\} \left( \prod_{l=1}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right), \{\Psi\} [N_k(e_k)] \{\lambda_k^*\} \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right) \right) \\ = L \left( \{\Psi\} [N_k(e_k)] \{\lambda_k^*\} \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n_E} [N_l(e_l)] \{\lambda_l\} \right) \right) \quad \forall \{\lambda_k^*\} \in \mathcal{E}_k^h \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.3 Formes discrètes des applications $S_m$ et $P_{mk}$

Dans le cas de matériaux élastiques isotropes dans chaque zone  $\Omega_l$ , la matrice de raideur s'exprime comme suit :

$$[K] = \sum_{i=1}^{n_E} e_i [K_i] \quad (9)$$

à partir des paramètres  $(e_i)_{i=1..n_E}$  et des matrices de raideur  $[K_i]$  associée à la zone  $\Omega_i$ , et calculées avec un module d'élasticité unitaire.

#### 3.3.1 Forme discrète de l'application $S_m$

On peut montrer que la fonction d'espace  $\{\Psi\} = S_m((\{\lambda_l\})_{l=1..n_E})$  est solution du système linéaire :

$$[A_{\lambda\lambda}] \{\Psi\} = \{Q_\lambda\} - \sum_{p=1}^{m-1} [A_{\lambda\lambda_p}] \{\Psi_p\} \quad (10)$$

Dans cette expression les matrices  $[A_{\lambda_p\lambda_q}]$  et le vecteur  $\{Q_\lambda\}$  sont donnés par :

$$[A_{\lambda_p\lambda_q}] = \sum_{i=1}^{n_E} (\{\lambda_{pi}\}^T [\widetilde{M}_i] \{\lambda_{qi}\}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_E} (\{\lambda_{pj}\}^T [M_j] \{\lambda_{qj}\}) [K_i] \quad (11)$$

$$\{\mathcal{Q}_\lambda\} = \{F\} \prod_{j=1}^{n_E} (\{1_l\}^T [M_j] \{\lambda_j\}) \quad (12)$$

où  $\{1_l\}$  désigne un vecteur unitaire défini sur le maillage 1D de  $E_l$ . Les matrices  $[M_l]$  et  $[\widetilde{M}_l]$  sont les matrices de masse associées au maillage 1D du domaine  $E_l$  respectivement calculées avec une densité unitaire uniforme et une densité linéaire  $e_l$ .

### 3.3.2 Forme discrète de l'application $P_{mk}$

On peut montrer que la fonction  $\{\lambda_k\} = P_{mk}(\{\psi\}, (\{\lambda_l\})_{l=1..n_E, l \neq k})$  du paramètre  $e_k$  est solution du système linéaire :

$$[A_{\psi\psi}] \{\lambda_k\} = \{Q_\psi\} - \sum_{p=1}^{m-1} [A_{\psi\psi_p}] \{\lambda_{pk}\} \quad (13)$$

Dans cette expression les matrices  $[A_{\psi_p\psi_q}]$  et le vecteur  $\{Q_\psi\}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} [A_{\psi_p\psi_q}] &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n_E} \{\psi_p\}^T [K_i] \{\psi_q\} (\{\lambda_{pi}\}^T [\widetilde{M}_i] \{\lambda_{qi}\}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq k}}^{n_E} (\{\lambda_{pj}\}^T [M_j] \{\lambda_{qj}\}) [M_k] \\ &+ \{\psi_p\}^T [K_k] \{\psi_q\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_E} (\{\lambda_{pj}\}^T [M_j] \{\lambda_{qj}\}) [\widetilde{M}_k] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\{\mathcal{Q}_\lambda\} = \{F\}^T \{\psi\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_E} (\{1_j\}^T [M_j] \{\lambda_j\}) [M_k] \{1_k\} \quad (15)$$

## 3.4 Algorithme

Un  $(n_E + 1)$ -uplet  $(\{\psi\}, (\{\lambda_l\})_{l=1..n_E})$  vérifie (6) si et seulement si  $\{\psi\} = S_m((\{\lambda_l\})_{l=1..n_E})$  et  $\{\lambda_k\} = P_{mk}(\{\psi\}, (\{\lambda_l\})_{l=1..n_E, l \neq k})$ ,  $\forall k = 1..n_E$ . Ce problème non-linéaire est résolu en utilisant une méthode de point fixe.

## 4 Première application : cas d'un treillis

Le premier exemple est une structure treillis articulée à trois barres, hyperstatique, pour laquelle la solution exacte est connue. La structure est représentée sur la figure 1. Puisque la structure est hyperstatique, la solution en contrainte est dépendante du chargement, mais également des modules d'élasticité  $e_1, e_2$  et  $e_3$ .

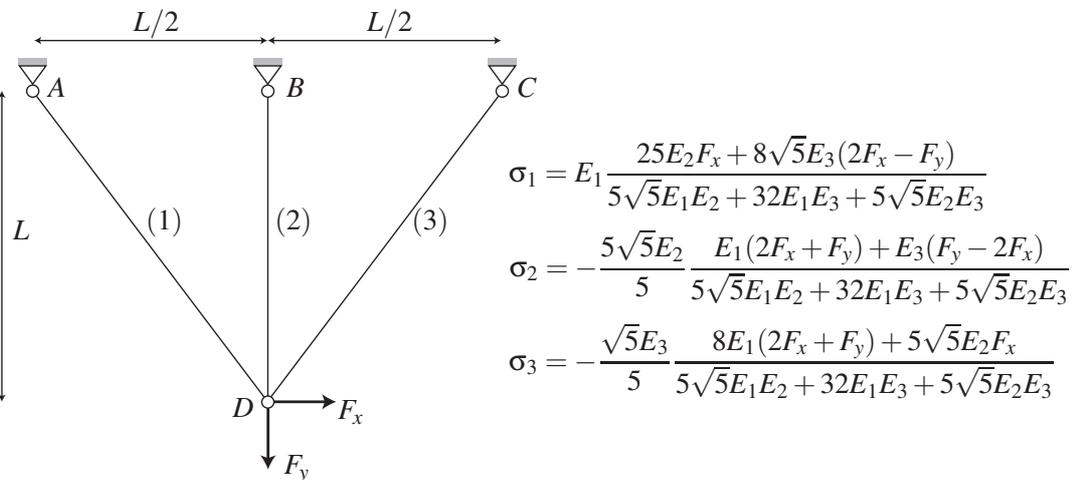


Fig. 1 – La géométrie du treillis, les conditions aux limites et la solution exacte en contrainte

On considère que la défaillance d'une barre ( $i$ ) correspond à la condition en contrainte  $|\sigma_i| > \sigma_i^e$  et que la variabilité de chaque module d'élasticité  $e_i$  peut être modélisée par une variable aléatoire  $\xi_i$  associée à une densité de probabilité uniforme. La probabilité de défaillance du treillis est alors :

$$p_{def} = \int_D d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

où  $D$  est le domaine de défaillance :

$$D = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) / |\sigma_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| > \sigma_1^e \text{ ou } |\sigma_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| > \sigma_2^e \text{ ou } |\sigma_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| > \sigma_3^e\}$$

Cette probabilité de défaillance peut être calculée numériquement à partir de la solution exacte. On trouve  $p_{def} = 7.02 \%$  avec  $F_x = 10000 \text{ N}$ ,  $F_y = -50000 \text{ N}$ ,  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $\sigma_1^e = 320 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  $\sigma_2^e = \sigma_3^e = 220 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Pour chaque domaine  $E_l$  ( $l = 1..3$ ), on introduit un maillage grossier contenant seulement 2 éléments linéaires et un maillage fin contenant 40 éléments linéaires. La figure 2 présente les évolutions des déplacements  $\delta_x$  et  $\delta_y$  calculés avec le modèle réduit pour différents ordres  $m$ , pour les deux maillages différents des espaces  $E_i$ , et la comparaison avec la solution exacte. Il apparaît clairement qu'un maillage des domaines  $E_l$  trop grossier conduit à une erreur résiduelle qui ne peut pas être comblée aisément par l'augmentation de l'ordre  $m$ .

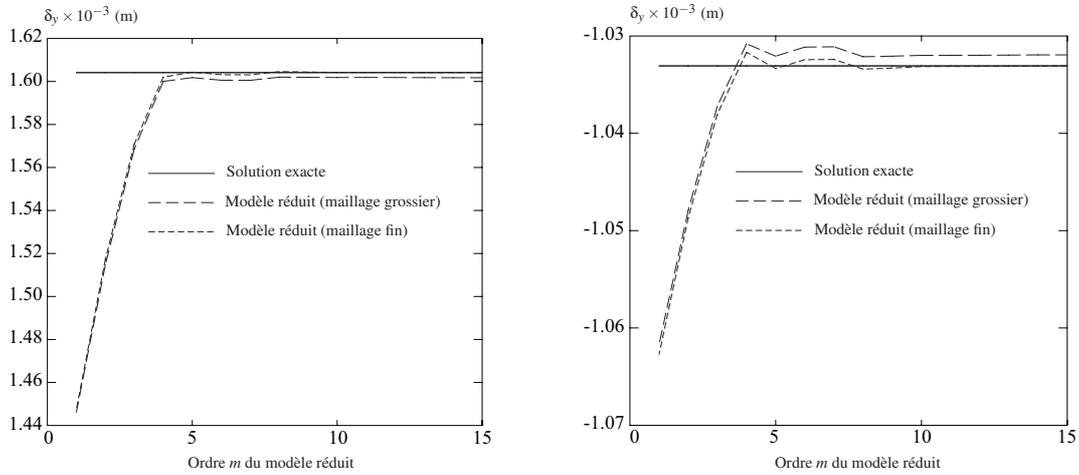


Fig. 2 – Evolution du déplacement  $\delta_x$  et  $\delta_y$  calculé avec le modèle réduit pour  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-1, 1, 1)$  - Comparaison avec la solution exacte

On considère maintenant que les modules sont aléatoires :  $e_i = \bar{e}_i(1 + \delta_i \xi_i)$  avec  $\bar{e}_i = 1.E5 \text{ MPa}$  et  $\delta_i = 0.1$ .

La probabilité de défaillance obtenue numériquement à partir du modèle réduit est donnée dans le tableau 1 pour différents ordres  $m$ . On constate qu'un ordre  $m = 10$  convient pour obtenir une bonne estimation de la probabilité de défaillance.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	10	15
$p_{def}$	11.74	8.98	6.75	6.94	7.15	7.00	7.00	7.02	7.02

Tableau 1 – Probabilité de défaillance obtenue via le modèle réduit pour différents ordres  $m$  (valeur exacte  $p_{def} = 7.02 \%$ )

## 5 Application à une structure plus complexe

### 5.1 Le problème direct

Le second exemple proposé est décrit sur la figure 3(a). Les structures  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  sont assemblées par deux joints de colle  $J_{12}$  et  $J_{23}$ . Une pression est appliquée sur le haut de la structure  $\Omega_3$  :

$p = -50 \text{ MPa}$ . Les rigidités tangentielle et normale des joints sont définies à partir des propriétés matérielles de la colle :

$$k_n = \frac{e}{t} \quad \text{et} \quad k_t = \frac{e}{2(1+\nu)t} \quad (16)$$

où  $e$  désigne le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson, et  $t$  l'épaisseur du joint.

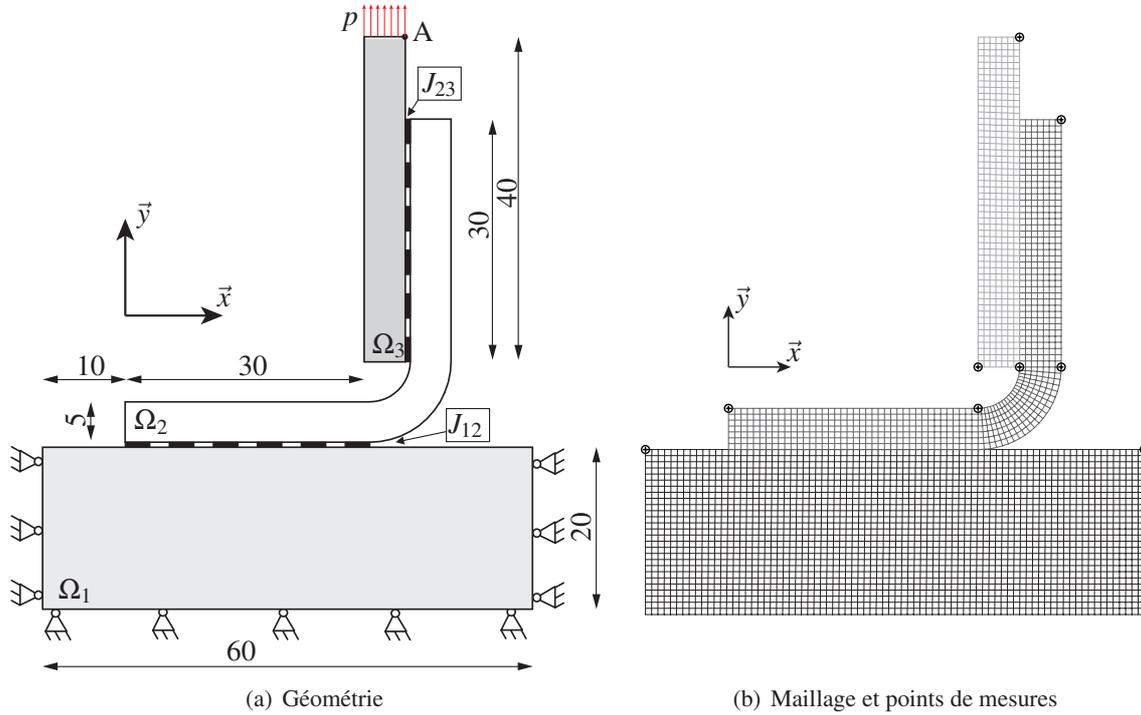


Fig. 3 – Le problème de l'assemblage collé

On considère que les modules des deux joints sont différents et non déterministes du fait des défauts de fabrication éventuels  $e_{12} = \bar{e}_{12}(1 + \delta_{12}\xi_{12})$ ,  $e_{23} = \bar{e}_{23}(1 + \delta_{23}\xi_{23})$  où  $\bar{e}_{12}$  et  $\bar{e}_{23}$  sont les modules moyens associés aux réalisations de  $e_{12}$  et  $e_{23}$  respectivement,  $\xi_{12}$  et  $\xi_{23}$  sont deux variables aléatoires gaussiennes non corrélées,  $\delta_{12}$  et  $\delta_{23}$  sont des coefficients de variation. Dans la suite, on utilisera les valeurs numériques suivantes :

$$\bar{E}_{12} = 500 \text{ MPa} \quad \bar{E}_{23} = 1000 \text{ MPa} \quad \bar{E}_1 = 1.2 \times 10^5 \text{ MPa} \quad \bar{E}_2 = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa} \quad \bar{E}_3 = 0.7 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3 \quad \nu_{23} = 0.3 \quad \nu_1 = 0.3 \quad \nu_2 = 0.3 \quad \nu_3 = 0.3 \quad t_{12} = 0.45 \text{ mm} \quad t_{23} = 0.45 \text{ mm}$$

Le tableau 2 représente les coûts d'une simulation de Monte Carlo menée à partir du modèle éléments finis et du modèle réduit PGD. Comme on pouvait l'attendre, le modèle réduit PGD à 10 modes, qui fournit une très bonne approximation de la réponse, comme l'indique la figure 4, apporte un gain important en temps de calcul.

Nombre de modes	Modèle réduit					Modèle EF
	1	2	5	8	10	
Modèle réduit (s)	6.27	15.85	45.18	138.21	166.62	
Tirages (s)	16.06	27.85	63.43	99.14	122.53	
Total (s)	22.33	43.70	108.61	237.35	289.15	11797.84
Rapport	1/528	1/270	1/109	1/50	1/41	1

Tableau 2 – Comparaison du temps CPU pour 10000 tirages sur le modèle réduit et sur le modèle éléments finis (26096 ddl)

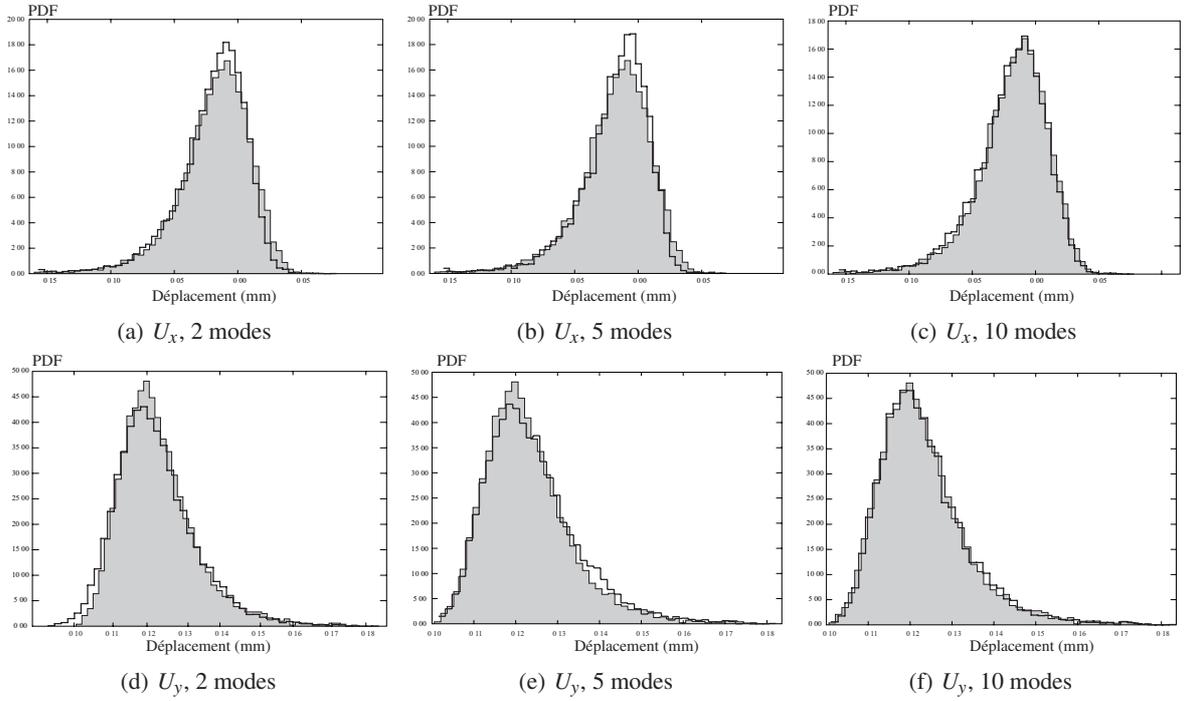


Fig. 4 – Fonctions densité de probabilité des déplacements  $\delta_x$  et  $\delta_y$  mesurés au point A calculées à partir de 10000 évaluations du modèle éléments finis d’une part (remplissage gris pour cette référence), et du modèle réduit PGD d’autre part, pour différents nombres de modes PGD

## 5.2 Le problème inverse

Le modèle éléments finis précédemment présenté est utilisé pour générer un jeu de 1000 mesures aux 9 points présentés sur la figure 3(b) pour lesquels seule la composante  $\vec{y}$  du déplacement est conservée.

On définit une distance simple entre la réponse du modèle réduit  $\{U_m\}$  et les mesures  $\{\tilde{U}_i\}$  :

$$\eta^2(e_1, e_2) = (\{U_m(e_1, e_2)\} - \{\tilde{U}_i\})^2 \quad (17)$$

Puisqu’on ne mesure que 9 déplacements, le modèle réduit peut être condensé sur ces quelques degrés de liberté :

$$\{U_m(e_1, e_2)\} = \sum_{p=1}^m \{\psi_p\} \prod_{k=1}^2 [N_k(e_k)] \{\lambda_{p,k}\} \quad (18)$$

où  $\{\psi_p\}$  ne contient que 9 valeurs.

Pour trouver les paramètres optimaux  $(e_1, e_2)$  qui minimisent l’erreur  $\eta^2(e_1, e_2)$  pour un jeu de mesures donné, on utilise une simple méthode de gradient à pas variable. A partir de l’expression du modèle réduit, et de la forme  $\eta^2(e_1, e_2)$  retenue, on peut en effet exprimer simplement le gradient de l’écart à partir des dérivées des fonctions de formes  $[N_l(e_l)]$ . La procédure de minimisation est stoppée lorsque le critère d’arrêt suivant est respecté ( $\epsilon_1 = 2.10^{-3}$  dans la suite) :

$$\frac{\eta_{r+1}^2 - \eta_r^2}{\eta_r^2} \leq \epsilon_1 \quad (19)$$

Le modèle éléments finis est utilisé pour générer un jeu de 1000 expériences. Le modèle réduit présenté est ensuite utilisé recalé à partir de chaque échantillon en jouant sur les paramètres  $(e_1, e_2)$ . A l’issue des ces recalages, la densité de probabilité de chaque paramètre recalé est comparée à celles des paramètres ayant servis à la simulation des mesures (figure 5).

## 6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons tout d’abord montré comment calculer la réponse d’une structure sous la forme de produits de fonctions de l’espace et de fonctions des paramètres structuraux. Nous avons en

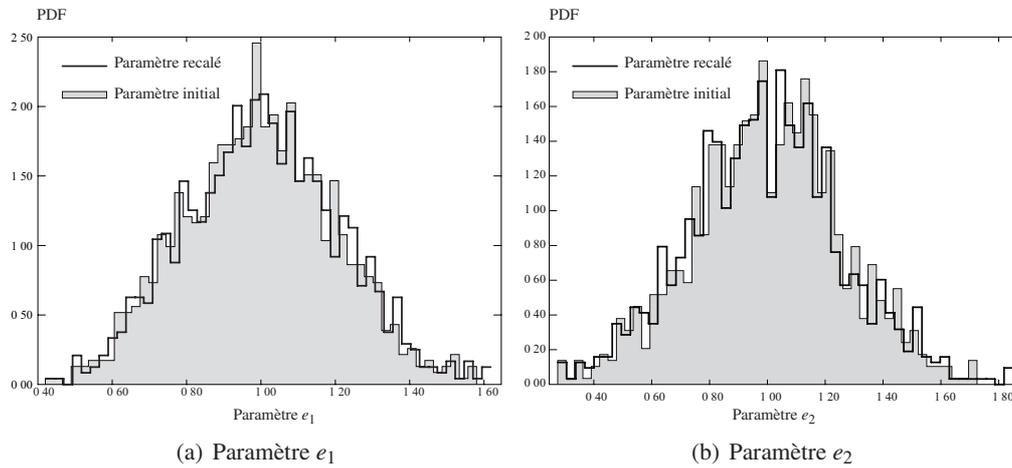


Fig. 5 – Comparaison entre la fonction densité de probabilité des paramètres recalés  $e_1$  et  $e_2$  et des paramètres utilisés pour générer les mesures

particulier détaillé l'écriture des différents problèmes éléments finis à résoudre pour construire le modèle réduit PGD. Nous avons ensuite montré que ce modèle réduit permettait d'estimer la réponse probabiliste d'une structure dont les paramètres matériaux sont incertains. Sur un premier exemple académique, nous avons montré qu'il était possible d'estimer une probabilité de défaillance. A l'aide du second exemple, nous avons mis en évidence les gains en temps de calcul en comparaison avec une technique de Monte Carlo faisant appel au modèle éléments finis standard. Enfin, nous avons montré sur ce même exemple qu'il était possible d'obtenir rapidement une estimation de la dispersion de propriétés matérielles dans une famille de structures, à partir de multiples recalages réalisés dans des temps très courts grâce à l'utilisation du modèle réduit. Cela nécessite en pratique l'apport d'informations expérimentales sur un grand nombre de structures, mais on peut imaginer que cela est possible si des tests élémentaires sont réalisés en fin de chaîne de production. Ce type de procédure pourrait conduire à terme à l'élimination de pièces, certes géométriquement correctes, mais structurellement défaillantes (composites, assemblages collés par exemple).

## Références

- [1] B. Sudret, A. Der Kiureghian. *Comparison of finite element reliability methods*, Probabilistic Engineering Mechanics, 17, 337-348, 2002.
- [2] R. Ghanem, P. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer, 1991.
- [3] Boucard, P.A. and Champany, L., A suitable computational strategy for the parametric study of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol 57. Num 9. Pages 1259-1281. 2003.
- [4] Blanzé, C. and Champany, L., A suitable computational strategy for the random response of assemblies of structures. *International Journal of Solids and Structures*. Vol 41. Num 22-23. Pages 6383-6405. 2004.
- [5] Chatterjee, A., An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*. Vol. 78, Num 7. Pages 808-817. 2000.
- [6] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto. *Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models*, Archives of Computational Methods in Engineering, 17 (4), 327-350, 2010.
- [7] M. Beringhier, M. Gueguen, J.-C. Grandidier. *Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations application to thermo-viscoelasticity*, Archives of Computational Methods in Engineering, 17 (4), 393-401, 2010.
- [8] A. Nouy, P. Ladevèze. *Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems*, International Journal of Multiscale Computational Engineering, 2 (4), 557-574, 2004.
- [9] D. Néron, P. Ladevèze, Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems, *Archives of Computational Methods in Engineering*. Vol. 17. Num 4. Pages 351-372. 2010.