



HAL
open science

PGD-TVRC : une méthode de réduction de modèle pour les vibrations moyennes fréquences

Hervé Riou, Andrea Barbarulo, Louis Kovalevsky, Pierre Ladevèze

► To cite this version:

Hervé Riou, Andrea Barbarulo, Louis Kovalevsky, Pierre Ladevèze. PGD-TVRC : une méthode de réduction de modèle pour les vibrations moyennes fréquences. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722050

HAL Id: hal-01722050

<https://hal.science/hal-01722050v1>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

PGD-TVRC : une méthode de réduction de modèle pour les vibrations moyennes fréquences

Herve RIOU ¹, Andrea BARBARULO ¹, Louis KOVALEVSKY ², Pierre LADEVEZE ¹

¹ LMT Cachan, ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris

² University of Cambridge, Department of Engineering, Trumpington Street, CB21PZ Cambridge, United Kingdom
riou@lmt.ens-cachan.fr, barbarulo@lmt.ens-cachan.fr, lk315@cam.ac.uk, ladeveze@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — La prédiction de la réponse acoustique d'un système dans le domaine des moyennes fréquences est un enjeu réel pour les industries de pointe. De nombreuses techniques résolvent ce problème en faisant des calculs fréquence par fréquence, pour de très nombreuses fréquences. Dans cet article, nous proposons une nouvelle manière de le faire, en nous appuyant sur la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) et la Proper Generalized Decomposition (PGD). La TVRC est utilisée pour calculer une solution vibratoire approchée à faible coût de calcul. La PGD est utilisée pour étendre ce calcul à des bandes de fréquences très larges.

Mots clés — Moyennes fréquences, vibrations, acoustique, Théorie Variationnelle des Rayons Complexes, Proper Generalized Decomposition, réduction de modèles

1 Introduction

Les stratégies de prédiction numérique sont de plus en plus importantes pour de nombreuses applications industrielles, car elles limitent les expérimentations sur prototypes au minimum. C'est par exemple le cas pour les problèmes d'acoustique dans le monde de l'aéronautique ou celui de l'automobile. C'est dans cette vision que s'inscrit le travail présenté dans ce papier, qui concerne la prédiction du comportement acoustique des systèmes, et notamment la possibilité de le faire sur des bandes de fréquences. Il se base sur une technique de représentation des données par séparation de variables, et utilise la combinaison de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTOR) [1] et de la Proper Generalized Decomposition (PGD) [2].

La TVRC est une méthode de Trefftz et utilise des solutions exactes des équations d'équilibre pour approcher la solution du problème. Elle s'appuie sur une formulation variationnelle du problème qui est telle que les approximations utilisées dans chacun des éléments sont indépendantes entre elles. En conséquence, dans chaque élément, on peut utiliser n'importe quel type de fonction à partir du moment où elle vérifie les équations d'équilibre. Cette propriété donne à la TVRC une grande flexibilité et donc une grande efficacité car toutes les fonctions qui ont un vrai sens physique peuvent être utilisées sans aucune difficulté.

Le gros avantage de toutes les méthodes de Trefftz est lié au fait qu'elles utilisent des solutions exactes des équations d'équilibre, ce qui permet d'avoir une très bonne solution approchée même en utilisant peu de fonctions d'approximation. En conséquence, la taille du modèle et les efforts numériques à réaliser sont considérablement réduits par rapport aux méthodes traditionnelles qui s'appuient sur des approximations polynomiales. La TVRC se différencie des autres méthodes de Trefftz (comme la partition de l'unité, [3], la méthode variationnelle ultra-faible [4], la méthode des moindres carrés [5], la méthode de l'enrichissement discontinu [6], la méthode des éléments libres [7], la méthode des éléments de frontière par ondes [8] ou la méthode basée sur des ondes ([9]) par la manière de prendre en compte les conditions de transmission entre les éléments et les types de fonctions utilisées. La TVRC a déjà montré de bonnes propriétés d'approximation sur des exemples d'assemblage de plaques en 3 dimensions [10], de plaques hétérogènes [11], de coques [12] ou encore sur des problèmes d'acoustique [13].

La PGD est une technique de réduction de modèle. Elle a déjà été utilisée avec succès pour la résolution de problèmes multiparamétriques (problèmes dont la solution dépend de nombreux paramètres,

comme l'espace et le temps, l'espace et des paramètres incertains, ...). On a affaire à ce genre de problème lorsqu'on souhaite résoudre un problème de vibration sur des bandes de fréquences. C'est cette problématique qui a motivé l'alliance de la PGD et de la TVRC comme cela va être présenté dans ce papier.

La TVRC a déjà été adaptée pour résoudre des problèmes de vibrations sur des bandes de fréquences (voir [14] et [15]). Dans ces travaux, les auteurs ont proposé des nouveaux algorithmes pour calculer des solutions à de multiples fréquences, soit en utilisant un ensemble de paramètres permettant de décrire la variabilité de la matrice TVRC en fonction de la fréquence, soit en développant la matrice TVRC sur une base de séries de Taylor. L'objectif de ce travail est de proposer un nouveau regard sur l'analyse large bande réalisée par la TVRC.

2 Le problème de référence

Considérons un problème d'acoustique en cavité 2D intérieure sur le domaine Ω rempli par un fluide caractérisé par sa vitesse de son c_0 et sa masse volumique ρ_0 , ainsi que l'intervalle de fréquence $I = \left] \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right[$ (ω_0 est la fréquence centrale et $\Delta\omega$ la largeur de la bande de fréquences considérées). Le problème de référence qui doit être résolu est le suivant : trouver $p(\mathbf{x}, \omega)$, $(\mathbf{x}, \omega) \in \Omega \times I$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \times I \\ p = p_d & \text{sur } \partial_p \Omega \times I \\ L_v(p) = v_d & \text{sur } \partial_v \Omega \times I \\ p - ZL_v(p) = h_d & \text{sur } \partial_Z \Omega \times I \end{cases} \quad (1)$$

où $k = (1 - i\eta) \frac{\omega}{c_0}$ est le vecteur d'onde (η est le coefficient d'amortissement), p_d une pression imposée, v_d une vitesse imposée, Z une impédance imposée et h_d une fonction donnée. L'opérateur $L_v(\square)$ est défini par : $L_v(\square) = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \square}{\partial \mathbf{n}} = \frac{i}{\rho_0 \omega} \mathbf{n}^T \nabla(\square)$ (\mathbf{n} est la normale sortante). $\partial_p \Omega$, $\partial_v \Omega$ et $\partial_Z \Omega$ sont les parties de la frontière $\partial \Omega$ de Ω où la pression, la vitesse et les conditions de Robin sont imposées. L'unicité de la solution de ce problème de référence est assurée par la stricte positivité du coefficient d'amortissement η . Si Ω est subdivisé en n_{el} éléments Ω_e qui ne se recouvrent pas, l'équation de continuité des grandeurs physiques doit aussi être vérifiée sur $\Gamma_{e,e'} = \Omega_e \cap \Omega_{e'}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} p_e - p_{e'} = 0 & \text{sur } \Gamma_{e,e'} \times I \\ L_v(p_e) + L_v(p_{e'}) = 0 & \text{sur } \Gamma_{e,e'} \times I \end{cases} \quad (2)$$

3 La formulation TVRC du problème de référence

Définissons l'espace des fonctions qui satisfont l'équation d'équilibre de Helmholtz, soit la première équation de (1), sur Ω_e :

$$S^e = \{ p_e; \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \text{ dans } \Omega_e \times I \} \quad (3)$$

Pour les applications 2D, ces fonctions peuvent être représentées par des ondes propagatives qui se propagent dans toutes les directions possibles (voir [16]) :

$$p_e(\mathbf{x}, \omega) \in S^e \Leftrightarrow p_e(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\theta=0}^{2\pi} X_e(\theta, \omega) e^{i\mathbf{k}_e(\theta, \omega) \cdot \mathbf{x}} d\theta \quad (4)$$

où $\mathbf{k}_e^T = k(\cos \theta, \sin \theta)$. $X_e(\theta, \omega)$ (qui correspond aux amplitudes des ondes qui se propagent dans Ω_e) représente les inconnues du problème. La formulation TVRC du problème (1),(2) peut s'exprimer par (voir [1] et [17] pour l'origine de la formulation) : trouver $(p_1, \dots, p_e, \dots, p_{n_{el}}) \in S^1 \times S^e \times \dots \times S^{n_{el}}$ tel

que :

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \sum_{\Omega_e} \int_{\partial_p \Omega_e} (p_e - p_{d,e}) \overline{L_v[\delta p_e]} ds + \sum_{\Omega_e} \int_{\partial_v \Omega_e} \left(\overline{L_v[p_e] - v_{d,e}} \right) \delta p_e ds \right. \\ & + \sum_{\Omega_e} \frac{1}{2} \int_{\partial_z \Omega_e} \left[\left((1 - Z_e L_v)[p_e] - h_{d,e} \right) \overline{L_v[\delta p_e]} + \left(\overline{L_v - 1/Z_e} [p_e] + h_{d,e}/Z_e \right) \delta p_e \right] ds \\ & \left. + \sum_{\Gamma_{e,e'}} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{e,e'}} \left[(p_e - p_{e'}) \overline{L_v[\delta p_e - \delta p_{e'}]} + \overline{L_v[p_e + p_{e'}]} (\delta p_e + \delta p_{e'}) \right] ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\forall (\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_{n_{el}}) \in S^1 \times S^e \times \dots \times S^{n_{el}}$$

où $p_{d,e}$, $v_{d,e}$ et $h_{d,e}$ sont les données définies dans le paragraphe précédent mais limitées aux frontières de Ω_e , où $\Re\{\square\}$ est la partie réelle de la quantité \square et où $\overline{\square}$ représente la valeur complexe conjuguée de la quantité \square . En conséquence, la seule chose qu'il reste à faire pour définir une approximation TVRC du problème (1),(2) c'est de vérifier (5) dans des sous espaces de dimensions finies $S^{e,h}$ de S^e .

Ce qui a été retenu dans ce travail est l'utilisation d'une série de Fourier limitée aux $2N_e + 1$ premiers termes pour approcher $X_e(\theta, \omega)$ (voir [17]) :

$$X_e(\theta, \omega) = \sum_{n=-N_e}^{N_e} X_e^n(\omega) e^{in\theta} \quad (6)$$

N_e est suffisamment grand pour assurer une bonne approximation (voir [17] : N_e est basé sur l'énergie des fonctions de forme définies dans (7)). En d'autres termes, l'approximation est recherchée dans l'espace généré par les fonctions $\Phi_e^n(\mathbf{x}, \omega)$:

$$p_e(\mathbf{x}, \omega) \simeq \sum_{n=-N_e}^{N_e} X_e^n(\omega) \Phi_e^n(\mathbf{x}, \omega) \quad (7)$$

$$\text{où } \Phi_e^n(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{in\theta} e^{ik_e(\theta, \omega) \cdot \mathbf{x}} d\theta.$$

A une fréquence fixée ω , les fonctions $X_e^n(\omega)$ sont les degrés de liberté (DDL) inconnus issus de l'approximation TVRC du problème (1),(2), et sont reliés aux amplitudes des ondes qui se propagent dans Ω_e . La substitution de (7) dans (5) aboutit au système matriciel suivant :

$$\mathbf{K}(\omega) \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (8)$$

où \mathbf{K} et \mathbf{F} sont respectivement les projections des formes linéaires et bilinéaires de (5) sur l'espace généré par les fonctions Φ_e^n . Appelons dans la suite N la taille de \mathbf{X} .

4 La combinaison de la TVRC et de la PGD pour résoudre des problèmes de vibration sur des bandes de fréquences

Comme cela a été décrit précédemment, l'aspect innovant de ce travail est l'utilisation de la représentation par séparation de variables pour résoudre le problème (8) sur la bande de fréquences $I = \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$. Ainsi, une approximation de $\mathbf{X}(\omega)$ est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{X}(\omega) \simeq \mathbf{X}^M(\omega) = \sum_{m=1}^M \mathbf{X}_m \lambda_m(\omega) \quad (9)$$

où $\mathbf{X}^M(\omega)$ (comme $\mathbf{X}(\omega)$) est un vecteur défini sur $\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{T}$ (\mathcal{T} est l'espace des fonctions qui dépendent de la fréquence et qui sont de carré intégrable sur I), où \mathbf{X}_m sont des vecteurs de \mathbb{C}^N et où $\lambda_m(\omega)$ sont des fonctions de \mathcal{T} . Comme $\mathbf{X}^M(\omega)$ est relié aux directions des ondes qui se propagent dans le milieu, la technique de séparation de variable est réalisée entre la direction de propagation des ondes et la fréquence.

Aucune des fonctions utilisées n'est connue *a priori*. Donc le problème auquel il faut répondre est lié à la recherche de la décomposition (9) optimale et au calcul de ses termes. Plusieurs algorithmes existent dans la littérature pour déterminer \mathbf{X}_m et $\lambda_m(\omega)$ (voir [18, 19] par exemple). Dans notre cas, la matrice $\mathbf{K}(\omega)$ (voir (8)) n'est pas symétrique. Donc, parmi tous les choix possibles d'algorithmes PGD, nous avons naturellement retenu celui qui se base sur l'algorithme de Petrov Galerkin, et qui ne requiert aucune symétrisation artificielle du problème.

Cet algorithme se base sur une formulation variationnelle du problème matriciel (8) qui s'écrit ainsi : trouver $\mathbf{X}(\omega)$ tel que

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}(\omega), \delta\mathbf{X}(\omega)) = \mathcal{F}(\delta\mathbf{X}(\omega)) \quad \forall \delta\mathbf{X}(\omega) \in \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{T} \quad (10)$$

où $\mathcal{K}(\mathbf{X}(\omega), \delta\mathbf{X}(\omega)) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \delta\mathbf{X}(\omega)^T \mathbf{K}(\omega) \mathbf{X}(\omega) d\omega$ et $\mathcal{F}(\delta\mathbf{X}) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \delta\mathbf{X}(\omega)^T \mathbf{F}(\omega) d\omega$. Afin de définir l'algorithme, supposons que \mathbf{X}_m et λ_m sont connus pour $m = 1 \dots M-1$ et que nous recherchons un nouveau couple d'enrichissement $(\mathbf{X}_M, \lambda_M)$. L'algorithme de Petrov Galerkin consiste à calculer ce couple en utilisant les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}^{M-1} + \mathbf{X}_M \lambda_M(\omega), \mathbf{Y}\gamma(\omega)) = \mathcal{F}(\mathbf{Y}\gamma(\omega)) \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^N \quad (11)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}^{M-1} + \mathbf{X}_M \lambda_M(\omega), \mathbf{Y}\gamma(\omega)) = \mathcal{F}(\mathbf{Y}\gamma(\omega)) \quad \forall \gamma \in \mathcal{T} \quad (12)$$

$\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^N$ et $\gamma(\omega) \in \mathcal{T}$ représentent un autre couple de vecteur constant et de fonction dépendante de la fréquence. D'autres équations doivent être ajoutées à (11) et (12) pour déterminer le couple (\mathbf{Y}, γ) . Nous avons utilisé la relation :

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}'\lambda_M(\omega), \mathbf{Y}\gamma(\omega)) = \langle\langle \mathbf{X}'\lambda_M(\omega), \mathbf{X}_M \lambda_M(\omega) \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{X}' \in \mathbb{C}^N \quad (13)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_M \lambda', \mathbf{Y}\gamma(\omega)) = \langle\langle \mathbf{X}_M \lambda'(\omega), \mathbf{X}_M \lambda_M(\omega) \rangle\rangle \quad \forall \lambda'(\omega) \in \mathcal{T} \quad (14)$$

$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ et le produit défini par $\langle\langle \mathbf{X}\lambda(\omega), \mathbf{Y}\gamma(\omega) \rangle\rangle = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \gamma(\omega) \mathbf{Y}^T \mathbf{H}(\omega) \mathbf{X}\lambda(\omega) d\omega$, avec $\mathbf{H}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{h}(\omega)$, où $\tilde{\mathbf{H}}$ est une matrice constant égale à la moyenne de la matrice $\mathbf{K}(\omega)$ sur la bande de fréquences, et $\tilde{h}(\omega)$ une fonction dépendant de la fréquence qui correspond à la moyenne des coefficients de la diagonale de $\mathbf{K}(\omega)$. Avec ce choix particulier, qui est en relation avec la physique du problème, la propriété de séparation des variables suivante reste valable :

$$\langle\langle \mathbf{X}\lambda(\omega), \mathbf{Y}\gamma(\omega) \rangle\rangle = (\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{Y}) \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \lambda(\omega) \tilde{h}(\omega) \gamma(\omega) d\omega \quad (15)$$

Cette propriété est utile pour la démonstration de la convergence de l'algorithme (voir [19]).

En résumé, l'algorithme consiste à définir simultanément $(\mathbf{X}_M, \lambda_M)$ et (\mathbf{Y}, γ) qui vérifient (11), (12), (13) et (14). Pour cela, nous avons utilisé une technique des puissances itérées, ce qui veut dire que ces équations ont été résolues jusqu'à convergence, donc jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteint (voir [19]). Nous avons par ailleurs utilisé le critère suivant pour tester la convergence des itérations (1), (2), ... (q) de cette technique :

$$\int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \overline{\left(\mathbf{X}_M^{(q)} \lambda_M^{(q)}(\omega) - \mathbf{X}_M^{(q-1)} \lambda_M^{(q-1)}(\omega) \right)^T} \left(\mathbf{X}_M^{(q)} \lambda_M^{(q)}(\omega) - \mathbf{X}_M^{(q-1)} \lambda_M^{(q-1)}(\omega) \right) d\omega < \delta_q \quad (16)$$

où $(\mathbf{X}_M^{(q)}, \lambda_M^{(q)})$ (resp. $(\mathbf{X}_M^{(q-1)}, \lambda_M^{(q-1)})$) est le couple $(\mathbf{X}_M, \lambda_M)$ calculé à l'itération d'indice (q) (resp. (q-1)) et δ_q la précision souhaitée.

Dès que $(\mathbf{X}_M, \lambda_M)$ a convergé, la procédure est répétée jusqu'à ce que l'enrichissement global $\mathbf{X}(\omega) \simeq \mathbf{X}^M(\omega) = \sum_{m=1}^M \mathbf{X}_m \lambda_m(\omega)$ converge. L'erreur commise peut être dans ce cas évaluée par $\varepsilon_M(\mathbf{X}^M)$ défini par :

$$\varepsilon_M(\mathbf{X}^M) = \frac{\int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \overline{(\mathbf{K}(\omega) \mathbf{X}^M(\omega) - \mathbf{F}(\omega))^T} (\mathbf{K}(\omega) \mathbf{X}^M(\omega) - \mathbf{F}(\omega)) d\omega}{\int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \overline{\mathbf{F}(\omega)^T} \mathbf{F}(\omega) d\omega} \quad (17)$$

Les valeurs initiales de cet algorithme sont

$$\lambda_M^{(0)}(\omega) = \gamma_M^{(0)}(\omega) = \sqrt{(\mathbf{K}(\omega)\mathbf{X}^{M-1}(\omega) - \mathbf{F}(\omega))^T (\mathbf{K}(\omega)\mathbf{X}^{M-1}(\omega) - \mathbf{F}(\omega))} \quad (18)$$

Elles font un lien entre les données et la physique du problème.

5 Exemple numérique

Considérons la cavité acoustique représentée sur la figure 1. Elle est remplie d'air ($\rho_0 = 1.25 \text{ kg/m}^3$, $c_0 = 340 \text{ m/s}$, $\eta = 0.0005$) et est soumise à des conditions limites en pression imposée ($p_d = 1 \text{ Pa}$) et en vitesse imposée ($v_d = 0 \text{ m/s}$). La fréquence centrale retenue est $\omega_0 = 2\pi.1200 \text{ Hz}$ et la largeur de bande est $\Delta\omega_3 = 2\pi.400 \text{ Hz}$.

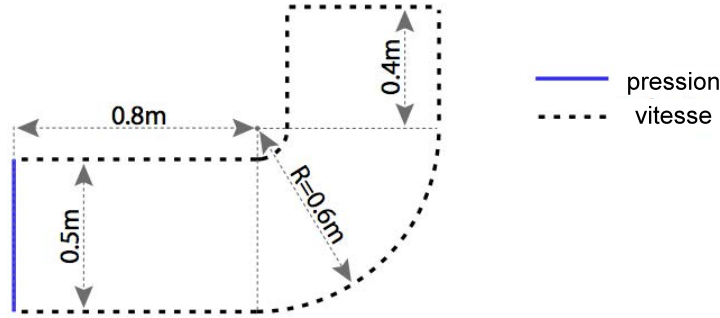


Fig. 1 – Cavité acoustique en forme de L.

Le problème a été résolu par la TVRC, en subdivisant le domaine Ω en 3 sous domaine. $N_e = 70$ a été retenu pour l'approximation TVRC dans chaque sous domaine, afin d'avoir une solution entachée de très peu d'erreur. La solution de référence a été calculée en faisant un calcul TVRC à toutes les fréquences. La figure 2 (a) montre l'évolution de l'erreur $\varepsilon_M(\mathbf{X}^M)$ (17) en fonction du nombre de paires de la décomposition PGD, et en fonction de différentes valeurs de δ_q (voir (16)). On peut constater que la stratégie proposée pour coupler la PGD et la TVRC converge. On peut aussi constater qu'il n'est pas forcément nécessaire d'imposer un critère de convergence très sévère pour le processus itératif de la méthode des puissances itérées, car l'erreur commise est quasiment la même pour les différentes valeurs d'erreur retenues. Cela est d'ailleurs parfaitement confirmé sur la figure 2 (b) sur laquelle l'erreur a été tracée en imposant q_{\max} itérations dans le processus des puissances itérées. On voit que ce processus converge très rapidement.

La figure 3 montre une comparaison entre les différentes fonctions de réponse en fréquence obtenues en utilisant différentes valeurs de l'ordre d'approximation de M sur une fonction de réponse en fréquence en énergie. La solution de référence a été calculée par la TVRC fréquence par fréquence. La solution

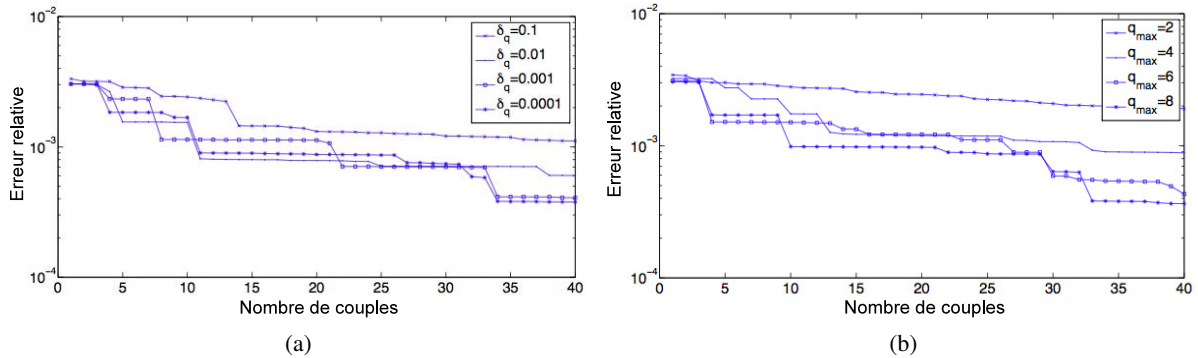


Fig. 2 – (a) Représentation de l'erreur $\varepsilon_M(\mathbf{X}^M)$ (17) pour différentes valeurs de δ_q (16) (b) Représentation de l'erreur $\varepsilon_M(\mathbf{X}^M)$ obtenue avec q_{\max} itérations dans le processus des puissances itérées.

PGD a été obtenue en stoppant le processus itératif à $q_{\max} = 8$, ce qui semble suffisant compte tenu des remarques faites dans le paragraphe précédent. On peut observer sur ce résultat que la stratégie proposée est capable de retrouver parfaitement le comportement acoustique de la cavité, sur toute la bande de fréquences considérée. Bien sûr, la qualité de la solution est faible si M est petit, mais rapidement la qualité de l'approximation devient très bonne (15 couples de fonctions sont suffisant pour avoir une bonne approximation).

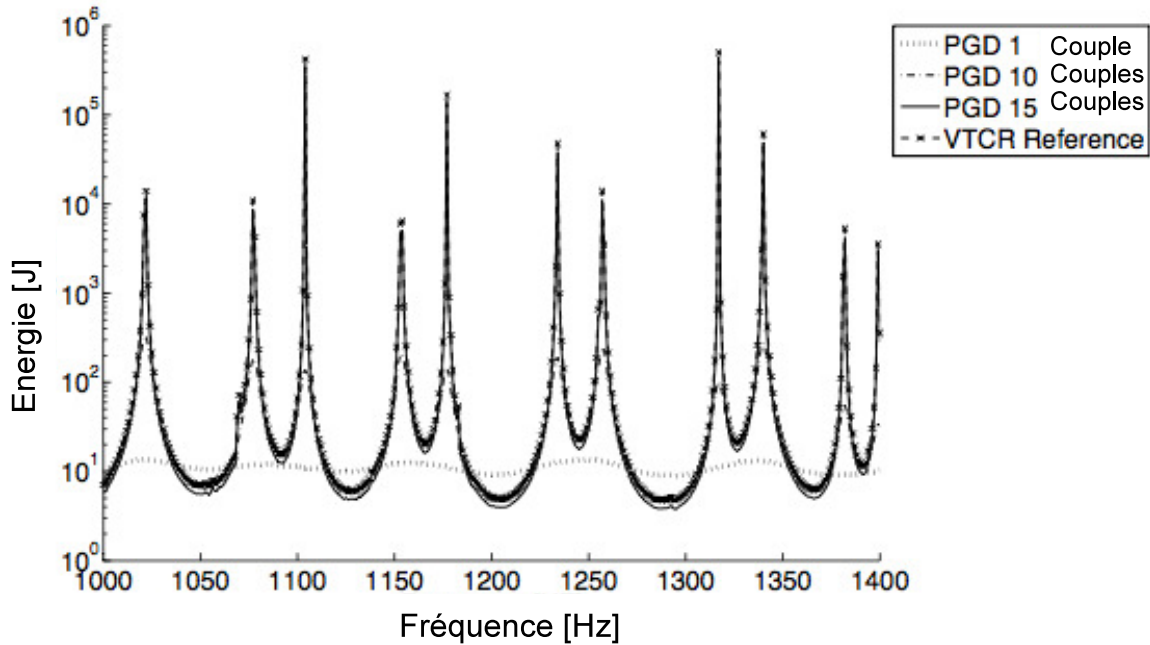


Fig. 3 – Energie de la solution calculée sur tout le domaine Ω , en fonction du nombre M de couples retenus pour l'approximation PGD.

La figure 4 montre une comparaison entre la pression obtenue par l'approche proposée et la solution de référence aux pulsations $\omega = \omega_0 - \frac{\Delta\omega_3}{2}$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega_3}{2}$. Toutes les solutions sont très proches les unes des autres, ce qui illustre le fait que l'approche proposée est fonctionnelle.

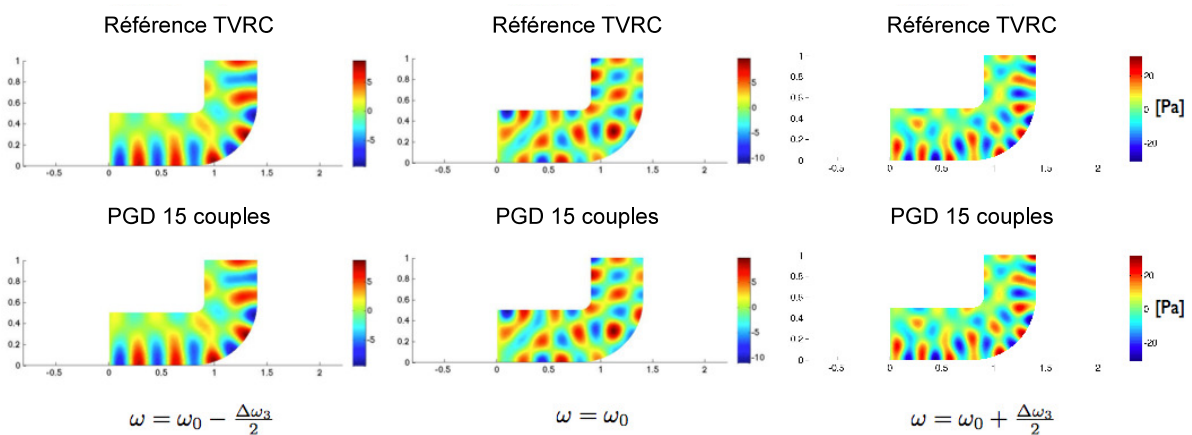


Fig. 4 – Comparaison de la répartition de pression obtenue entre la solution de référence et l'approximation issue de l'approche PGD-TVRC proposée pour $\omega = \omega_0 - \frac{\Delta\omega_3}{2}$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega_3}{2}$.

6 Conclusions

Nous avons proposé une nouvelle version de la TVRC pour résoudre les problèmes de vibration sur des bandes de fréquences. Elle est basée sur une utilisation particulière de la PGD. Elle aboutit à la recherche d'une approximation du problème sur un espace de vecteurs constants et de fonctions dépendantes de la fréquence. Cette approximation est obtenue par une méthode des puissances itérées. Un exemple numérique a permis de montrer la validité de l'approche et les bonnes propriétés de convergences de l'algorithme. Après ces résultats encourageants, la méthode va être étendue à des exemples plus complexes, et à l'utilisation d'algorithmes plus performants. Ces deux points représentent les perspectives de développement de ce travail.

Références

- [1] P. Ladevèze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, 332(2b) :849–856, 1996.
- [2] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics—new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer, Berlin, 1999.
- [3] T. Strouboulis and R. Hidajat. Partition of unity method for helmholtz equation : q-convergence for plane-wave and wave-band local bases. *Applications of Mathematics*, 51 :181–204, 2006.
- [4] O. Cessenat and B. Despres. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35 :255–299, 1998.
- [5] P. Monk and D.Q. Wang. A least-squares method for the helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 :121–136, 1999.
- [6] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6455–6479, 2001.
- [7] P. Bouillard and S. Suleau. Element-free galerkin solutions for helmholtz problems : formulation and numerical assessment of the pollution effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162 :317–335, 1998.
- [8] E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, and P. Bettess. Wave boundary elements : a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28 :131–141, 2004.
- [9] W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas, and D. Vandepitte. A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33 :527–540, 2002.
- [10] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch, and C. Blanzé. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, (18) :193–214, 2001.
- [11] P. Ladevèze, L. Blanc, P. Rouch, and C. Blanzé. A multiscale computational method for medium-frequency vibrations of assemblies of heterogeneous plates. *Computers and Structures*, 81 :1267–1276, 2003.
- [12] H. Riou, P. Ladevèze, and P. Rouch. Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1-2) :341–360, 2004.
- [13] H. Riou, P. Ladevèze, and B. Sourcis. The multiscale vter approach applied to acoustics problems. *Journal of Computational Acoustics*, 16(4) :487–505, 2008.
- [14] P. Ladevèze, P. Rouch, H. Riou, and X. Bohineust. Analysis of medium-frequency vibrations in a frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, (11) :255–284, 2003.
- [15] P. Ladevèze and H. Riou. Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :3167 – 3191, 2005.
- [16] R.L. Ochs. A version of runge's theorem for the helmoltz equation with applications to scattering theory. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (32) :107–119, 1989.
- [17] L. Kovalevsky, P. Ladevèze, and H. Riou. The fourier version of the variational theory of complex rays for medium-frequency acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225–228(0) :142–153, 6 2012.
- [18] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521 – 4537, 2007.
- [19] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1603 – 1626, 2010.