



HAL
open science

Optimisation de plaques sandwich à rigidité variable

Angela Vincenti, Boris Desmorat

► **To cite this version:**

Angela Vincenti, Boris Desmorat. Optimisation de plaques sandwich à rigidité variable. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722072

HAL Id: hal-01722072

<https://hal.science/hal-01722072>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Optimisation de plaques sandwich à rigidité variable

Angela VINCENTI¹, Boris DESMORAT^{1,2}

¹ UPMC Univ Paris 06 / CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.

² Univ Paris-Sud 11 Orsay

angela.vincenti@upmc.fr, boris.desmorat@upmc.fr

Résumé — Dans les structures composites à renfort de fibres longues, la distribution de l'orientation des fibres peut être conçue de manière optimale, ce qui donne lieu à un champ variable de propriétés élastiques anisotropes. Dans ce travail, on considère le cas de plaques sandwich, où les peaux sont des composites stratifiés et, en prenant en compte l'objectif de maximisation de la rigidité globale, on applique des techniques d'optimisation topologique à la conception optimale de ces structures.

On formule le problème d'optimisation dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites perturbations, en utilisant un modèle de plaques sandwich à peaux minces et en se basant sur la représentation polaire de l'anisotropie en élasticité plane. Un algorithme adapté est présenté pour la résolution de cette classe de problèmes d'optimisation et un exemple numérique est présenté.

Mots clés — Optimisation, plaques sandwich, composites stratifiés, rigidité, propriétés élastiques.

1 Introduction

L'un des intérêts des structures composites à renfort de fibres longues réside dans la possibilité de concevoir l'architecture même des renforts afin d'optimiser les performances de ces structures. Aujourd'hui, des architectures complexes de renforts à fibres curvilignes sont technologiquement réalisables grâce au développement de procédés de fabrication de structures stratifiées par dépôt de fibres.

La conception optimale de structures composites stratifiées à rigidité variable est donc un sujet de recherche ouvert et les auteurs de ce travail ont déjà proposé une méthodologie originale d'optimisation de ces structures articulée en deux étapes [1, 2] : l'optimisation topologique de la structure dans un premier temps en termes des paramètres élastiques anisotropes, et, dans un deuxième temps, la conception optimale des stratifications dont l'architecture interne est susceptible de varier d'un point à l'autre de la structure (stratifié à orientations variables ou à rigidité variable). Cette méthodologie, basée sur la combinaison de techniques d'optimisation topologique de structures et sur l'utilisation de la représentation polaire de l'élasticité, a été développée et appliquée dans le cas de structures de type plaque [1], pour des chargements de membrane ou de flexion, ainsi que pour les coques minces stratifiées [2] (chargements mixtes de membrane et de flexion).

Dans ce travail, on montre que cette méthodologie peut s'appliquer aussi au cas de structures de type plaque sandwich dont les peaux sont des composites stratifiés à rigidité variable : on considère ici des plaques sandwich à peaux *très* minces (rapport entre épaisseur des peaux et épaisseur de l'âme de l'ordre d'un centième), âme de propriétés et épaisseur constantes, sous des chargements de flexion seule. On décrit le modèle de plaque sandwich à peaux minces, on présente la formulation du problème d'optimisation et l'algorithme de résolution associé, ainsi que la recherche des stratifications optimales solutions. Tous les développements sont aussi valables pour un chargement de membrane. La validité de cette approche est prouvée par des calculs sur des exemples d'application.

2 Modèle de plaque sandwich à peaux (*très*) minces

2.1 Hypothèse cinématique

On considère des plaques sandwich composées d'une âme d'épaisseur h à comportement élastique isotrope fixé et de deux peaux en composites stratifiés à fibres curvilignes (rigidité variable) d'épais-

seurs e . L'épaisseur totale ($h + 2e$) de la plaque sandwich sera notée H . On applique les hypothèses cinématiques du modèle de plaque sandwich à peaux minces suivantes [3] :

– dans l'âme :

$$u_1(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad u_2(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (1)$$

– dans la peau inférieure :

$$u_1(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_x(x, y) \quad u_2(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_y(x, y) \quad u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (2)$$

– dans la peau supérieure :

$$u_1(x, y, z) = u_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_x(x, y) \quad u_2(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{h}{2}\varphi_y(x, y) \quad u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (3)$$

où φ_x et φ_y désignent les rotations des sections droites par rapport à l'axe \underline{e}_z , u_0 et v_0 les déplacements longitudinaux dans le plan de la plaque.

2.2 Loi de comportement

Sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

- l'âme ne travaille qu'en cisaillement transverse,
- les contraintes de cisaillement transverse sont négligées dans les peaux,

la loi de comportement de la plaque sandwich à peaux minces s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & \mathbb{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où \mathbf{N} et \mathbf{Q} sont les efforts de membrane et de cisaillement transverse, \mathbf{M} les moments, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\gamma}$ les déformations dans le plan et de cisaillement hors-plan, $\boldsymbol{\kappa}$ les courbures, \mathbb{A} et \mathbb{D} les tenseurs de rigidité de membrane et flexion, \mathbb{B}_1 et \mathbb{B}_2 ($\mathbb{B}_1 \neq \mathbb{B}_2$) les tenseurs de couplage membrane-flexion, \mathbb{F} le tenseur de rigidité en cisaillement transverse.

Les tenseurs \mathbb{A} , \mathbb{D} , \mathbb{B}_1 et \mathbb{B}_2 dépendent des stratifications des peaux. On considère ici le cas de plaques sandwich symétriques pour lesquelles :

$$\mathbb{B}_1 = 0 \quad \mathbb{B}_2 = 0 \quad (5)$$

De plus, les stratifiés des peaux sont à plis identiques, c'est-à-dire les plis des peaux sont constitués d'un même matériau et sont de même épaisseur.

En notant p le nombre de plis par peau, les tenseurs de rigidité normalisés de membrane $\mathbb{A}^* = \frac{1}{H}\mathbb{A}$ et de flexion $\mathbb{D}^* = \frac{12}{H^3}\mathbb{D}$ s'écrivent

$$\mathbb{A}^* = \frac{2}{H} \sum_{k=1}^p \mathbb{Q}(\delta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad \mathbb{D}^* = \frac{12}{H^3} \frac{h}{2} \sum_{k=1}^p \mathbb{Q}(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (6)$$

Les propriétés élastiques \mathbb{C} de l'âme ainsi que son épaisseur étant fixées, le tenseur \mathbb{F} est constant :

$$\mathbb{F} = h\mathbb{C} \quad (7)$$

2.3 Validité numérique du modèle

Avant utilisation d'un tel modèle de comportement de plaque sandwich dans le processus d'optimisation, on a réalisé une validation numérique en confrontant les résultats de simulations aux éléments finis d'un modèle de plaque et ceux d'un modèle tridimensionnel représentant la même structure stratifiée. Une étude paramétrique effectuée en considérant des peaux monocouches isotropes montre que le modèle de plaque sandwich à peaux *très* minces est valable pour un rapport entre épaisseur de peau et épaisseur de l'âme de l'ordre de 1% ou inférieur.

2.4 Proportionnalité des comportements normalisés de membrane et de flexion

En introduisant le rapport $\varepsilon = e/h$ entre l'épaisseur d'une peau e et l'épaisseur de l'âme h , les tenseurs normalisés de membrane et de flexion définis dans l'équation (6) se mettent sous la forme :

$$\mathbb{A}^* = \frac{\alpha}{P} \sum_{k=1}^P \mathbb{Q}(\delta_k) \quad \mathbb{D}^* = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \beta_k \mathbb{Q}(\delta_k) \quad (8)$$

avec

$$\alpha = \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \quad \beta_k = \frac{6}{(1+2\varepsilon)^3} \left(\varepsilon + \frac{2k-1}{P} \varepsilon^2 \right) \quad (9)$$

En considérant les termes du premier ordre en $\varepsilon = e/h$ (développement limité validé compte tenu du fait que le modèle ne peut-être utilisé que pour des valeurs de ε de l'ordre de 0.01 ou inférieures), il vient

$$\mathbb{A}^* = \frac{2\varepsilon}{P} \sum_{k=1}^P \mathbb{Q}(\delta_k) + o(\varepsilon) \quad \mathbb{D}^* = \frac{6\varepsilon}{P} \sum_{k=1}^P \mathbb{Q}(\delta_k) + o(\varepsilon) \quad (10)$$

Au premier ordre en $\varepsilon = e/h$, on obtient donc le résultat de proportionnalité des comportement normalisés de membrane et de flexion :

$$\mathbb{D}^* = 3\mathbb{A}^* \quad (11)$$

La loi de variation des modules de flexion pour une plaque sandwich à peaux minces est donc bien plus simple que celle bien connue d'une plaque stratifiée en théorie classique : la recherche des stratifications pour ce modèle de plaque sandwich sous chargement de flexion est équivalente à celle d'un modèle de plaque stratifiée en théorie classique sous chargement de membrane.

Dans la suite, les tenseurs de rigidité de la plaque sandwich seront représentés par leurs paramètres polaires [4]. En particulier, on note T_0 , T_1 , R_K et R_1 les invariants polaires et Φ_1 l'angle polaire représentant l'orientation d'orthotropie du tenseur normalisé de flexion \mathbb{D}^* . A partir des équations de comportement illustrées dans cette section, on montre que :

$$T_0 = 6\varepsilon T_0^{\text{CB}} \quad T_1 = 6\varepsilon T_1^{\text{CB}} \quad (12)$$

où T_0^{CB} et T_1^{CB} sont les paramètres polaires isotropes de la couche élémentaire constituant les peaux de la plaque sandwich.

3 Stratégie d'optimisation hiérarchique

3.1 Principe de la stratégie d'optimisation

La stratégie d'optimisation utilisée se décompose en deux étapes successives :

1. étape d'optimisation structurale : l'optimisation de la structure pour la rigidité maximale est effectuée en fonction des paramètres représentant le comportement homogénéisé du stratifié à l'aide d'un algorithme spécifique,
2. étape de recherche de stratifications optimales : la recherche d'une stratification satisfaisant aux valeurs optimales des paramètres matériaux du comportement homogénéisé obtenues à l'étape 1 est formulée comme un problème d'optimisation sans contraintes, qui est résolu à l'aide d'un algorithme génétique.

3.2 Optimisation structurale

Le problème de la maximisation de la rigidité structurale d'une plaque sandwich sous chargement de flexion peut s'écrire sous la forme d'une double minimisation de l'énergie complémentaire ou compliance G_{flexion} de la structure [1] :

$$\min G_{\text{flexion}} = \min_{(R_K, R_1, \Phi_1)} \min_{\{\mathbf{M}, \mathbf{Q}\} \in \Sigma_{ad}} \left[\int_{\Omega} (\mathbf{M} \cdot \mathbb{D}\mathbf{M} + \mathbf{Q} \cdot \mathbb{F}\mathbf{Q}) dS \right] \quad (13)$$

où R_K et R_1 sont les invariants polaires élastiques anisotropes en flexion et Φ_1 l'orientation d'orthotropie en flexion, variables d'un point à l'autre de la plaque.

Il est nécessaire d'introduire les limites de variabilité des paramètres polaires R_K et R_1 du tenseur de flexion normalisé \mathbb{D}^* d'une plaque sandwich à peaux *très* minces stratifiées, qui traduisent les conditions de faisabilité des stratifications. Ces conditions s'obtiennent de manière analogue à celles issues de la théorie classique des stratifiés [5] et, en notant R_0^{CB} et R_1^{CB} les paramètres polaires anisotropes de la couche élémentaire constituant les peaux, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{R_1}{6\epsilon R_1^{\text{CB}}} \leq 1 \\ 2 \left(\frac{R_1}{6\epsilon R_1^{\text{CB}}} \right)^2 - 1 \leq \frac{R_K}{6\epsilon R_0^{\text{CB}}} \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

La minimisation de la fonction objectif exprimée en (13) est réalisée sous les contraintes d'optimisation (14).

La résolution de ce problème est effectuée en utilisant un algorithme convergent proposé par Allaire [6], déjà appliqué par les auteurs à la résolution des problèmes d'optimisation de plaques et coques stratifiées [1, 2]. Il consiste en une succession de minimisations locales par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées (pour lesquelles l'énergie en cisaillement transverse est constante) et de calculs éléments finis des contraintes à paramètres d'optimisation fixés. Compte tenu de l'écriture (10) de \mathbb{D}^* , la résolution des minimisations locales est analytique et analogue à celle présentée dans [1]. Il en résulte l'orientation optimale de l'axe principal d'orthotropie Φ_1^{opt} :

$$\Phi_1^{\text{opt}} = \text{direction}(\max(|M_I|, |M_{II}|)), \quad (15)$$

ainsi que les paramètres élastiques optimaux R_K^{opt} et R_1^{opt} en fonction d'un seul paramètre de l'état de contraintes X décrivant le rapport entre la partie déviatorique et la partie sphérique du tenseur des moments \mathbf{M} . Ces résultats se déclinent selon les trois cas suivants :

- **Cas 1** (peaux à stratification *libre*) : pour $0 \leq X \leq \frac{R_1^{\text{CB}}}{T_1^{\text{CB}}}$

$$R_0^{\text{min}} \leq R_K^{\text{opt}} \leq 6\epsilon R_0^{\text{CB}}, \quad R_1^{\text{opt}} = 6\epsilon T_1^{\text{CB}} X \quad (16)$$

où R_0^{min} correspond pour $R_1 = R_1^{\text{opt}}$ à la limite inférieure de la deuxième condition des contraintes (14).

- **Cas 2** (peaux à stratification unidirectionnelle) : pour $\frac{R_1^{\text{CB}}}{T_1^{\text{CB}}} \leq X \leq \frac{T_0^{\text{CB}} + R_0^{\text{CB}}}{2R_1^{\text{CB}}}$

$$R_K^{\text{opt}} = 6\epsilon R_0^{\text{CB}}, \quad R_1^{\text{opt}} = 6\epsilon R_1^{\text{CB}} \quad (17)$$

- **Cas 3** (peaux à stratification orthogonales) : pour $\frac{T_0^{\text{CB}} + R_0^{\text{CB}}}{2R_1^{\text{CB}}} \leq X$

$$R_K^{\text{opt}} = 6\epsilon R_0^{\text{CB}}, \quad R_1^{\text{opt}} = 6\epsilon \frac{T_0^{\text{CB}} + R_0^{\text{CB}}}{2X} \quad (18)$$

3.3 Recherche de stratifications optimales

Solutions analytiques Comme indiqué à la fin de la section précédente en accord avec les équations (10), les solutions de type cas 2 sont réalisées par des peaux à stratification unidirectionnelle, alors que celles du cas 3 par des stratifications orthogonales (angles des couches à 0° ou 90° en proportion variable). Le cas 1 correspond à une infinité de solutions possibles, parmi lesquelles une classe de solutions remarquables sont les *angle-ply* ou stratifications à plis alternés (égal nombre de couches aux angles α et $-\alpha$) qui réalisent la valeur inférieure admissible de R_K^{opt} .

Si le champ des propriétés d'anisotropie dans la structure optimisée correspond à des solutions de type cas 1 ou cas 2, des stratifications optimales faisables sont des combinaisons d'unidirectionnels et *angle-ply* pour lesquels la valeur de l'angle α peut être déterminée analytiquement (voir [1] pour analogie). L'axe principal d'orthotropie est aligné avec la direction Φ_1^{opt} .

T_0^{CB} (GPa)	T_1^{CB} (GPa)	R_0^{CB} (GPa)	R_1^{CB} (GPa)	Φ_1^{CB} (rad)
26.88	24.74	19.71	21.43	0

Tableau 1 – Paramètres polaires de la couche de base (Carbone-Epoxyde T300/5208)

En revanche, dans les zones de cas 3 les combinaisons de stratifications à plis orthogonaux qui peuvent être calculées analytiquement ne sont pas faisables à cause de la discontinuité des plis à travers chaque couche.

Dans ce dernier cas, il est impératif de passer par une résolution numérique, qui peut aussi être utilisée pour chercher des solutions alternatives aux stratifications *angle-ply* dans les zones de cas 1.

Recherche numérique par algorithme génétique Dans le cadre de la représentation polaire de l'élasticité, le problème de la recherche des stratifications à rigidité constante ou variable avec des symétries élastiques fixées (découplage et orthotropie) ainsi que des valeurs des modules élastiques imposés ($R_K = R_K^{opt}$ et $R_1 = R_1^{opt}$), peut être formulé comme un problème d'optimisation sans contraintes [7].

Ce problème d'optimisation étant fortement non convexe, la résolution de ce problème peut être réalisée à l'aide d'un algorithme génétique [5, 7].

4 Exemple numérique

Considérons une plaque carrée de côtés 1x1, trouée en son centre par un disque de rayon 0.25. Le cercle central est encastré, tandis que des efforts verticaux constants sont appliqués sur les côtés du carrés. La géométrie ainsi que les conditions aux limites sont présentées dans la figure 1. Le matériau constitutif des pli est un UD carbone-epoxyde dont les composantes polaires sont données dans le tableau 1. L'algorithme d'optimisation a été initialisé avec une stratification orthogonale équilibrée suivant les axes X et Y. La diminution relative du critère entre l'état initial et l'état optimal est de 34%. Le déplacement maximal de la structure a lui diminué relativement de 32%.

Lors des minimisations locales, le choix $R_0^{opt} = R_0^{min}$ (stratification de type angle-ply) a été fait dans le cas 1. La distribution des cas de solutions à l'état optimal est présentée en figure 2 (sur un quart de la structure compte tenu des symétries) : seules les solutions du cas 1 (stratification libre dont angle-ply) ainsi que du cas 2 (stratification unidirectionnelle) sont présentes. Il est alors possible d'obtenir un stratifié *optimal* à direction de fibre variable par couche en considérant des stratifications de type angle-ply dans le cas 1.

Dans ce contexte, la distribution des modules polaires (R_0^{opt}, R_1^{opt}) et des orientations optimales des fibres sont présentées dans les figures 3 et 4. Dans ce cas particulier pour lequel le cas 3 est absent de la solution optimale, la stratification est faisable : l'ordre des plis dans la peau supérieure est libre et il suffit de veiller à ce que les plis de la peau inférieure soit symétriques de ceux de la peau supérieure.

5 Conclusions

Dans cet travail, le modèle de plaque sandwich à peaux *très* minces a été utilisé pour réaliser l'optimisation topologique dans le cas des peaux stratifiées à rigidité variable (fibres curvilignes continues par couche). On a montré que, dans le cadre de ce modèle, des simplifications importantes interviennent dans l'écriture des lois d'homogénéisation et les tenseurs de rigidité en membrane et en flexion résultent être proportionnels. Cela permet d'aborder le problème d'optimisation structurale ainsi que la recherche des stratifications optimales solutions de la même manière dans le cas des chargements de membrane seule ou de flexion seule.

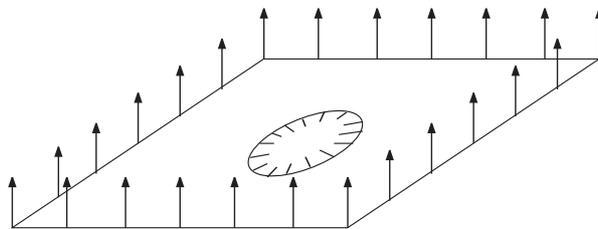


Fig. 1 – Schéma de la géométrie et des conditions aux limites de la plaque trouée



Fig. 2 – Distribution des cas de la minimisation locale à l'état optimal

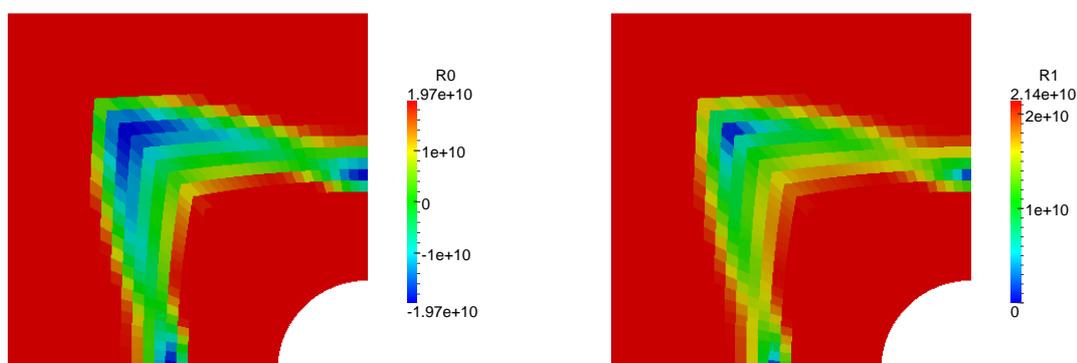


Fig. 3 – Distribution des paramètres polaires optimaux R_0^{opt} et R_1^{opt}

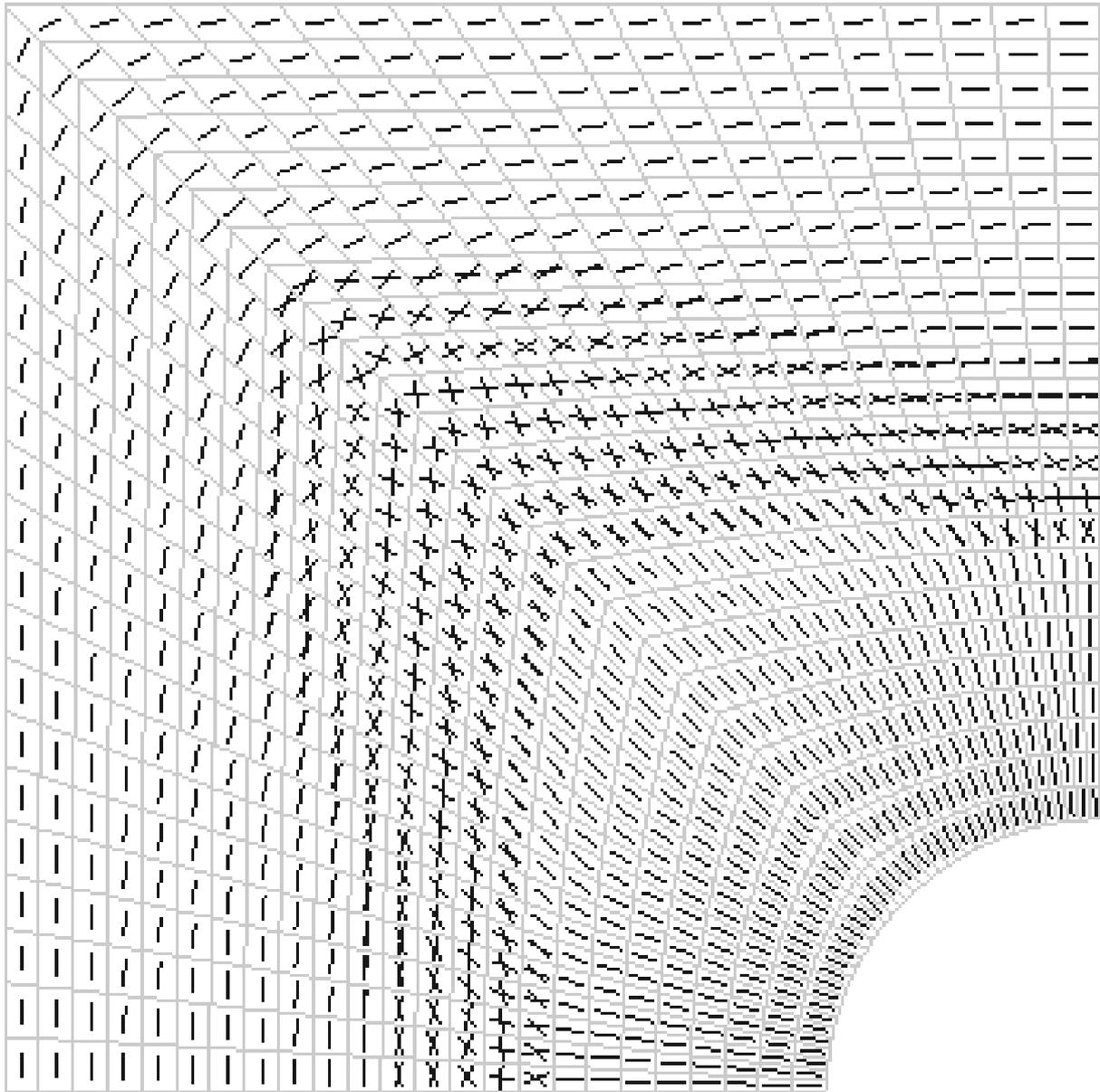


Fig. 4 – Distribution des orientations optimales des fibres

Références

- [1] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, F. Léné. *Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation*, International Journal of Solids and Structures, Vol 48, pages 2576-2584, 2011.
- [2] A. Jibawy, B. Desmorat, A. Vincenti. *Structural rigidity optimization of thin laminated shells*, Composite Structures, DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.014>, 2012.
- [3] J. M. Berthelot *Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures*, Editions TEC et DOC, Paris, 1999.
- [4] Verchery, G., 1979. Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité. Proceedings of the Euromech Colloquium. 31, 93-104.
- [5] M. Montemurro, A. Vincenti, P. Vannucci. *A two-step optimisation approach for the design of composite stiffened panels. Part 1*, Journal of Optimization Theory and Applications, 839-878, 2012.
- [6] G. Allaire, R.V. Kohn. *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using external micro structures*, Eur. J. Mech. A/solids, 839-878, 1993.
- [7] C. Julien. *Conception optimale de l'anisotropie dans les structures stratifiées à rigidité variable par la méthode polaire-génétique*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2010.