



**HAL**  
open science

## La méthode CGSM pour l'analyse statique des plaques avec variabilité

Mahyunirsyah Mahjudin, Frédéric Druesne, Irwan Katili, Pascal Lardeur

► **To cite this version:**

Mahyunirsyah Mahjudin, Frédéric Druesne, Irwan Katili, Pascal Lardeur. La méthode CGSM pour l'analyse statique des plaques avec variabilité. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722057

**HAL Id: hal-01722057**

**<https://hal.science/hal-01722057>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## La méthode CGSM pour l'analyse statique des plaques avec variabilité

Mahyunirsyah MAHJUDIN <sup>1,2\*</sup>, Frédéric DRUESNE <sup>1</sup>, Irwan KATILI <sup>2</sup>, Pascal LARDEUR <sup>1</sup>

1 Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, France

mahyunirsyah.mahjudin@utc.fr, frederic.druesne@utc.fr, pascal.lardeur@utc.fr

2 Département de Génie Civil, Universitas Indonesia, Jakarta, Indonésie, irwan.katili@gmail.com

\* Auteur correspondant

---

**Résumé** — L'objectif de cet article est de présenter et d'évaluer la méthode CGSM (Certain Generalized Stresses Method) pour prendre en compte la variabilité dans les calculs statiques de plaques modélisées par éléments finis. La méthode ne nécessite que quelques analyses éléments finis pour calculer la variabilité des déplacements. Les quantités statistiques : moyenne, écart-type et distribution, sont obtenues par simulation de Monte Carlo, en exploitant une formule semi-analytique. Trois exemples sont traités : une plaque carrée en traction, une plaque trouée en traction et une plaque en flexion. La méthode fournit des résultats de bonne qualité et elle est très économique d'un point de vue temps de calcul.

**Mots clés** — variabilité, éléments finis, plaque, probabiliste, Monte Carlo

---

### 1. Introduction

La prise en compte de la variabilité dans les calculs éléments finis est un sujet qui fait actuellement l'objet de nombreuses recherches. Nous présentons ici la méthode CGSM (Certain Generalized Stresses Method), une approche probabiliste reposant sur l'hypothèse de stabilité des efforts généralisés. La particularité de cette méthode est qu'elle nécessite un nombre très réduit d'analyses éléments finis. Elle permet le traitement de problèmes de grande taille et la prise en compte d'un grand nombre de variables aléatoires. La méthode a déjà été présentée pour l'analyse des treillis de barres ou de poutres [1,2,3]. Elle est ici présentée pour les plaques modélisées par des éléments finis de types triangle à trois nœuds ou quadrangle à quatre nœuds.

### 2. La méthode CGSM (Certain Generalized Stresses Method)

#### 2.1. Principe de la méthode CGSM

L'organigramme de la méthode CGSM est montré dans la figure 1. Le principe de base est de considérer que les efforts généralisés sont indépendants des paramètres incertains. Les efforts généralisés de membrane et/ou de flexion sont calculés dans la configuration nominale. Grâce à l'hypothèse CGSM, il est possible de calculer l'énergie interne de déformation du système, pour toutes les valeurs des paramètres incertains, sans nouvelle analyse par éléments finis. Le déplacement d'un point de la structure est évalué en utilisant le théorème de Castigliano, qui permet d'obtenir une expression semi-analytique du déplacement. Deux analyses éléments finis sont nécessaires pour calculer la variabilité du déplacement en un point. La moyenne, l'écart-type et la distribution sont obtenues par l'approche CGSM + Monte Carlo. La moyenne et l'écart-type peuvent souvent être obtenus par la voie analytique. Si on veut calculer la variabilité en  $n$  points,  $n+1$  analyses éléments finis sont nécessaires. Finalement, la méthode CGSM peut être considérée comme un post-traitement de quelques calculs éléments finis. Les résultats nominaux peuvent être obtenus avec tout logiciel

standard. Les développements spécifiques à la méthode CGSM sont réalisés dans l'environnement Matlab. Finalement, la méthode CGSM est non intrusive.

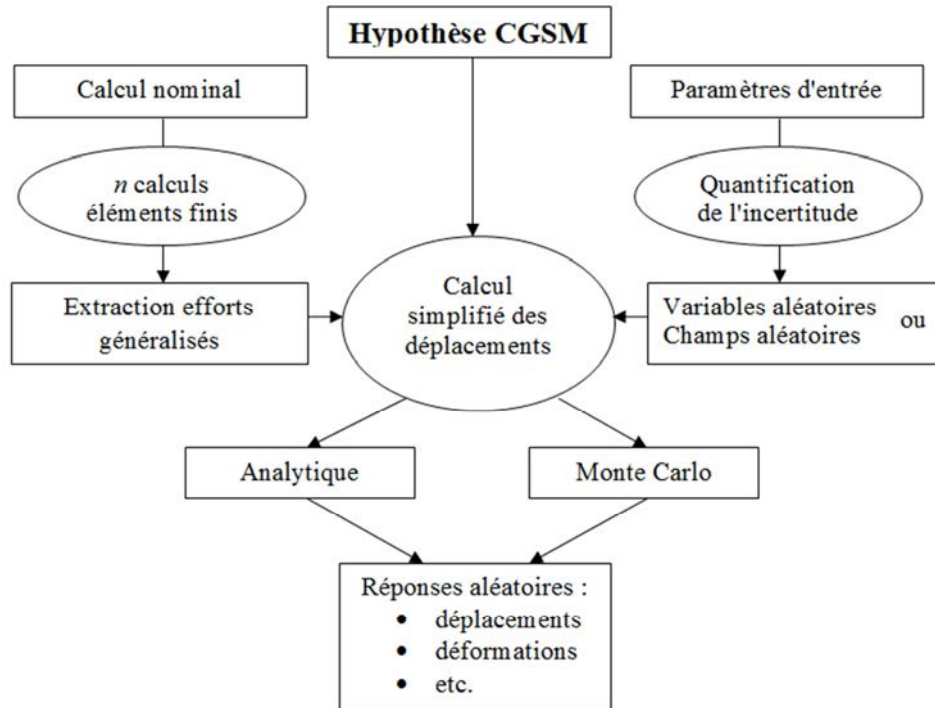


Fig. 1. Principe de la méthode CGSM pour le calcul de variabilité

## 2.2. Champs aléatoires

Les quantités incertaines (propriétés matériau ou géométriques) sont modélisées en utilisant des champs aléatoires. Les données du champ aléatoire sont la distribution de probabilité et la corrélation entre les variables.

Dans la méthode du point milieu introduite par Der Kiureghian et Ke [4] et utilisée dans cette étude, le champ aléatoire est discrétisé aux centres de gravité des éléments. Cette technique est largement utilisée dans les applications principalement en raison de sa simplicité. Le principal inconvénient de cette méthode est que le nombre de variables aléatoires utilisées pour représenter le champ aléatoire peut être très important si le maillage comporte de nombreux éléments. En effet, une variable aléatoire  $X_i$  est définie sur chaque élément. Le processus pour le calcul des champs aléatoires est le suivant :

- a. Calcul de la distance entre les centres de gravité de tous les éléments
- b. Calcul de la matrice de fonction de corrélation
  - fonction de corrélation exponentielle et isotrope

$$\rho[X_1, X_2] = \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) \quad (1)$$

où  $\tau$  représente la distance absolue entre deux points, alors que  $\lambda$  est la longueur de corrélation.

- fonction de corrélation exponentielle et anisotrope

$$\rho[X_1, X_2] = \exp\left[-\left(\frac{|\tau_1|}{\lambda_1} + \frac{|\tau_2|}{\lambda_2}\right)\right] \quad (2)$$

où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  représentent les distances suivant  $x$  et  $y$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les longueurs de corrélation suivant  $x$  et  $y$ .

- c. Calcul de la matrice de covariance

$$Cov[X_1, X_2] = \rho[X_1, X_2] \sigma(X_1)\sigma(X_2) \quad (3)$$

- d. Calcul de la décomposition de la matrice de covariance, en utilisant la matrice  $[L]$  issue de la décomposition de Cholesky
- e. Calcul du champ aléatoire en utilisant la formulation suivante :

$$\{\mathbf{H}\} = \{m(X_i)\} + [L]\{X_i\} \quad (4)$$

### 2.3. Maillage et calcul de variabilité

Dans cette étude, nous tentons de distinguer les erreurs liées au maillage et celles dues à la méthode CGSM. Pour identifier les erreurs liées au maillage, une approche rigoureuse consiste à réaliser une étude de convergence menant à différentes simulations de Monte Carlo directes, avec des maillages de plus en plus fins. Cela permet de calculer les quantités statistiques (moyenne, écart-type) avec une précision maîtrisée. Cette approche est lourde et coûteuse. Notre stratégie consiste plutôt à identifier le bon maillage en configuration nominale et à tester ensuite sa validité pour le calcul de variabilité. Deux techniques de maillage ont été utilisées : le maillage réglé et le maillage adaptatif proposé dans le logiciel Abaqus [6]. Pour cette approche itérative, nous utilisons l'indicateur d'erreur basé sur la densité d'énergie de déformation de chaque élément. Cette procédure de maillage adaptatif a été mise en œuvre pour l'exemple de la plaque trouée en traction présenté dans le paragraphe 3.2.

### 2.4. Formulation de la méthode CGSM pour les plaques

Dans ce paragraphe, la méthode CGSM est développée pour les plaques en membrane et en flexion. Les plaques en membrane utilisent le triangle à 3 nœuds (T3 ou CST) et le quadrangle à 4 nœuds (Q4). Les plaques en flexion utilisent les éléments à 4 nœuds DKMQ proposés par Katili [5] et S4R d'Abaqus [6].

L'objectif est de calculer la variabilité d'un déplacement, en exploitant l'énergie interne de déformation :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV \quad (5)$$

où  $\langle \varepsilon \rangle$  sont les déformations,  $[H]$  est la loi de comportement et  $V$  est le volume de la structure.

#### 2.4.1. Formulation de la méthode CGSM pour les plaques en membrane

La relation entre les déformations et les efforts normaux  $\{N\}$  est :

$$\{ \varepsilon \} = \frac{1}{h} [H]^{-1} \{ N \} \quad (6)$$

où  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \rangle$  sont les déformations et  $\langle N \rangle = \langle N_x \ N_y \ N_{xy} \rangle$  les efforts normaux. En reportant dans l'équation (5), on obtient :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \int_A \frac{1}{h} \langle N \rangle [H]^{-1} \{ N \} dA \quad (7)$$

En considérant que le domaine est discrétisé par éléments finis et que le matériau est homogène isotrope, l'équation (7) peut s'écrire :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{1}{E_i h_i} (N_{x_i}^2 - 2v_i N_{x_i} N_{y_i} + N_{y_i}^2 + 2(1 + v_i) N_{x y_i}^2) dA \quad (8)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments finis,  $N_{x_i}$ ,  $N_{y_i}$  et  $N_{x y_i}$  sont les efforts normaux dans l'élément  $i$ ,  $A_i$  est l'aire de l'élément  $i$ ,  $E_i$  est le module d'élasticité de l'élément  $i$ ,  $h_i$  est l'épaisseur de l'élément  $i$  et  $v_i$  est le coefficient de Poisson de l'élément  $i$ .

Afin d'appliquer le théorème de Castigliano pour le calcul du déplacement  $U$  d'un point  $P$  dans une direction donnée, dans chaque élément les efforts normaux sont décomposés en deux contributions :

$$\begin{aligned}
N_{x_i} &= N_{x_i}' + FN_{x_i}'' \\
N_{y_i} &= N_{y_i}' + FN_{y_i}'' \\
N_{xy_i} &= N_{xy_i}' + FN_{xy_i}''
\end{aligned} \tag{9}$$

où  $F$  est la charge appliquée au point  $P$  dans la direction d'intérêt ( $F$  est une force si la variabilité d'un déplacement doit être évaluée ou un moment si la variabilité de la rotation doit être évaluée) ;  $N_{x_i}$ ,  $N_{y_i}$  et  $N_{xy_i}$  sont les efforts normaux dans l'élément  $i$  ;  $N_{x_i}'$ ,  $N_{y_i}'$  et  $N_{xy_i}'$  sont les efforts normaux dans l'élément  $i$ , dus aux charges appliquées sur toute la structure à l'exception du point  $P$  dans la direction d'intérêt ;  $N_{x_i}''$ ,  $N_{y_i}''$  et  $N_{xy_i}''$  sont les efforts normaux dans l'élément  $i$ , dus à une charge unitaire appliquée au point  $P$  dans la direction d'intérêt.

Pour obtenir le déplacement d'un point  $P$  dans une direction donnée, le théorème de Castigliano est utilisé :

$$U = \frac{\partial \pi_{int}}{\partial F} \tag{10}$$

Notre objectif est de considérer des interpolations des efforts normaux indépendantes de la formulation initiale de l'élément. En effet, nous supposons que l'analyse éléments finis nominale a été réalisée avec un logiciel standard et nous n'avons donc pas d'information précise sur la formulation de l'élément. Pour les éléments T3 et Q4 considérés ici, les efforts normaux sont supposés constants par élément. L'équation (10) devient :

$$\begin{aligned}
U = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{E_i h_i} & \left( N_{x_i}'' (N_{x_i}' + FN_{x_i}'') + N_{y_i}'' (N_{y_i}' + FN_{y_i}'') + 2N_{xy_i}'' (N_{xy_i}' + FN_{xy_i}'') \right) \\
& + v_i \left( 2N_{xy_i}'' (N_{xy_i}' + FN_{xy_i}'') - (N_{x_i}' N_{y_i}'' + N_{x_i}'' N_{y_i}' + 2FN_{x_i}'' N_{y_i}'') \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

#### 2.4.2. Formulation de la méthode CGSM pour les plaques en flexion

La relation entre les déformations de flexion et les moments  $\{M\}$  est :

$$\{\chi\} = \frac{12}{h^3} [H]^{-1} \{M\} \tag{12}$$

où  $\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \ \beta_{y,y} \ (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \rangle$  sont les déformations de flexion et  $\langle M \rangle = \langle M_x \ M_y \ M_{xy} \rangle$  les moments. Pour les plaques sans cisaillement transversal, l'énergie interne de déformation s'écrit :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \int_A \frac{12}{h^3} \langle M \rangle [H]^{-1} \{M\} dA \tag{13}$$

En considérant que le domaine est discrétisé par éléments finis et que le matériau est homogène isotrope, l'équation (13) peut s'écrire :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{12}{E_i h_i^3} (M_{x_i}^2 - 2v_i M_{x_i} M_{y_i} + M_{y_i}^2 + 2(1 + v_i) M_{xy_i}^2) dA \tag{14}$$

où  $n$  est le nombre d'éléments finis,  $M_{x_i}$ ,  $M_{y_i}$  et  $M_{xy_i}$  sont les moments dans l'élément  $i$ ,  $A_i$  est l'aire de l'élément  $i$ ,  $E_i$  est le module d'élasticité de l'élément  $i$ ,  $h_i$  est l'épaisseur de l'élément  $i$  et  $v_i$  est le coefficient de Poisson de l'élément  $i$ .

Afin d'appliquer le théorème de Castigliano pour le calcul du déplacement  $U$  d'un point  $P$  dans une direction donnée, dans chaque élément les moments sont décomposés en deux contributions :

$$\begin{aligned}
M_{x_i} &= M_{x_i}' + FM_{x_i}'' \\
M_{y_i} &= M_{y_i}' + FM_{y_i}'' \\
M_{xy_i} &= M_{xy_i}' + FM_{xy_i}''
\end{aligned} \tag{15}$$

où  $F$  est la charge appliquée au point  $P$  dans la direction d'intérêt ( $F$  est une force si la variabilité d'un déplacement doit être évaluée ou un moment si la variabilité de la rotation doit être évaluée) ;  $M_{x_i}$ ,  $M_{y_i}$  et  $M_{xy_i}$  sont les moments dans l'élément  $i$  ;  $M_{x_i}'$ ,  $M_{y_i}'$  et  $M_{xy_i}'$  sont les moments dans l'élément  $i$ , dus aux charges appliquées sur toute la structure à l'exception du point  $P$  dans la direction d'intérêt ;  $M_{x_i}''$ ,  $M_{y_i}''$  et  $M_{xy_i}''$  sont les moments dans l'élément  $i$ , dus à une charge unitaire appliquée au point  $P$  dans la direction d'intérêt.

On utilise ensuite le théorème de Castigliano (équation (10)). Les moments sont supposés constants par élément. Le déplacement s'écrit :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{12A_i}{E_i h_i^3} \left( M_{x_i}'' (M_{x_i}' + FM_{x_i}'') + M_{y_i}'' (M_{y_i}' + FM_{y_i}'') + 2M_{xy_i}'' (M_{xy_i}' + FM_{xy_i}'') \right) + v_i \left( 2M_{xy_i}'' (M_{xy_i}' + FM_{xy_i}'') - (M_{x_i}' M_{y_i}'' + M_{x_i}'' M_{y_i}' + 2FM_{x_i}'' M_{y_i}') \right) \quad (16)$$

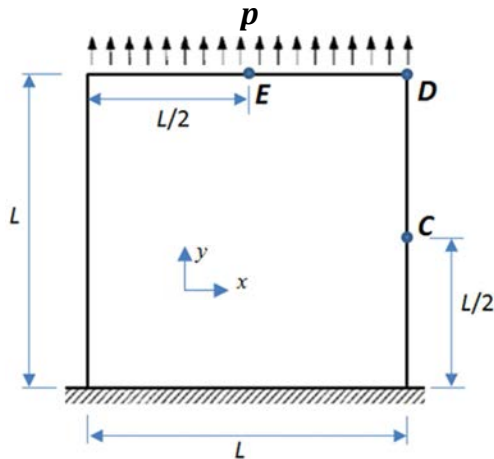
Pour les plaques avec cisaillement transversal, la même méthodologie est utilisée. Le déplacement  $U$  s'obtient en ajoutant à l'expression de l'équation (16) les termes suivants :

$$\sum_{i=1}^n \frac{2A_i(1+v_i)}{E_i k h_i} \left( T_{x_i}'' (T_{x_i}' + FT_{x_i}'') + T_{y_i}'' (T_{y_i}' + FT_{y_i}'') \right) \quad (17)$$

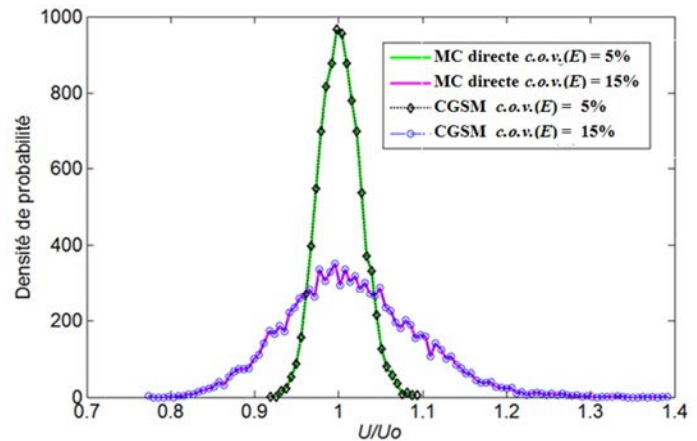
### 3. Exemples

#### 3.1. Plaque carrée en traction

Le premier exemple, présenté dans la figure 2(a), est une plaque carrée en traction. Cet exemple a notamment été traité par Rahman et Rao [7]. La plaque est encastree sur un côté et soumise à un effort réparti à l'autre extrémité. Le module d'élasticité  $E$  est défini par un champ aléatoire. Le coefficient de variation  $c.o.v.(E)$  varie entre 5% et 15% et différentes longueurs de corrélation sont considérées. Les simulations de Monte Carlo directe ou avec CGSM sont réalisées avec 10000 tirages.



(a) Géométrie, conditions aux limites et chargement



(b) Densité de probabilité du déplacement au point C

Fig. 2. Plaque carrée en traction

La figure 2(b) montre la distribution du déplacement au point  $C$  ( $U_o$  : déplacement nominal), pour deux niveaux de variabilité ( $c.o.v.(E) = 5\%$  ou  $15\%$ ). La fonction de corrélation exponentielle et isotrope (équation (1)) est utilisée avec  $\lambda = 0,1L$ . La méthode CGSM fournit des résultats très proches de ceux obtenus par la simulation de Monte Carlo directe.

Les résultats CGSM sont ensuite comparés à ceux obtenus par Rahman et Rao [7], ainsi qu'avec une solution de référence obtenue par simulation de Monte Carlo directe. On utilise une fonction de

corrélation exponentielle et anisotrope (équation (2)), avec  $\lambda_1 = L$  et  $\lambda_2 = 2L$ . Le niveau de variabilité est défini par  $c.o.v.(E) = 0,12$ . Le tableau 1 montre la moyenne et l'écart-type des déplacements. La méthode CGSM fournit des résultats très précis. En effet, les erreurs maximales valent 0,2% et 1,3% pour la moyenne et la variance du déplacement respectivement. Les résultats obtenus par Rahman et Rao [7] sont de moins bonne qualité. Nous pensons que cela est dû au fait qu'ils ont utilisé un maillage trop grossier.

Concernant le temps de calcul, le facteur d'accélération obtenu par la méthode CGSM est de l'ordre de 100, par rapport à la simulation de Monte Carlo directe.

| Point |   | Rahman et Rao [7]      |            | CGSM                   |            | Monte Carlo directe |            |
|-------|---|------------------------|------------|------------------------|------------|---------------------|------------|
|       |   | Résultats statistiques | erreur     | Résultats statistiques | erreur     | Référence           |            |
| C     | x | $m(U)$                 | -1,477E-01 | -0,3%                  | -1,479E-01 | -0,1%               | -1,481E-01 |
|       |   | $\sigma^2(U)$          | 8,394E-04  | -6,3%                  | 8,960E-04  | 0,0%                | 8,957E-04  |
|       | y | $m(U)$                 | 5,056E-01  | -0,3%                  | 5,079E-01  | 0,2%                | 5,071E-01  |
|       |   | $\sigma^2(U)$          | 3,772E-03  | -7,7%                  | 4,137E-03  | 1,3%                | 4,086E-03  |

Tableau 1. Plaque en traction – variabilité des déplacements

### 3.2. Plaque trouée en traction

Le second exemple, présenté dans la figure 3, est une plaque trouée en traction. Cet exemple a notamment été traité par Rahman et Xu [8]. Le même type d'étude que pour le premier exemple a été mené. De plus, la variabilité des déformations a été observée. La plaque est soumise à une charge uniformément répartie aux extrémités. Le module d'élasticité  $E$  est défini par un champ aléatoire anisotrope. Le coefficient de variation  $c.o.v.(E)$  varie entre 5% et 15% et différentes longueurs de corrélation sont considérées. Les simulations de Monte Carlo directe ou avec CGSM sont réalisées avec 10000 tirages.

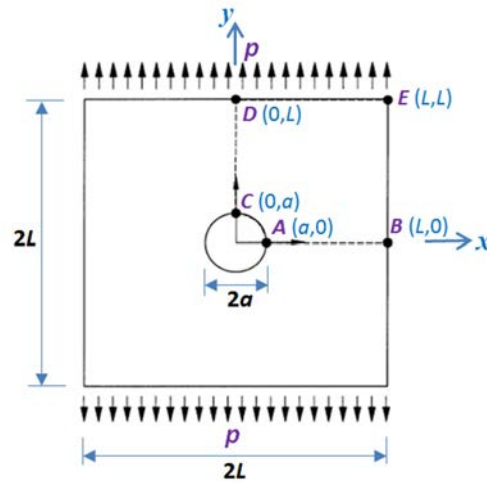


Fig. 3. Plaque trouée en traction

Les résultats CGSM sont d'abord comparés à ceux obtenus par Rahman et Xu [8], ainsi qu'avec une solution de référence obtenue par simulation de Monte Carlo directe. Pour la fonction de corrélation on utilise l'équation (2), avec  $\lambda_1 = 0,5L$  et  $\lambda_2 = 0,5L$ . Le niveau de variabilité est défini par  $c.o.v.(E) = 0,1$ . Le tableau 2 montre la moyenne et l'écart-type des déplacements. La méthode CGSM fournit des résultats très précis. Les erreurs maximales valent 0,5% et 0,6% pour la moyenne et l'écart-type du déplacement respectivement. Les résultats obtenus par Rahman et Xu [8] sont de moins bonne qualité. Nous pensons que de nouveau, cela est dû au fait qu'ils ont utilisé un maillage trop grossier.

Nous avons ensuite fait varier la longueur de corrélation,  $\lambda = 0,01L$  à  $100L$ , pour deux niveaux de variabilité :  $c.o.v.(E) = 5\%$  ou  $15\%$ . Le tableau 3 montre les erreurs maximales sur la moyenne et l'écart-type du déplacement au point A. L'ensemble des résultats obtenus avec la méthode CGSM est satisfaisant. Les erreurs maximales valent environ 1% et 5% pour la moyenne et l'écart-type du déplacement respectivement.

Pour cet exemple également, la méthode CGSM est très performante en temps de calcul. Pour les cas testés, le facteur d'accélération est de l'ordre de 150, par rapport à une simulation de Monte Carlo directe.

| Point |   |             | Rahman et Xu [8]       |        | CGSM                   |        | Monte Carlo directe |
|-------|---|-------------|------------------------|--------|------------------------|--------|---------------------|
|       |   |             | Résultats statistiques | erreur | Résultats statistiques | erreur | Référence           |
| A     | x | $m(U)$      | -9,75E-01              | -4,4%  | -1,01E+00              | -0,5%  | -1,02E+00           |
|       |   | $\sigma(U)$ | 1,12E-01               | -7,2%  | 1,20E-01               | -0,3%  | 1,21E-01            |
| B     | x | $m(U)$      | -6,20E+00              | 0,1%   | -6,20E+00              | 0,1%   | -6,20E+00           |
|       |   | $\sigma(U)$ | 4,65E-01               | 1,5%   | 4,61E-01               | 0,5%   | 4,58E-01            |
| C     | y | $m(U)$      | 2,97E+00               | -2,4%  | 3,04E+00               | -0,2%  | 3,04E+00            |
|       |   | $\sigma(U)$ | 2,50E-01               | -7,0%  | 2,69E-01               | 0,1%   | 2,69E-01            |
| D     | y | $m(U)$      | 2,04E+01               | -0,1%  | 2,05E+01               | 0,3%   | 2,04E+01            |
|       |   | $\sigma(U)$ | 1,34E+00               | -0,4%  | 1,34E+00               | 0,6%   | 1,33E+00            |

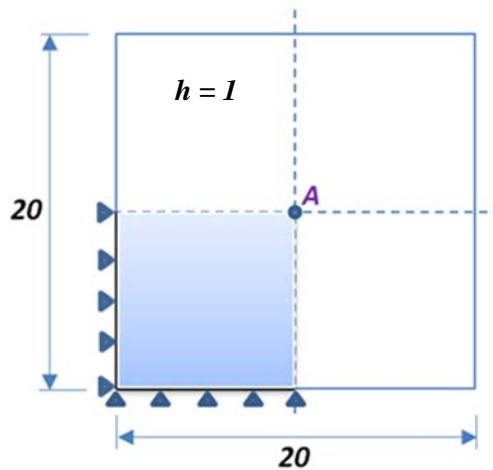
Tableau 2. Plaque trouée en traction – variabilité des déplacements

|                        | $\lambda = 0.01L$ |      | $\lambda = 0.1L$ |      | $\lambda = L$ |      | $\lambda = 10L$ |      | $\lambda = 100L$ |      |
|------------------------|-------------------|------|------------------|------|---------------|------|-----------------|------|------------------|------|
|                        | 5%                | 15%  | 5%               | 15%  | 5%            | 15%  | 5%              | 15%  | 5%               | 15%  |
| $c.o.v.(E)$            | 5%                | 15%  | 5%               | 15%  | 5%            | 15%  | 5%              | 15%  | 5%               | 15%  |
| Erreur sur $m(U)$      | 0,3%              | 0,6% | 0,2%             | 0,1% | 0,5%          | 0,6% | 0,4%            | 0,6% | 0,3%             | 0,3% |
| Erreur sur $\sigma(U)$ | 0,4%              | 4,7% | 0,2%             | 2,6% | 1,9%          | 1,7% | 0,1%            | 1,4% | 2,5%             | 0,8% |

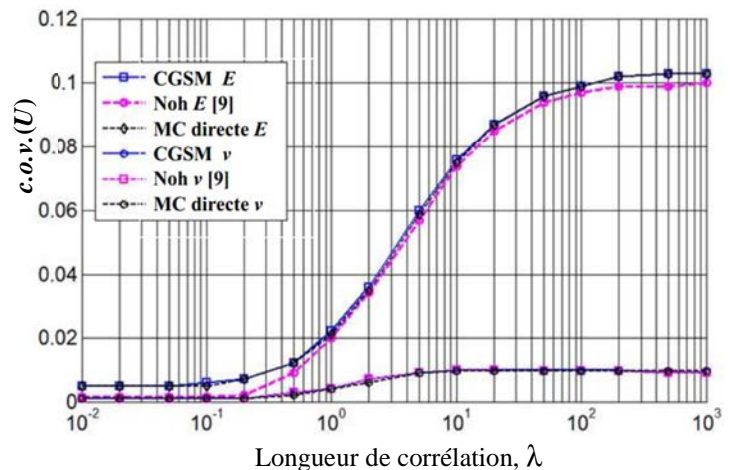
Tableau 3. Erreurs sur les résultats statistiques du déplacement au point A

### 3.3. Plaque en flexion

Le troisième exemple, présenté dans la figure 4(a), est une plaque carrée en flexion, simplement supportée et soumise à un chargement réparti uniforme. Cet exemple a notamment été traité par Noh [9]. Les paramètres aléatoires sont le module d'élasticité et le coefficient de Poisson, représentés par des champs aléatoires anisotropes. Le coefficient de variation  $c.o.v.(E)$  vaut 0,1 et différentes longueurs de corrélation sont considérées. Pour la fonction de corrélation on utilise l'équation (2) avec  $\lambda = 0,01$  à 1000. Les simulations de Monte Carlo directe ou avec CGSM sont réalisées avec 10000 tirages. La variabilité du déplacement vertical du point central A est calculée. Les calculs sont réalisés avec un maillage 24x24 pour un quart de la plaque.



(a) Géométrie et conditions aux limites de la plaque en flexion



(b) Variabilité du déplacement au point A

Fig. 4. Plaque carrée en flexion

La figure 4(b) montre l'évolution du coefficient de variation du déplacement au point A, en considérant comme quantité aléatoire le module d'élasticité ou le coefficient de Poisson. On constate d'abord que la variabilité du déplacement augmente de façon non linéaire avec la longueur de corrélation. On observe aussi que la variabilité du déplacement est beaucoup plus élevée dans le cas où



le module d'élasticité est aléatoire, par rapport à celui où l'incertitude concerne le coefficient de Poisson. La méthode CGSM fournit des résultats très proches de ceux obtenus par la simulation de Monte Carlo directe. Nos résultats sont également cohérents avec ceux présentés par Noh [9].

De nouveau, la méthode CGSM est très performante en temps de calcul. Le facteur d'accélération est de l'ordre de 200, par rapport à une simulation de Monte Carlo directe.

### 3. Conclusion et perspectives

Dans cet article, les principes de base de la méthode CGSM ont été rappelés. La méthode ne nécessite qu'un nombre très réduit d'analyses éléments finis en configuration nominale. Ces calculs peuvent être réalisés avec tout logiciel standard (ex : Abaqus, Nastran, Ansys...). Les développements spécifiques à la méthode CGSM sont réalisés dans l'environnement Matlab. Finalement, c'est une méthode non intrusive. La formulation de la méthode CGSM, pour les plaques en membrane et en flexion, a ensuite été décrite. Trois exemples académiques ont été traités. Les résultats statistiques obtenus avec la méthode CGSM ont été comparés à des résultats de référence calculés par simulation de Monte Carlo directe. La méthode CGSM fournit des résultats de bonne qualité en ce qui concerne la moyenne, l'écart-type, le coefficient de variation et la distribution des déplacements. Sur l'ensemble des cas testés, les erreurs sur la moyenne et l'écart-type des déplacements restent toujours inférieures à 1% et 5% respectivement. La méthode CGSM est très efficace en temps de calcul. En effet, des facteurs d'accélération de l'ordre de 100 à 200, par rapport à une simulation de Monte Carlo directe, ont été observés. La suite de l'étude consiste à développer la méthode CGSM pour les structures de type coque. Une validation sur des exemples académiques et industriels est envisagée.

### Remerciements

Les auteurs remercient le gouvernement indonésien et l'ambassade de France en Indonésie pour le support financier de la thèse de doctorat de Mahyunirsyah Mahjudin.

### Références

- [1] P. Lardeur, M. Oudjene, E. Arnoult. Une méthode rapide pour la prise en compte des incertitudes dans les structures minces ; application aux treillis, Colloque national en calcul des structures, Giens, 2003.
- [2] P. Lardeur, A. Demri, C. Lionnet, E. Arnoult. Application de la méthode MEGC aux treillis de barres hyperstatiques, Colloque national en calcul des structures, Giens, 2005.
- [3] P. Lardeur, E. Arnoult, L. Martini, C. Knopf-Lenoir. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability, *Finite Elements in Analysis and Design*, 50, 231-242, 2011.
- [4] A. Der Kiureghian, J.B. Ke. The stochastic finite element method in structural reliability, *Probability Engineering Mechanics*, 3, 83-91, 1988.
- [5] I. Katili. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields. Part 2: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1885-1908, 1993.
- [6] ABAQUS/Standard User's Manual. Abaqus 6.11, Dassault Systèmes Simulia, 2011.
- [7] S. Rahman, B.N. Rao. A perturbation method for stochastic meshless analysis in elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 1969-1991, 2001.
- [8] S. Rahman, H. Xu. A meshless method for computational stochastic mechanics, *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 6, 41-58, 2005.
- [9] H.C. Noh. Effect of multiple uncertain material properties on the response variability of in-plane and plate structures, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 2697-2718, 2006.