



**HAL**  
open science

## **Dynamique des structures comportant des non-linéarités localisées en présence d'incertitudes**

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon

► **To cite this version:**

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon. Dynamique des structures comportant des non-linéarités localisées en présence d'incertitudes. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. 8 p. <hal-01722069>

**HAL Id: hal-01722069**

**<https://hal.science/hal-01722069v1>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

## **Dynamique des structures comportant des non-linéarités localisées en présence d'incertitudes**

Jérôme DIDIER <sup>1</sup>, Jean-Jacques SINOUE <sup>1</sup>, Béatrice FAVERJON <sup>2</sup>

<sup>1</sup> LTDS, UMR-CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, France, {jerome.didier, jean-jacques.sinou}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> LaMCoS, UMR-CNRS 5259, INSA Lyon, France, beatrice.faverjon@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — Les phénomènes non-linéaires dans la dynamique des structures sont relativement bien connus et de nombreuses méthodes ont été développées pour prendre en compte ces derniers lors du dimensionnement d'une structure. Néanmoins la plupart de ces méthodes sont déterministes et ne permettent pas de considérer les incertitudes présentes dans de tels systèmes. En effet, du fait du procédé de fabrication, il existe une dispersion sur les valeurs de certains paramètres, ainsi ces derniers peuvent être considérés comme aléatoires. Aussi dans un objectif de dimensionnement robuste, il semble nécessaire d'intégrer ces variations pour estimer la réponse dynamique non-linéaire aléatoire associée.

Une des méthodes classiques permettant de prendre en compte les incertitudes est la méthode de Monte Carlo (MCS : Monte Carlo Simulations). Cette méthode, basée sur la résolution de simulations pour différentes valeurs des paramètres aléatoires, nécessite de nombreuses réalisations et s'avère donc coûteuse en temps de calcul. Par conséquent, d'autres méthodes ont été développées : on peut par exemple citer la méthode du Chaos Polynomial [1] (PCE : Polynomial Chaos Expansion) qui a déjà prouvé son efficacité à traiter les problèmes linéaires [2, 3]. Néanmoins, cette dernière ne semble pas apte à traiter les problèmes non-linéaires présentant des solutions multiples.

C'est pourquoi nous proposons une formulation du problème de dynamique non-linéaire en considérant la pulsation d'excitation aléatoire et en développant cette dernière sur la base du chaos polynomial. Notre démarche consiste donc à étendre une méthode de balance harmonique multi-fréquentielle [4, 5] (MHBM : Multidimensionnal Harmonic Balance Method) avec la méthode du chaos polynomial. La méthode ainsi développée sera nommée MHBM stochastique. La difficulté liée à l'évaluation de la non-linéarité à la fois dans le domaine fréquentiel et dans le domaine stochastique sera levée en utilisant une méthode AFT [6] couplée à une méthode de collocation probabiliste [7] (PC : Probabilistic Collocation).

**Mots clés** — non-linéaire, incertitudes, MHBM, PCE.

---

## **1 Introduction**

L'objectif de cette étude est d'estimer la réponse dynamique non-linéaire stochastique, et ceci pour un coup de calcul raisonnable. C'est pourquoi une méthode basée sur la méthode du chaos polynomial et de la balance harmonique sera développée. En effet la méthode de la balance harmonique a prouvé son efficacité à traiter des problèmes non-linéaires tandis que la méthode du chaos polynomial permet quant à elle de traiter des problèmes aléatoires.

Dans un premier temps, la modélisation du système ainsi que la modélisation des non-linéarités seront détaillées. Les phénomènes aléatoires seront également explicités dans cette partie. Puis la résolution du problème ainsi posé sera détaillée dans une seconde partie. Tout d'abord on rappellera la méthodologie permettant de traiter le cas non-linéaire déterministe, ensuite on s'intéressera aux systèmes comportant des incertitudes et des non-linéarités régulières ou non-régulières. Enfin la méthode proposée sera validée à l'aide de simulations numériques et ceci sur plusieurs cas d'étude.

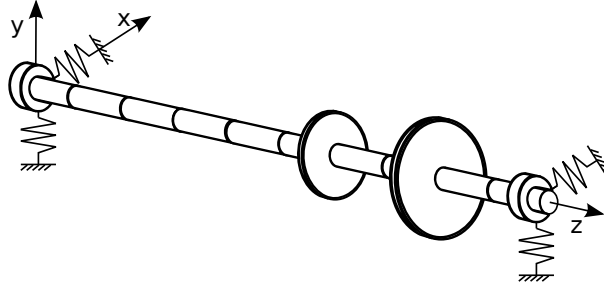


Fig. 1: Système rotor

## 2 Modélisation d'un rotor non-linéaire

### 2.1 Système tournant linéaire

Le système étudié ici est un rotor composé d'un arbre et de deux disques rigides. L'arbre est discrétisé en 10 éléments poutres de type Euler-Bernoulli. Ce système est supporté par deux paliers que l'on modélise comme des éléments de raideur. L'ensemble ainsi constitué est illustré en Figure 1.

Après assemblage des différents éléments constitutifs du système, on obtient l'équation du mouvement suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \omega_1 \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse du système,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  est la matrice gyroscopique et  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur.  $\omega_1$  est la vitesse de rotation du rotor.  $\mathbf{f}$  est le vecteur des efforts extérieurs. Ici on considère une excitation de type balourd. La définition des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{K}$  est donnée dans [2]. Pour la suite, on note  $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \omega_1 \mathbf{G}$ .

### 2.2 Modélisation des non-linéarités

Dans le système présenté précédemment des phénomènes non-linéaires peuvent être observés. Par exemple des phénomènes de contact entre l'arbre et les parties fixes mais aussi des évolutions cubiques de la raideur des paliers. Par conséquent l'équation du mouvement s'écrit alors

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \omega_1 \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

avec  $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$  est le vecteur des efforts non-linéaires.

Les non-linéarités considérées ici agissent au niveau d'une extrémité de l'arbre. On considère que les éléments non-linéaires sont présents au niveau du premier palier (suivant les degrés de liberté en translation  $v$  et  $w$ ). Deux types de non-linéarités sont considérées pour notre étude.

Tout d'abord le cas où les raideurs du palier dans les directions  $x$  et  $y$  ont des évolutions cubiques définies par

$$f_{nl_x} = -k_{nl}v^3, \quad f_{nl_y} = -k_{nl}w^3 \quad (3)$$

avec  $k_{nl}$  la raideur cubique additionnelle au niveau du premier palier.

La seconde non-linéarité étudiée correspond au phénomène de contact caractérisé par une augmentation de la raideur au niveau du premier palier lors d'une déflexion radiale trop importante. En considérant  $r$  la déflexion radiale associée aux déplacements  $v$  et  $w$  dans les directions  $x$  et  $y$  :

$$r = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (4)$$

L'effort non-linéaire ainsi défini peut se mettre sous la forme

$$f_{nl_x} = -k_1v, \quad f_{nl_y} = -k_1w \quad \text{si } r < r_{lim} \quad (5)$$

$$f_{nl_x} = (-k_2(r - r_{lim}) - k_1r_{lim}) \cos \alpha, \quad f_{nl_y} = (-k_2(r - r_{lim}) - k_1r_{lim}) \sin \alpha \quad \text{si } r > r_{lim} \quad (6)$$

avec  $\cos \alpha = \frac{v}{r}$  et  $\sin \alpha = \frac{w}{r}$ .  $r_{lim}$  représente la valeur du jeu radial.  $k_1$  et  $k_2$  définissent respectivement la raideur avant et après contact.

## 2.3 Phénomènes aléatoires

Du fait des procédés de fabrication, certains paramètres peuvent s'avérer aléatoires et ainsi être sources d'incertitudes dans le problème considéré. Ici on se limitera à l'étude de deux paramètres aléatoires, à savoir le module d'Young de l'arbre  $E$  et la raideur de contact  $k_2$ . Et on choisit de décrire leur comportement stochastique à l'aide de variables aléatoires gaussiennes. Ainsi ces paramètres sont décrits par les relations suivantes

$$\tilde{E} = \bar{E}(1 + \delta_E \xi_1) \quad (7)$$

où  $\bar{E}$  et  $\delta_E$  désignent la valeur moyenne et le coefficient de variation du module d'Young,

$$\tilde{k}_2 = \bar{k}_2(1 + \delta_{k_2} \xi_2) \quad (8)$$

avec  $\bar{k}_2$  sa valeur moyenne et  $\delta_{k_2}$  son coefficient de variation.  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont des variables aléatoires gaussiennes. La notation  $\tilde{\cdot}$  désigne le caractère aléatoire d'une quantité.

## 3 Résolution du problème non-linéaire stochastique

### 3.1 Cas déterministe

#### 3.1.1 Méthode de la Balance Harmonique

Afin de résoudre le problème non-linéaire défini en Équation (2), on propose d'utiliser une méthode de Balance Harmonique Multi-fréquentielle (MHBM). Cette approche consiste à exprimer la réponse dynamique non-linéaire  $\mathbf{x}(t)$  ainsi que l'excitation  $\mathbf{f}(t)$  sous forme de séries de Fourier multiples [4] notées

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \sum_{k_2=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_p=-N_h}^{N_h} (\mathbf{X}^c_{[k_1, k_2, \dots, k_p]} \cos(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i t) + \mathbf{X}^s_{[k_1, k_2, \dots, k_p]} \sin(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i t)) \quad (9)$$

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \sum_{k_2=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_p=-N_h}^{N_h} (\mathbf{F}^c_{[k_1, k_2, \dots, k_p]} \cos(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i t) + \mathbf{F}^s_{[k_1, k_2, \dots, k_p]} \sin(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i t)) \quad (10)$$

que l'on réécrit sous la forme condensée suivante

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{X}_{\mathbf{k}}^c \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \mathbf{X}_{\mathbf{k}}^s \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t)) \quad (11)$$

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^c \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^s \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t)) \quad (12)$$

avec  $p$  le nombre de fréquences incommensurables considérées,  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur des fréquences défini par  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p]$  et  $\mathbf{k}$  le vecteur contenant les numéros des harmoniques défini par  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_p]$  avec  $k_i = -N_h, -N_h + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_h - 1, N_h$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $\sum_{i=1}^p |k_i| \leq N_h$  où  $N_h$  est l'ordre de la série de Fourier. De plus on tiendra compte des conditions de parité afin d'obtenir une base de dimension minimale. On note  $m$  la dimension de la base multi-dimensionnelle ainsi formée où  $\mathbf{k}_j$  avec  $j = 0, \dots, m$  désigne le  $j^{\text{ème}}$  harmonique de la base.

#### 3.1.2 Évaluation des non-linéarités : AFT

Les excitations non-linéaires  $\mathbf{f}_{\text{nl}}$  sont également exprimées sous forme de séries de Fourier multiples

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{F}_{\text{nl}\mathbf{k}}^c \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \mathbf{F}_{\text{nl}\mathbf{k}}^s \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t)) \quad (13)$$

pour lesquelles les composantes  $\mathbf{F}_{\text{nl}\mathbf{k}}^c$  et  $\mathbf{F}_{\text{nl}\mathbf{k}}^s$  sont évaluées à l'aide d'une procédure "Alternating Frequency Time" (méthode AFT [6]). Cette méthode est illustrée sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \mathbf{x}(t) \\ & & \downarrow \\ \mathbf{F}_{\text{nl}} & \xleftarrow{\text{DFT}} & \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \end{array}$$

### 3.1.3 Formulation non-linéaire déterministe

En substituant les expressions (11), (12) et (13) dans l'équation de mouvement du système complet (2), et après projection, l'équation de la dynamique s'écrit sous la forme d'un système non-linéaire de dimension  $(2m + 1)n_{ddl}$  (avec  $n_{ddl}$  le nombre de degrés de liberté) :

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice diagonale par bloc définie par  $\mathbf{L} = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m)$

$$\mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j \cdot \omega)^2 \mathbf{M} & \mathbf{k}_j \cdot \omega \mathbf{D} \\ -\mathbf{k}_j \cdot \omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j \cdot \omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (15)$$

et  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}_{nl}$  définis par

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{k_0}^c \quad \mathbf{X}_{k_1}^c \quad \mathbf{X}_{k_1}^s \quad \dots \quad \mathbf{X}_{k_m}^c \quad \mathbf{X}_{k_m}^s]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{k_0}^c \quad \mathbf{F}_{k_1}^c \quad \mathbf{F}_{k_1}^s \quad \dots \quad \mathbf{F}_{k_m}^c \quad \mathbf{F}_{k_m}^s]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{nl} = [\mathbf{F}_{nlk_0}^c \quad \mathbf{F}_{nlk_1}^c \quad \mathbf{F}_{nlk_1}^s \quad \dots \quad \mathbf{F}_{nlk_m}^c \quad \mathbf{F}_{nlk_m}^s]^T \quad (18)$$

Dans la suite, on pose

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p] = \omega_1 \left[ 1, \frac{\omega_2}{\omega_1}, \dots, \frac{\omega_p}{\omega_1} \right] = \omega_1 \boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

et on notera ainsi  $\mathbf{L}$  sous la forme suivante

$$\mathbf{L} = \mathbf{I0} + \omega_1 \mathbf{I1} + \omega_1^2 \mathbf{I2} \quad (20)$$

où les composantes  $\mathbf{I0}$ ,  $\mathbf{I1}$  et  $\mathbf{I2}$  peuvent être obtenues grâce à l'expression

$$\mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j \cdot \omega)^2 \mathbf{M} & \mathbf{k}_j \cdot \omega \mathbf{D} \\ -\mathbf{k}_j \cdot \omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j \cdot \omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} + \omega_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{k}_j \cdot \alpha \mathbf{C} \\ -\mathbf{k}_j \cdot \alpha \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \omega_1^2 \begin{bmatrix} -(\mathbf{k}_j \cdot \alpha)^2 \mathbf{M} & \mathbf{k}_j \cdot \alpha \mathbf{G} \\ -\mathbf{k}_j \cdot \alpha \mathbf{G} & -(\mathbf{k}_j \cdot \alpha)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (22)$$

## 3.2 Extension au cas stochastique

### 3.2.1 MHBM stochastique

Afin de décrire le comportement aléatoire de la réponse dynamique non-linéaire, on propose d'utiliser la méthode du chaos polynomial [1]. Cette dernière consiste à exprimer une quantité aléatoire sur une base de polynôme. Ainsi dans cette étude la réponse non-linéaire aléatoire s'exprime sous la forme

$$\tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (23)$$

où  $\Psi_j$  sont les polynômes d'Hermite et  $\tau$  désigne l'aléa.

Du fait de la présence d'incertitudes sur les paramètres et les excitations du système, les quantités  $\tilde{\mathbf{I0}}(\tau)$ ,  $\tilde{\mathbf{I1}}(\tau)$ ,  $\tilde{\mathbf{I2}}(\tau)$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau)$  dépendent des variables aléatoires  $\underline{\xi}(\tau)$  et peuvent par conséquent être exprimées sur la base du chaos :

$$\tilde{\mathbf{I0}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{I0}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{I1}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{I1}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{I2}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{I2}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)), \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{F}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau) = \sum_{j=0}^{N_p} \mathbf{F}_{nlj} \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (25)$$

La procédure permettant d'obtenir l'expression de  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau)$  sera détaillée par la suite.

Cette description a elle seule ne permet pas de décrire les phénomènes de solutions multiples et la présence de point de retournement dans les problèmes non-linéaires. C'est pourquoi on propose également d'exprimer la pulsation  $\omega$  sur la base du chaos polynomial.

$$\tilde{\omega}(\tau) = \sum_{j=0}^{Np} \omega_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (26)$$

Après calculs, on obtient un nouveau système non-linéaire noté

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{F}}_{nl}(\hat{\mathbf{X}}) \quad (27)$$

de dimension  $(2m+1).Np.n_{ddl}$  ayant  $(2m+2).Np.n_{ddl}$  inconnues. On utilisera alors une condition de phase par rapport au résultat déterministe afin de se ramener à un système de dimension  $(2m+2).Np.n_{ddl}$  à  $(2m+2).Np.n_{ddl}$  inconnues.

### 3.2.2 Évaluation des non-linéarités dans le domaine stochastique : AFT/PC

Dans la cas de non-linéarités non régulières, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques des efforts non-linéaires que ce soit dans le domaine stochastique ou dans le domaine temporel. Par conséquent afin de déterminer l'expression de ces efforts non-linéaires sur la base du chaos, on propose de coupler une méthode AFT et une méthode de collocation probabiliste [7]. Cette méthode probabiliste est basée sur la collocation du problème stochastique à l'aide d'une quadrature de Gauss. On souhaite donc obtenir les composantes de l'expression de l'effort non linéaire exprimé sur la base du chaos sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau) = \sum_{j=0}^{Np} \mathbf{F}_{nlj} \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (28)$$

où

$$\mathbf{F}_{nlj} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau) \Psi_j(\underline{\xi}) \rangle}{\langle \Psi_j^2(\underline{\xi}) \rangle} \quad (29)$$

avec  $\langle \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire défini par

$$\langle a(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi}) \rangle = \int_{\Omega} a(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi}) p(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (30)$$

Cette intégrale peut être évaluée numériquement à l'aide d'une quadrature de Gauss-Hermite définie par

$$\langle a(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi}) \rangle = \sum_{i=1}^n w(\underline{\xi}_i) a(\underline{\xi}_i) \Psi_j(\underline{\xi}_i) \quad (31)$$

où  $\underline{\xi}_i$  sont les points de collocation,  $n$  est le nombre de points et  $w$  la fonction poids définie dans le cas de variables aléatoires gaussiennes par

$$w(\underline{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^r} e^{-\frac{\xi^t \xi}{2}} \quad (32)$$

où  $r$  est la dimension du vecteur  $\underline{\xi}$  et correspond donc au nombre de variables aléatoires du problème.

Ces points de Gauss sont les racines des polynômes orthogonaux et respectent la loi de probabilité du paramètre aléatoire. On a alors :

$$\mathbf{F}_{nlj} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau) \Psi_j(\underline{\xi}) \rangle}{\langle \Psi_j^2(\underline{\xi}) \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^n w(\underline{\xi}_i) \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\underline{\xi}_i) \Psi_j(\underline{\xi}_i)}{\sum_{i=1}^n w(\underline{\xi}_i) \Psi_j^2(\underline{\xi}_i)} \quad (33)$$

L'évaluation des expressions des efforts non-linéaires par couplage d'une procédure AFT et d'une projection sur la base du chaos à l'aide d'une intégration numérique peut se résumer à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{j=0}^{Np} \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) & \xrightarrow[n \text{ points de Gauss}]{\text{évaluation}} & \{\mathbf{X}\}_n & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \{x(t)\}_n \\ & & & & \downarrow \\ \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tau) = \sum_{j=0}^{Np} \mathbf{F}_{nlj} \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) & \xleftarrow{\text{projection } \Psi_j} & \{\mathbf{F}_{nl}\}_n & \xleftarrow{\text{DFT}} & \{f_{nl}(t)\}_n \end{array}$$

## 4 Résultats

On s'intéresse ici aux résultats obtenus pour une excitation monofréquentielle de type balourd. Les deux cas d'étude suivants sont traités

Cas	$\delta_E$	Type de non-linéarité	$\delta_{k_2}$	ordre PCE	ordre HBM
1	2.5%	cubique	-	3	3
2	-	contact	10%	3	1

Tableau 1: Cas testés

### 4.1 Incertitudes sur la raideur linéaire

Dans ce cas, le coefficient de variation  $\delta_E$  est fixé à 2,5% pour le module d'Young de l'arbre du rotor. La non-linéarité retenue est de type raideur cubique au niveau du premier palier. La Figure 2 présente les Fonctions de Réponse en Fréquence obtenues par la méthode de Balance Harmonique Stochastique et les simulations de Monte Carlo pour la réponse non-linéaire globale ainsi que les termes harmoniques d'ordre 1 et 3. On note que les deux approches donnent des résultats similaires sur les contributions linéaires et non-linéaires.

On remarque également que la présence d'incertitudes sur la raideur linéaire tend à décaler les points de retournement. Ceci est nettement visible pour le point situé aux environs de 240Hz. Selon la variation de raideur, la position fréquentielle du point de retournement évolue, l'amplitude quant à elle varie très peu. Pour ce point de retournement, les amplitudes ont pour valeur  $6.10^{-4}m$  et les fréquences varient de 245Hz à 251Hz.

Aussi, comme l'on pouvait s'y attendre, même si l'incertitude est uniquement présente sur un terme linéaire, l'ensemble de la réponse vibratoire (contributions linéaires et non-linéaires) est impactée par cette dernière. Ceci s'explique aisément par le fait que l'estimation de l'effort non-linéaire se calcule par l'intermédiaire de l'amplitude vibratoire de la réponse du système (Technique de collocation probabiliste avec passage alterné temps/fréquence, AFT-PC). Ainsi, les contributions linéaires et non-linéaires sont liées via l'effort provenant de la raideur cubique, ce qui engendre la modification de la réponse non-linéaire globale (et des ordres  $n \times$  associés) du fait d'une incertitude uniquement sur le module d'Young.

Enfin, on peut noter que le caractère non-linéaire du système (fléchissement des pics de résonance sur la réponse non-linéaire globale) est visible et non « masqué » par la présence d'incertitude sur le terme linéaire. Ceci illustre l'intérêt de bien considérer et identifier le comportement non-linéaire d'un système lors de son dimensionnement.

### 4.2 Incertitudes sur la raideur de contact

On s'intéresse dans ce second cas aux effets de la présence d'incertitudes sur un terme non-linéaire, à savoir la raideur de contact ( $\delta_{k_2} = 10\%$ ). La Figure 3 présente la réponse non-linéaire globale obtenue par l'approche HBM stochastique et les tirages de Monte Carlo. Les deux approches donnent également des résultats similaires.

On note une évolution différente par rapport au cas précédent : en effet ici l'incertitude ne porte que sur la raideur après contact dans ce dernier. Par conséquent, les dispersions liées à cette incertitude n'apparaissent qu'après contact (rupture de pente sur la réponse non-linéaire de la Figure 3). On observe par exemple ce phénomène pour le second pic de résonance entre 95Hz et 105Hz : les réponses vibratoires non-linéaires situées entre ces deux ruptures de pente laissent apparaître une forte dispersion. En effet, la variation de raideur de contact tend à augmenter la valeur de la fréquence de résonance.

Pour le troisième pic de résonance, la rupture de pente est très faible. Par conséquent, il est plus difficile de distinguer ce phénomène de dispersion après contact (même si les remarques énoncées précédemment restent valides).

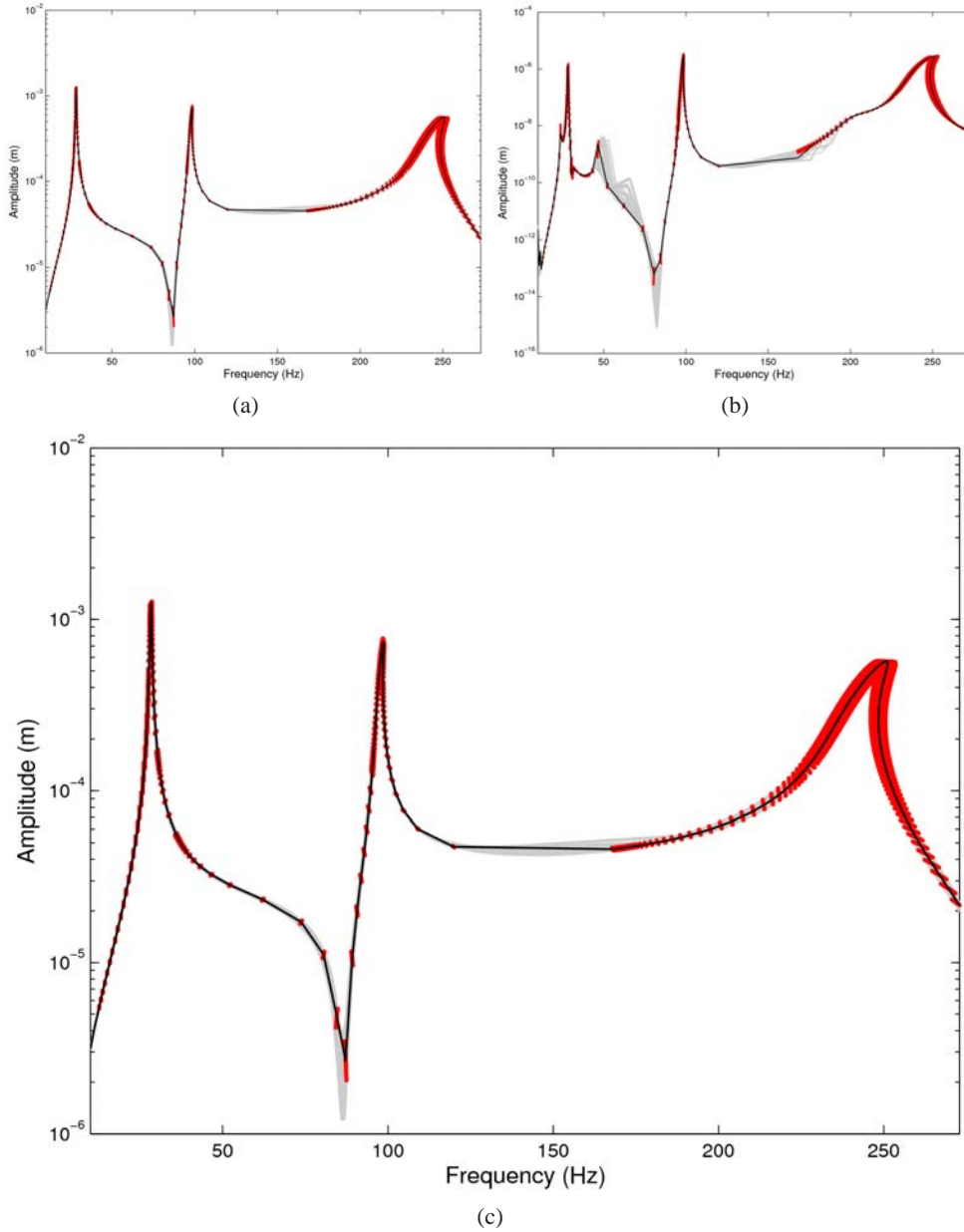


Fig. 2: FRFs (Cas 1) ; PCE (rouge) ; MCS (gris) ; Déterministe (noir) ; Réponses par ordre  $[k_1]$  (a) [1] ; (b) [3] ; (c) réponse non-linéaire globale.

## 5 Conclusion

Dans ce papier une approche permettant de traiter un problème de dynamique non-linéaire stochastique a été développée en se basant sur une approche HBM Multi-dimensionnelle et la méthode du chaos polynomial. La première difficulté liée à la présence de solutions multiples a été levée en proposant une description de la pulsation d'excitation sur une base du chaos. La difficulté à évaluer les efforts non-linéaires dans les domaines fréquentiel et stochastique a elle été levée en utilisant la méthode AFT et une collocation probabiliste.

Les cas présentés valident la méthode et montrent l'intérêt de prendre en compte les incertitudes lors du dimensionnement d'un système non-linéaire possédant des non-linéarités régulières ou non-régulières. Au-delà de la démonstration de l'efficacité et de la robustesse de la méthode de Balance Harmonique Stochastique pour estimer des réponses non-linéaires en présence d'incertitudes, cela montre que le choix effectué lors de l'introduction d'une incertitude dans un système (dans les deux cas testés ici le choix porte sur l'introduction sur un terme linéaire ou non-linéaire), peut avoir un impact non négligeable sur la réponse non-linéaire aléatoire obtenue.

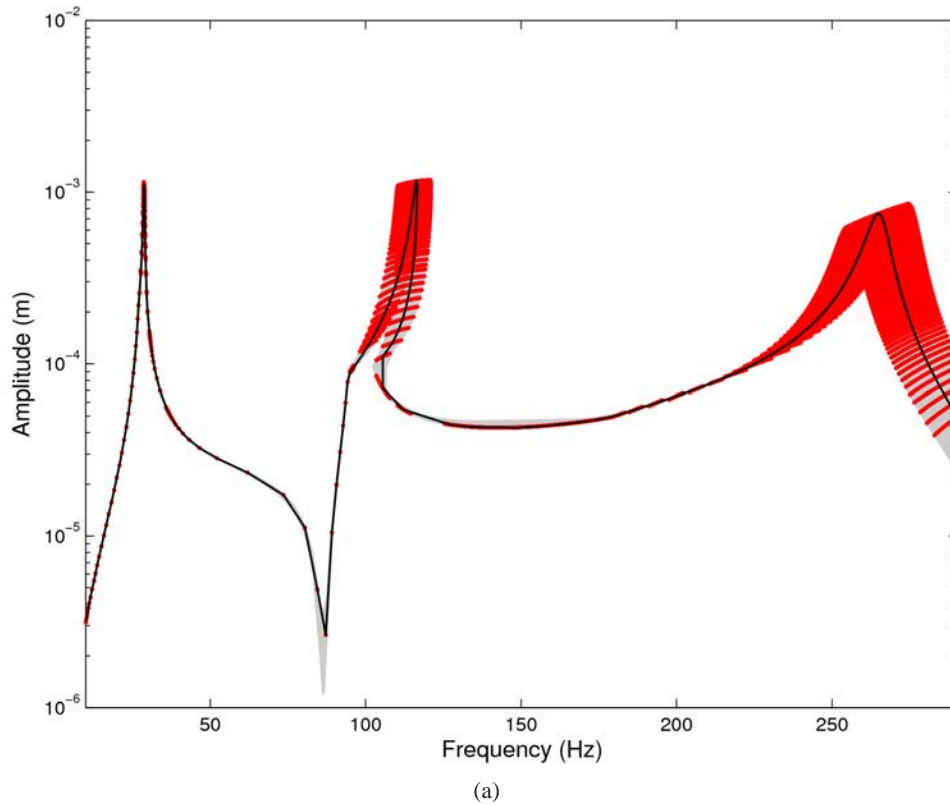


Fig. 3: FRFs (Cas 2) ; PCE (rouge) ; MCS (gris) ; Déterministe (noir) ; Réponse non-linéaire globale.

## Références

- [1] R. Ghanem, P.D. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] J. Didier, B. Faverjon, J.J. Sinou. *Analysing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion*, Journal of Vibration and Control 18(5), SAGE Publications, 712–732, 2012.
- [3] J. Didier, J.J. Sinou, B. Faverjon. *Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2011.
- [4] N. Coudeyras, S. Nacivet, J.J. Sinou. *Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal*, Journal of Sound and Vibration 328(4-5), 520–540, 2009.
- [5] M. Guskov, J.J. Sinou, F. Thouverez. *Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics*, Mechanics Research Communications 35(8), 537–545, 2008.
- [6] T.M. Cameron, J.H. Griffin. *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*, Journal of Applied Mechanics 56(1), American Society of Mechanical Engineers, 149–154, 1989.
- [7] J.A.S. Witteveen, A. Loeven, S. Sarkar, H. Bijl. *Probabilistic collocation for period-1 limit cycle oscillations*, Journal of Sound and Vibration 311(1-2), 421–439, 2008.