HAL open science

Couplage de polynômes de haut degré dans une nouvelle méthode sans maillage

Yendoubouam Tampango, Michel Potier-Ferry, Yao Koutsawa

To cite this version:

Yendoubouam Tampango, Michel Potier-Ferry, Yao Koutsawa. Couplage de polynômes de haut degré dans une nouvelle méthode sans maillage. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722048

HAL Id: hal-01722048

https://hal.science/hal-01722048v1

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

CSMA 2013
11e Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2013

Couplage de polynômes de haut degré dans une nouvelle méthode sans maillage

Yendoubouam TAMPANGO [1], Michel POTIER-FERRY [1], Yao KOUTSAWA [2]

[1] LEM3, Université de Lorraine, France,tampangom@yahoo.fr, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr
[2] CRP Henri Tudor, Luxembourg, yao.koutsawa@tudor.lu

Résumé — Nous proposons une technique de raccord de polynômes de haut degré. Cette technique permet de faire une résolution par morceaux dans une méthode sans maillage proposée récemment. Dans cette méthode, l'EDP est résolue sous sa forme forte dans le domaine en faisant une approximation en série de Taylor. Sur les frontières, les conditions aux limites sont appliquées en utilisant la méthode des moindres carrés. La technique de raccord proposée ici est basée sur la théorie des multiplicateurs de Lagrange.
Mots clés — Méthode sans maillage, série de Taylor, technique de raccord, décomposition de domaine.

1 Introduction

Nous nous intéressons à une nouvelle méthode sans maillage de type "boundary only" proposée récemment [1]. L'idée de base de cette méthode est de construire des fonctions de forme polynomiales en résolvant l'Equation aux Dérivées Partielles (EDP) sous sa forme forte par la technique des séries de Taylor. Plus précisément, la solution est cherchée sous la forme d'un polynôme de haut degré et le nombre de ses coefficients est réduit en annulant les coefficients de Taylor du résidu de l'EDP en un point donné. Par exemple, dans le cas d'une EDP elliptique dans un domaine $2D$, après résolution de l'EDP, le nombre de coefficients passe de 231 à 41 pour un degré $p = 20$. Ensuite les conditions aux limites sont appliquées par la méthode des moindres carrés pour déterminer les coefficients restants. Cette méthode que nous appellerons la "Taylor Meshless Method" (TMM), a plusieurs avantages. D'abord, la solution approchée converge exponentiellement en fonction du degré (p-convergence), ce qui conduit à des résultats très précis. Ensuite, du fait que l'EDP est résolue de manière quasi-exacte dans le domaine, seule la discrétisation de la frontière est nécessaire, ce qui fait de la TMM une vraie méthode "Boundary Only". Enfin, l'utilisation de la forme forte de l'EDP évite l'intégration numérique et donc génère un coût de calcul relativement faible.

Bien que cette méthode soit très précise, les séries de Taylor peuvent diverger et il n'est pas toujours possible d'approcher la solution d'une EDP par une seule série de Taylor. Dans ces cas, une approche par morceaux s'impose. Le domaine est subdivisé en plusieurs sous domaines et une application de la TMM est faite sur chacune des sous domaines. Cependant il faudra mettre en place des techniques numériques pour assurer le raccord des séries aux interfaces entre les sous domaines, tout en gardant la propriété de convergence exponentielle en fonction du degré : c'est le but de cette présentation.

2 La Taylor Meshless Method

L'idée principale de la TMM est de résoudre un problème d'EDP par une approximation polynomiale de haut degré. Elle propose de construire l'approximation de Taylor de l'inconnue.

La TMM est complètement établie en deux étapes. La première consiste en la résolution de l'EDP sous sa forme forte en faisant une approximation en série de Taylor tronquée à un ordre

p et développée en un point $c = [c_x, c_y]$ du domaine :

$$u^p(x,y) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{i=0}^{n} u_{n-i,i}(x-c_x)^{n-i}(y-c_y)^i \tag{1}$$

Cette étape permet de réduire le nombre d'inconnues qui ne sont rien d'autre que les coefficients du polynôme approché. Pour illustrer cette étape, considérons le problème du Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = u^d & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Faisons une approximation d'ordre $p = 3$ avec un point de développement en $c = [0,0]$. La solution approchée s'écrit en fonction de 10 coefficients inconnus comme suit :

$$u^p(x,y) = u_{00} + u_{10}x + u_{01}y + u_{20}x^2 + u_{11}xy + u_{02}y^2 + u_{30}x^3 + u_{21}x^2y + u_{12}xy^2 + u_{03}y^3 \tag{3}$$

Ainsi le résidu de l'opérateur Laplacien s'écrit donc :

$$R(x,y) = 2(u_{20} + u_{02}) + 2(3u_{30} + u_{12})x + 2(u_{21} + 3u_{03})y \tag{4}$$

Résoudre l'EDP (2) sous sa forme forte par la forme approchée (3) revient à annuler les coefficients du résidu de l'opérateur Laplacien. Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} u_{20} + u_{02} = 0 \\ 3u_{30} + u_{12} = 0 \\ u_{21} + 3u_{03} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Ces trois équations permettent de déduire trois des coefficients inconnus en fonction des autres. La solution approchée peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$u^p(x,y) = u_{00} + u_{10}x + u_{01}y + u_{20}(x^2 - y^2) + u_{11}xy + u_{30}(x^3 - 3xy^2) + u_{21}(x^2y - \frac{1}{3}y^3) \tag{6}$$

Le nombre de coefficients inconnus est donc passé à 7. Cette méthodologie peut s'étendre facilement à une approximation d'ordre p quelconque et à toute sorte d'EDP. Pour un degré p quelconque, après résolution de l'EDP sous sa forme forte, le nombre de coefficients inconnus passe de $(p+1)(p+2)/2$ à $2p+1$.

La deuxième étape de la TMM consiste en l'application des conditions aux limites. Elle permet de déterminer les coefficients inconnus restants ($\{v\} = \{u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{20}, u_{11}, u_{30}, u_{21}\}$ dans le cas de l'approximation (6)) et ainsi donc assurer l'unicité de l'approximation faite. Pour éviter l'intégration numérique, la méthode utilisée pour l'application des conditions aux limites est la méthode des moindres carrés (voir [4]). Cette technique a été introduite par Zhang et al [3]. On choisit un ensemble de M points de collocation sur la frontière du domaine et l'erreur entre les valeurs approchées et les valeurs données de u est minimisée en moyenne en ces points. Ceci revient donc à minimiser la fonction :

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} |u^p(\underline{x}_j) - u^d(\underline{x}_j)|^2. \tag{7}$$

Cette minimisation conduit à un système linéaire $K\{v\} = F$ où K est une matrice inversible. La résolution de ce système donne le vecteur v et donc la solution du problème à résoudre.

3 Vers une résolution multizone

3.1 Pourquoi une résolution multizone ?

Les premières applications de la TMM ont montré une très bonne convergence avec une convergence exponentielle en fonction du degré (voir [2, 4, 5]). Cependant les séries de Taylor

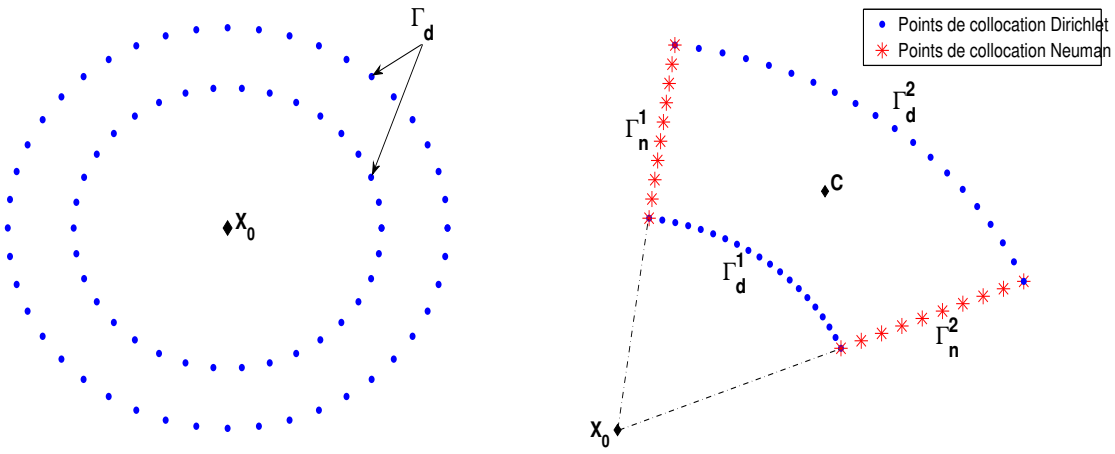

Fig. 1 – *Discrétisation de la couronne et d'un secteur pour le problème de Poisson* (8).

peuvent diverger dans certains cas. Ici nous présentons une application où il est impossible d'approcher la solution par une seule série de Taylor. Considérons le problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\dfrac{4}{(x^2+y^2)^2} & dans \quad \Omega \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & sur \quad \Gamma_d \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) = g(\underline{x}) & sur \quad \Gamma_n \end{cases} \tag{8}$$

Nous allons résoudre ce problème sur une couronne ($\Omega = \{(x,y)/r_1^2 \leq x^2+y^2 \leq r_2^2\}$, avec $r_1 = 0.8$ et $r_2 = 1$) et ensuite sur un secteur de la couronne. La discrétisation pour l'application des conditions aux limites se fait comme sur la figure 1. Les conditions aux limites de ce problème sont choisies de telle manière que la solution analytique est :

$$u(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \tag{9}$$

Cette solution analytique présente une singularité au point $X_0 = [0,0]$. La singularité est située dans l'enveloppe convexe de la couronne.

Dans le tableau 1, on présente le logarithme de l'erreur relative maximale pour les différents domaines d'étude. On remarque que la TMM diverge sur toute la couronne et ceci quel que soit le degré d'approximation choisi. Plusieurs points de développement ont été utilisés pour l'approximation de la TMM, mais aucune d'elle n'a donné un résultat convergent. Ces résultats ne sont pas très étonnants. En effet les séries ont un domaine de convergence au delà duquel elles divergent. Supposons que comme pour les fonctions analytiques, ce domaine est un disque centré au point de développement et limité par la première singularité. On remarque qu'il n'est pas possible de couvrir la couronne entière par un seul disque ne contenant pas le point de singularité $X_0 = [0,0]$ (voir fig 2).

On résout ensuite ce problème sur une partie de la couronne, avec des conditions aux limites de Dirichlet sur les arcs extérieurs et des conditions de Neuman sur les rayons extérieurs. Le point de développement est choisi au centre du domaine (fig 1). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1. On remarque la TMM converge à partir d'un quart de couronne. D'autre part cette convergence est améliorée en réduisant le secteur.

En résumé nous venons de résoudre un problème où la TMM diverge dans le domaine entier (couronne) mais converge sur une partie du domaine. La première idée qui découle de cette remarque serait de faire converger la TMM dans le domaine entier en faisant une résolution par morceaux. Cependant une question se pose : comment assurer la continuité entre les solutions approchées construites sur chaque secteur ?

Tableau 1 – *Erreur maximale pour le problème de Poisson* (8) *sur différents domaines (couronne entière ou partie de couronne).*

Domaine Ω	log(erreur maximale) $p = 10$	log(erreur maximale) $p = 20$
Couronne	3.8028	6.6711
1/2 Couronne	0.8691	2.3435
1/4 Couronne	-2.1389	-3.0064
1/6 Couronne	-3.6026	-6.5307
1/8 Couronne	-4.6345	-9.3923

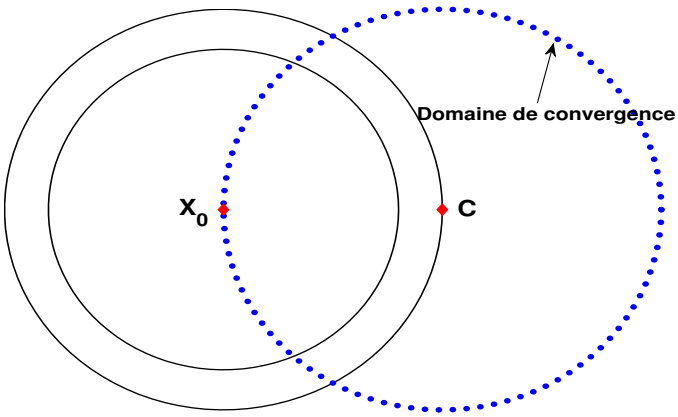

Fig. 2 – *Domaine de convergence pour la série calculée par la TMM pour un point de développement en* $[1, 0]$.

3.2 Formulation du problème par morceaux

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

où L est un opérateur différentiel du second ordre. Afin de faire une résolution par morceaux, introduisons une interface Γ^r en divisant le domaine Ω en deux sous domaines Ω^1 et Ω^2. Par simplicité, nous ne considérons que des conditions aux limites de type Dirichlet, cependant des conditions aux limites mixtes ont été considérées dans de précédentes publications [2, 6]. Un schéma du problème couplé est montré sur la fig 3. Les techniques de couplage proposées ici peuvent facilement s'étendre à un nombre quelconque de sous domaines.

Résoudre le problème (10) revient donc à résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{cases} Lu^1 = f & dans \quad \Omega^1 \\ u^1(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & sur \quad \Gamma^1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} Lu^2 = f & dans \quad \Omega^2 \\ u^2(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & sur \quad \Gamma^2 \end{cases} \tag{11}$$

avec les conditions de transmissions suivantes à l'interface :

$$u^1(\underline{x}) = u^2(\underline{x}) \quad et \quad \frac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}) = \frac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}) \quad sur \quad \Gamma^r \tag{12}$$

où $\Gamma^1 = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega$, $\Gamma^2 = \partial\Omega^2 \cap \partial\Omega$ et $\Gamma^r = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$.

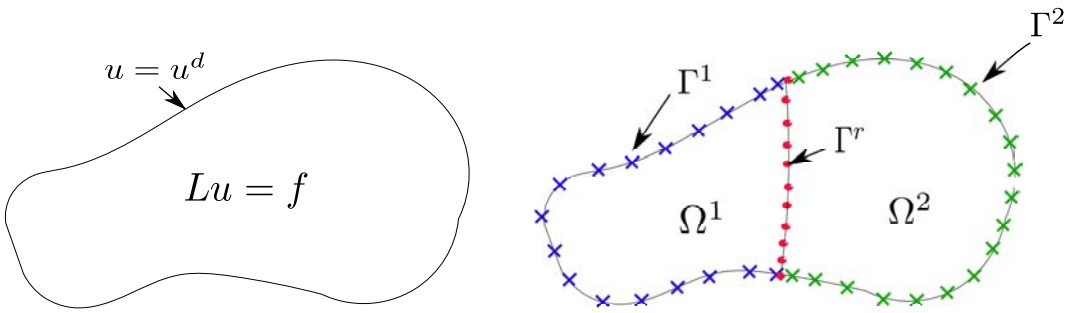

Fig. 3 – *Réprésentation du domaine continu de l'EDP et de la discrétisation du bord pour la résolution en deux zones. Le domaine est divisé en deux sous domaines Ω^1 et Ω^2. La discrétisation introduit deux types de points : des points de collocations sur les bords Γ^1, Γ^2 sur lesquels on applique les conditions aux limites et des points de collocations sur l'interface Γ^r où on applique les conditions de transmission.*

Dans la formulation initiale de la TMM, l'annulation des coefficients de Taylor du résidu de l'équation (11) conduit à deux familles de fonctions de formes $P_k^1(\underline{x})$ et $P_k^2(\underline{x})$ telles que :

$$u^1(\underline{x}) = P_0^1 + \sum_k P_k^1(\underline{x}) v_k^{(1)} \quad et \quad u^2(\underline{x}) = P_0^2 + \sum_k P_k^2(\underline{x}) v_k^{(2)} \tag{13}$$

Les variables $\{v^{(1)}\}$ et $\{v^{(2)}\}$ seront déterminées en appliquant les conditions aux limites et les conditions de transmission à l'interface. Ainsi la discrétisation du domaine génère deux types de noeuds (voir fig 3) :

- des noeuds sur les frontières extérieures Γ^1 et Γ^2 où seront appliquées les conditions aux limites.
- des noeuds sur l'interface Γ^r où les conditions de transmission seront appliquées en utilisant une technique de couplage.

4 Couplage par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

4.1 Principe

L'idée de cette technique est de considérer les conditions de transmission comme une contrainte d'un problème d'optimisation. Le problème d'optimisation est dans le cas de la TMM l'application des conditions aux limites qui consiste à minimiser la fonction ($L = J_1 + J_2$). Les conditions aux limites sont appliquées en utilisant la méthode des moindres carrés comme présenté dans la première section. Pour cela un ensemble de points de collocation est choisi sur chaque frontière :

- M_1 points de collocation sur la frontière Γ^1.
- M_2 points de collocation sur la frontière Γ^2.

Ainsi les fonctions à minimiser pour les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} J_1(v^{(1)}) &= \frac{1}{2}\sum_{j_1=1}^{M_1}\left|P_0^1(\underline{x}_{j_1}) + \sum_{i=1}^{2p_1+1} P_i^1(\underline{x}_{j_1})v_i^1 - u^d(\underline{x}_{j_1})\right|^2 \\ J_2(v^{(2)}) &= \frac{1}{2}\sum_{j_2=1}^{M_2}\left|P_0^2(\underline{x}_{j_2}) + \sum_{i=1}^{2p_2+1} P_i^2(\underline{x}_{j_2})v_i^2 - u^d(\underline{x}_{j_2})\right|^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Pour résoudre le problème couplé, on choisi M_r points de collocation sur Γ^r pour l'application des conditions de transmission. Le problème d'optimisation correspondant au problème couplé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser} \quad L(v^{(1)}, v^{(2)}) = J_1(v^{(1)}) + J_2(v^{(2)}) \\ &\text{avec les contraintes} \begin{cases} \psi_j^1(v^{(1)}, v^{(2)}) = u^1(\underline{x}_j) - u^2(\underline{x}_j) = 0 \\ \psi_j^2(v^{(1)}, v^{(2)}) = \dfrac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}_j) - \dfrac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}_j) = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x}_j \in \Gamma^r \end{aligned} \tag{15}$$

Selon la "*méthode des multiplicateurs de Lagrange*", $(v^{(1)}, v^{(2)})$ est solution du problème (15) si et seulement s'il existe un couple de vecteurs (λ^1, λ^2) tel que le 4-uplet $(v^1, v^2, \lambda^1, \lambda^2)$ rend stationnaire la fonction :

$$J(v^{(1)}, v^{(2)}, \lambda^1, \lambda^2) = J_1(v^{(1)}) + J_2(v^{(2)}) + c(v^{(1)}, v^{(2)}, \lambda^1, \lambda^2) \tag{16}$$

où c est la fonction de raccord définie par :

$$c(v^{(1)}, v^{(2)}, \lambda^1, \lambda^2) = \sum_{j=1}^{M_r}[\lambda_j^1 \psi_j^1(v^{(1)}, v^{(2)}) + \lambda_j^2 \psi_j^2(v^{(1)}, v^{(2)})] \tag{17}$$

En posant $\Lambda =< \lambda_1, \lambda_2 >$, les points stationnaires de la fonction J sont solutions d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & K_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

4.2 Application au problème de Poisson dans une couronne

Pour illustrer l'intérêt de la résolution par morceaux, nous nous intéressons au problème de Poisson sur une couronne ($0.8 \leq r \leq 1$) (8) en utilisant la TMM couplée avec la technique des multiplicateurs de Lagrange. Pour faire converger le problème, on subdivise la couronne en plusieurs secteurs (fig 4) et une résolution de l'équation de Poisson est faite sur chaque secteur. Dans chaque zone, le point de développement de chaque série de Taylor a été choisi au milieu de l'arc extérieur.

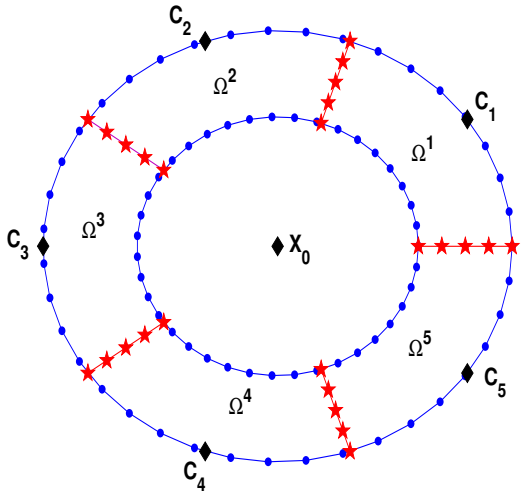

Fig. 4 – *Discrétisation de la couronne pour une résolution par morceaux.*

La figure 5 présente le logarithme de l'erreur maximale pour différents nombres de zones. Sur chaque interface, nous avons choisi $p/2$ points de collocation. Ce qui correspond à p multiplicateurs de Lagrange et donc p équations de raccord. Les résultats montrent qu'on arrive à faire converger le problème en subdivisant le domaine en plusieurs sous domaines. On a une erreur de l'ordre de 10^{-2} pour 4 zones et cette erreur passe à 10^{-7} pour 10 zones. Ces résultats viennent confirmer que la vitesse de convergence dépend de la taille des sous-domaines et aussi de la distance séparant le point de développement et la première singularité. En effet en subdivisant le domaine, on construit plusieurs séries de Taylor dont chaque domaine de convergence couvres entièrement le sous domaine sur lequel il est construit.

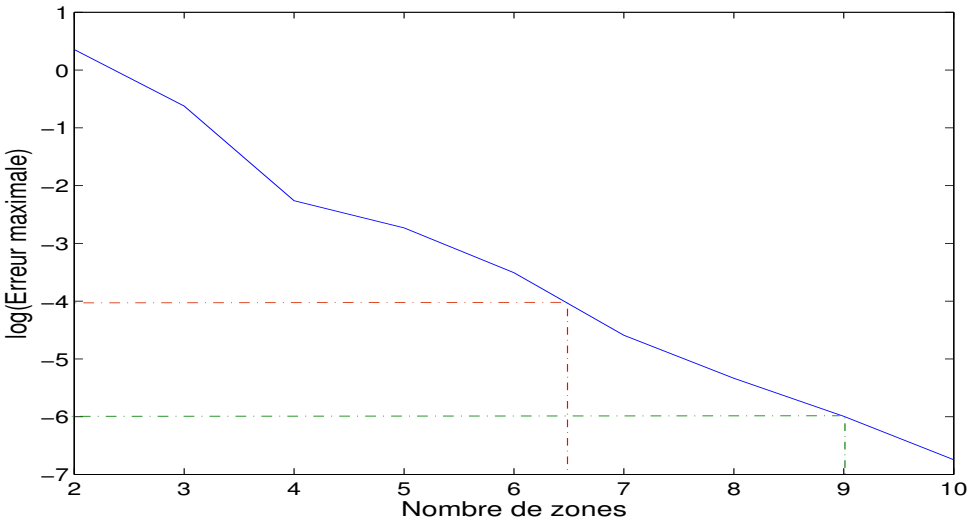

Fig. 5 – *Problème de Poisson* (8). *Influence du nombre de zones sur la convergence* $p = 10$.

Pour étudier la stabilité du couplage par rapport au degré, nous avons fixé le nombre de zones à 6 et nous avons fait varier le degré d'approximation. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6. On remarque que la solution s'améliore avec le degré avant d'être stabilisée avec un très haut niveau de précision au degré 20.

On vient donc d'établir une méthode de raccord entre séries de Taylor de degré élevé, qui conserve la propriété de convergence exponentielle. Le dernier exemple montre que cette décomposition en sous domaines a permis de faire converger un problème où la TMM divergeait. Cette technique de raccord est donc un résultat fondamental pour le développement de la TMM.

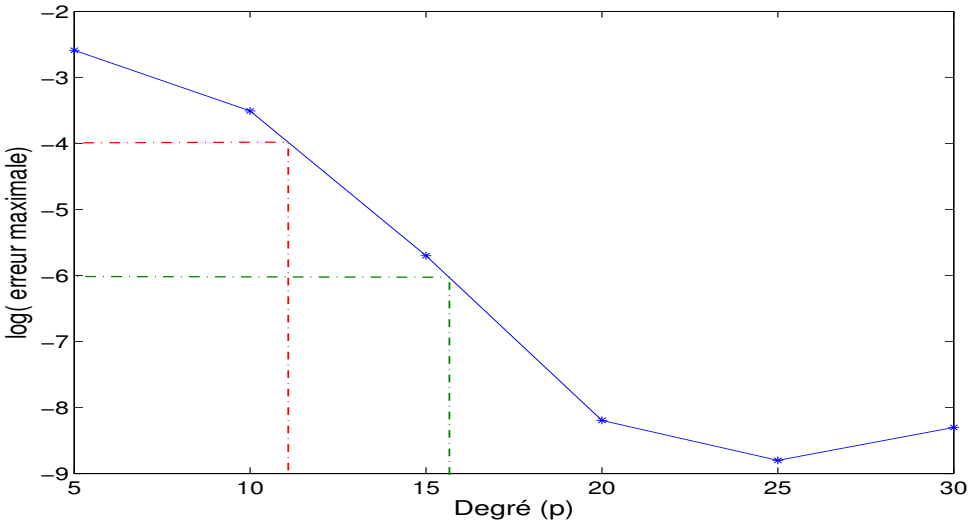

Fig. 6 – *Problème de Poisson* (8). *P convergence pour 6 zones*

5 Conclusion

Nous avons présenté une technique de couplage de polynômes de haut degré, dans le cadre d'une nouvelle méthode sans maillage où les fonctions de forme sont déduites de l'EDP en faisant une approximation en série de Taylor. La technique présentée est basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La technique proposée a été appliquée au problème de Poisson sur une couronne. Ce problème a convergé en multizone alors qu'il diverge en monozone. Cette divergence s'explique par la position de la singularité qui empêche de trouver un point de développement tel que tout le domaine soit visible à partir de celui là. La résolution par morceaux a confirmé la théorie sur les domaines de convergence des séries de Taylor. En effet le rayon de convergence est lié à la première singularité. En tous cas, il est remarquable que la méthode proposée permet de retrouver la convergence exponentielle qu'on avait obtenue avec une seule zone dans certains cas ; cela montre que ces méthodes de raccord ne dégradent pas les excellentes propriétés de convergence de la TMM. On peut maintenant étendre cette convergence exponentielle, dans les cas où une seule série de Taylor ne suffit pas.

Références

[1] D. S. Zézé. *Calcul de fonctions de formes de haut degré par une technique de perturbation.* Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine Metz, 2009.

[2] Y. Tampango. *Développement d'une nouvelle méthode sans maillage utilisant les approximations de Taylor.* Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2012.

[3] Zhang X, Liu XH, Song KZ, Lu MW. *Least squares collocation meshless method.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51 : 1089-1100, 2001.

[4] Zézé D.S., Potier Ferry M, Damil N. *A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE.* Engineering Analysis with Boundary Element,747-754, 2010.

[5] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, S. Belouettar.*Convergence analysis and detection of singularities within a boundary meshless method based on Taylor series.* Engineering Analysis with Boundary Elements, 36 : 1465-1472, 2012.

[6] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, S. Belouettar.*A new meshless method using Taylor series to solve elasticity problems.* European Journal of Computational Mechanics, 21 : 365-373, 2012.