



HAL
open science

Un modèle d'endommagement ductile avec troisième invariant des contraintes pour matériaux plastiques poreux

Frédéric Bohr, Larbi Siad

► **To cite this version:**

Frédéric Bohr, Larbi Siad. Un modèle d'endommagement ductile avec troisième invariant des contraintes pour matériaux plastiques poreux. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722047

HAL Id: hal-01722047

<https://hal.science/hal-01722047v1>

Submitted on 2 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Un modèle d'endommagement ductile avec troisième invariant des contraintes pour matériaux plastiques poreux

Frédéric Bohr¹, Larbi Siad^{2*}

¹ LISM, Université de Reims, France, frederic.bohr@univ-reims.fr

² BIOS, Université de Reims, France, larbi.siad@univ-reims.fr

* Auteur correspondant

Résumé — Un modèle d'endommagement ductile pour matériaux plastiques poreux dont le pré-existant potentiel plastique dépend explicitement du troisième invariant des contraintes est utilisé dans cette étude pour simuler numériquement le comportement à la rupture d'éprouvettes axisymétriques lisses et entaillées ainsi qu'une couche homogène de dimensions finies soumise à un cisaillement simple. Les résultats fournis par le modèle de comportement proposé et celui bien connu de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) se distinguent en phase finale de rupture.

Mots clés — Endommagement ductile, microstructure, troisième invariant, faible triaxialité.

1 Introduction

En rupture ductile des matériaux par nucléation, croissance et coalescence de microcavités, le modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) ne peut prédire de croissance du volume des microcavités sous faible triaxialité. Cependant, l'observation fine d'éprouvettes en acier à très haute résistance rompues lors d'essais d'impact menés par Cowie *et al.* [7] ont mis en évidence une croissance du volume des microcavités sous une sollicitation de cisaillement pur. En outre, des calculs de cellules cubiques hétérogènes truffées de *minuscules* inclusions réparties aléatoirement [11], et des cellules rectangulaires avec des microcavités sphéroïdales en leur centres [14], et soumises à des contraintes de cisaillement ont confirmé ce constat. Dans le but de se conformer à cette observation expérimentale et d'améliorer le modèle GTN, des extensions basées sur des considérations phénoménologiques ont été récemment proposées, par exemple, par Nahshon et Hutchinson [12] et par Xue [20]. Formellement, selon leurs auteurs, ces extensions sont à rattacher à la prise en compte dans le modèle de comportement du troisième invariant des contraintes. Une prise en compte de ce dernier via l'expression du critère de plasticité a été récemment proposée par Gao *et al.* [8].

Par ailleurs, suite à de fort nombreuses simulations numériques (EF et méthodes des moindres carrés) des réponses de trois microstructures poreuses représentatives d'un matériau poreux à des sollicitations macroscopiques quelconques, McElwain *et al.* [10] ont proposé un potentiel plastique généralisant le critère de Gurson. Ce potentiel plastique valable pour une large gamme de valeurs de la porosité a la particularité de dépendre linéairement du troisième invariant des contraintes. Dans cette étude, le modèle proposé se différencie du modèle GTN par le potentiel plastique. Il consiste en (i) un critère de plasticité (celui de McElwain *et al.* [10]) dépendant du type de microstructure et, comme attendu, de la porosité ; (ii) une loi d'écoulement plastique associée au critère par la règle de normalité ; et (iii) de deux lois d'évolution pour chacun des paramètres internes (porosité et écrouissage).

2 Description du modèle de comportement proposé

2.1 Un critère de plasticité macroscopique pré-existant

L'endommagement des matériaux ductiles est lié à l'amorçage en leur sein de micro-cavités dont les volumes croissent jusqu'à la formation d'une fissure macroscopique. L'évolution de celle-ci relève des analyses de la mécanique non linéaire de la rupture [13, 6]. Des descriptions détaillées du modèle GTN peuvent être trouvées par exemple dans les références [2, 3]. Une approximation de son critère de plasticité, obtenue en choisissant comme **ver** une sphère contenant une cavité sphérique concentrique, suggérée par Gurson [9] et améliorée par Tvergaard [18], est donnée par

$$\Phi_{GT}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{H}) = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})} \right)^2 + 2a_1 f \cosh \left(-\frac{3}{2} \frac{p}{\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})} \right) - (1 + (a_1 f)^2). \quad (1)$$

$\bar{\sigma}$ est la contrainte d'écoulement du matériau non endommagé qui est supposée dépendante de la déformation plastique cumulée $\bar{\epsilon}$, (a_1, a_2) sont les coefficients de Tvergaard, et le vecteur $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$ regroupe les deux variables internes $H_1 = \bar{\epsilon}$ and $H_2 = f$. Dans l'expression (1), le tenseur des contraintes macroscopiques de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est représenté par les deux invariants que sont la contrainte moyenne p et la contrainte équivalente de von Mises q associées à la décomposition

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{1} + \frac{2}{3}q\mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{q}, \quad p = -\frac{1}{3}\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{et} \quad q = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{1/2} \quad (2)$$

où $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{\sigma}'$ désignent le tenseur identité du second-ordre et le tenseur déviateur des contraintes, respectivement.

À la suite d'un très grand nombre de calculs éléments finis, pour une porosité initiale fixée, de la surface d'écoulement macroscopique pour différents trajets de charges pilotés en déformation des trois microstructures représentées à la figure 1, McElwain *et al.* [10] ont proposé une généralisation du critère de Gurson-Tvergaard (1), sans ajout de paramètres supplémentaires. Le critère de plasticité proposé se différencie de celui du modèle GTN en ce qui suit : (i) il dépend explicitement du troisième invariant $I_3 := \det(\boldsymbol{\sigma})$ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, et (ii) il demeure valable pour des porosités variant de $f_o = 0.02$ à $f_p = 0.90$ (seuil de percolation). Les détails de la détermination de ce critère de plasticité sont donnés dans les références mentionnées ci-dessus. Les trois **vers** de la figure 1 correspondent aux distributions cubique simple (SC), cubique centrée (BCC) et cubique à face centrée (FCC) des micro-cavités. Deux définitions de la contrainte d'écoulement

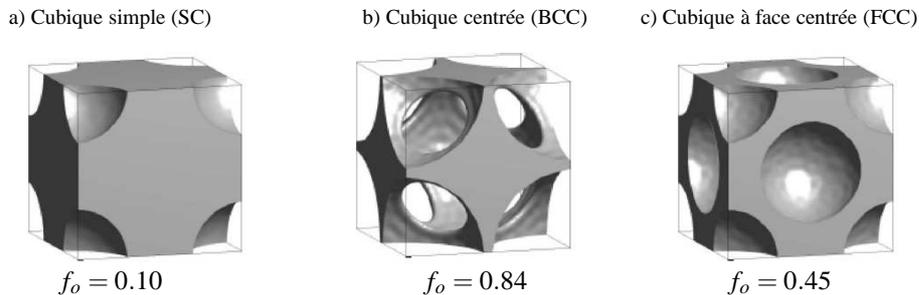


Fig. 1 – Micro-cavités sphériques dans un cube élémentaire. Les trois cellules de base définissant le matériau périodique poreux et analysés par les éléments finis dans [10], (Reproduit avec la permission d'un des auteurs).

macroscopique ont été employées dans [10] : selon la définition ①, cette dernière est égale à la valeur de la contrainte atteinte lorsque le module sécant du matériau vaut 95% de sa valeur initiale, alors que la définition ② stipule que la contrainte équivalente est à son maximum. Pour chacune

des trois microstructures, une approximation analytique de son equation

$$\Phi := \Phi_{GT}(p, q; \mathbf{H}) + s \frac{p}{\bar{\sigma}} \left(\frac{I_3}{\bar{\sigma}^3} + \frac{p^3}{\bar{\sigma}^3} + \frac{1}{3} \frac{p}{\bar{\sigma}} \left[2a_1 \cosh \left(-\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}} \right) - 1 - a_1^2 \right] \right) = 0 \quad (3)$$

similaire à celle du critère de Gurson-Tvergaard (1) a été obtenue en utilisant la méthode des moindres-carrés. L'écart entre les expressions des deux critères de plasticité devient plus marqué pour des valeurs élevées de la contrainte moyenne p ou de la porosité f .

Contrairement au critère de Gurson-Tvergaard (1), les paramètres a_1 et a_2 du critère (3) dépendent de la porosité f , et ceci pour les trois microstructures SC, BCC et FCC. Le second terme de (3) montre que la fonction Φ dépend linéairement de l'invariant I_3 avec une pente directement liée à la contrainte moyenne p et à un paramètre s , dépendant aussi de la porosité f . Le critère (3) se réduit à la condition de Gurson-Tvergaard $\Phi_{GT}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{H}) = 0$ pour $s = 0$ et $a_1 = q_1$ où q_1 est une constante¹. L'influence de I_3 sur la réponse plastique du matériau considéré est effective dès lors que le paramètre s est non nul.

2.2 Le modèle de comportement proposé et son intégration numérique

Le modèle de comportement dont il est question dans ce papier et le modèle bien connu GTN ne diffèrent que par leur potentiels plastiques respectifs, Φ et Φ_{GT} . Pour les deux modèles : (i) la règle d'écoulement est donnée par la loi de normalité ; (ii) les lois d'évolution des variables internes f et $\bar{\epsilon}$ sont du même type ; et (iii) le critère de coalescence des micro-cavités est basé sur la porosité effective f^* de Tvergaard et Needleman [19]. Le tenseur vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ est décomposée en parties élastique $\dot{\epsilon}^e$ et plastique $\dot{\epsilon}^p$, et le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est relié linéairement à ϵ^e par le tenseur des modules d'élasticité \mathbf{C}^e . La règle de normalité permet la détermination de $\dot{\epsilon}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p & , & \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\epsilon - \epsilon^p) \\ \dot{\epsilon}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{H}) & , & \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (4)$$

Il est commode pour l'intégration numérique des lois constitutives du modèle de décomposer $\dot{\epsilon}^p$ en vitesses de déformation volumique $\dot{\epsilon}_v^p$ et déviatorique $\dot{\epsilon}_q^p$: $\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \mathbb{1} + \dot{\epsilon}_q^p$. La règle d'écoulement ci-dessus conduit alors, après un calcul simple, à

$$\dot{\epsilon}_v^p = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_q^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{2}{9} \frac{\partial \Phi}{\partial J_3} q^2 \mathbb{1} \right) \quad (5)$$

où J_3 est le déterminant du déviateur $\boldsymbol{\sigma}'$, relié à I_3 par la relation $J_3 = I_3 - \frac{1}{3} p q^2 + p^3$. Le schéma implicite d'intégration de la méthode d'Aravas [1] n'est pas applicable au cas considéré ici en raison de la présence explicite de J_3 dans les relations (5)₂. En effet, la vitesse de déformation déviatorique ne peut se mettre sous la forme $\dot{\epsilon}_q^p = \dot{\epsilon}_q^p \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est la normale unitaire à la surface d'écoulement $\Phi(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{H}) = 0$. Le modèle proposé a été implanté dans un code aux éléments finis en optant pour le schéma implicite d'Euler pour l'intégration des équations constitutives [17]. La validation de l'implantation a été effectuée sur des cas tests standards (réponses de la brique à 8 nœuds et un point d'intégration) à diverses sollicitations [16].

3 Exemples numériques

À titre d'illustration, nous cherchons ci-après à confronter qualitativement les résultats d'analyse à la rupture de matériaux plastiques poreux, obtenus en utilisant le modèle de comportement

1. La constante de Tvergaard q_2 est prise égale à l'unité.

présenté succinctement à la sous-section 2.2 et le modèle bien connu GTN. Les trois exemples numériques retenus et largement documentés sont les tractions d'éprouvettes axisymétriques lisses et entaillées (EA_{1.5} et EA_{3.0}) et le cisaillement d'une couche 2D de dimension finie. Les calculs éléments finis ont été effectués en transformations finies en utilisant des éléments à interpolation linéaire avec intégration de Gauss réduite.

3.1 Traction d'une éprouvette axisymétrique lisse

La figure 2 (a) montre la géométrie du quart de l'éprouvette analysée (problème axisymétrique), le maillage employé (éléments CAX4R), les conditions aux limites cinématiques appropriées (symétrie par rapport à l'axe $\rho = 0$ et au plan $z = 0$, vitesse axiale nulle pour les nœuds de coordonnée $z = 0$, et vitesse radiale nulle pour les nœuds de coordonnée $\rho = 0$). Le chargement de l'éprouvette est représenté à la figure 2 (b) : une vitesse axiale $v_z = v(t)$ d'amplitude variable avec le temps t est imposée aux nœuds de coordonnée $z = L_{z0}$, où L_{z0} est la demi-longueur de l'éprouvette. Au cours du chargement, le pic 30 ms^{-1} de la vitesse imposée est atteint au bout de 0.0025 s . Une imperfection géométrique $L_{\rho 0}|_{z=0} = 0.995 L_{\rho 0}$ est introduite au droit de la section médiane de l'éprouvette de rayon $L_{\rho 0}$. Le comportement du matériau constitutif de l'éprouvette est supposé plastique avec un écrouissage isotrope. La loi d'écrouissage est donnée par $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_o (1 + 300 \bar{\epsilon}^p)^{0.1}$. Le comportement élastique est également isotrope avec un module de Young $E = 300 \sigma_o$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le matériau est supposé dense avant tout chargement : $f_o = 0.0$. Les valeurs des paramètres d'endommagement du modèle GTN sont celles utilisées dans [19] : $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1.0$, $\epsilon_N = 0.3$, $s_N = 0.1$, $f_N = 0.04$, $f_c = 0.15$ et $f_f = 0.25$.

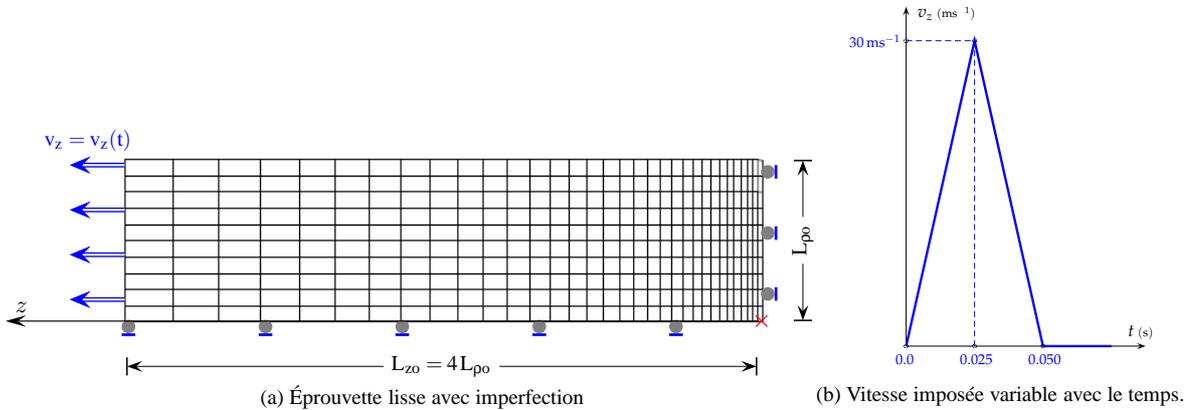


Fig. 2 – Traction d'une éprouvette lisse : géométrie, maillage, conditions aux limites, et chargement.

Les résultats obtenus des simulations numériques sont indiqués à la figure 3 en termes de variations de la contrainte nominale axiale normalisée Σ_z^n en fonction des déformations nominales axiale E_z^n et radiale E_ρ^n . Il en ressort que, pour l'exemple considéré, les prédictions des deux modèles de comportement sont pratiquement confondues jusqu'aux points d'amorçage de la rupture accélérée de l'éprouvette, signalés symboliquement par des croix cerclées. En particulier, la contrainte maximale dévoilée par le modèle proposé, indépendamment de la microstructure considérée, est égale à celle fournie par le modèle GTN. Elle est atteinte pour $E_z^n \approx 11\%$ ou $E_\rho^n \approx 5.5\%$. Les écarts des prédictions des deux modèles de comportement sont visibles dès l'amorçage de la rupture brutale. Durant cette phase, il semblerait que le modèle avec la microstructure SC est le plus proche du modèle GTN. Les ductilités² calculées sont 0.375 pour le modèle GTN, et 0.381, 0.417 et 0.418 pour le modèle proposé avec les microstructures SC, BCC et FCC, respectivement.

2. Déformation moyenne à rupture dans la section médiane $z = 0$: $\epsilon_f = 2 \log \left(\frac{L_{\rho 0}}{L_\rho} \right)$

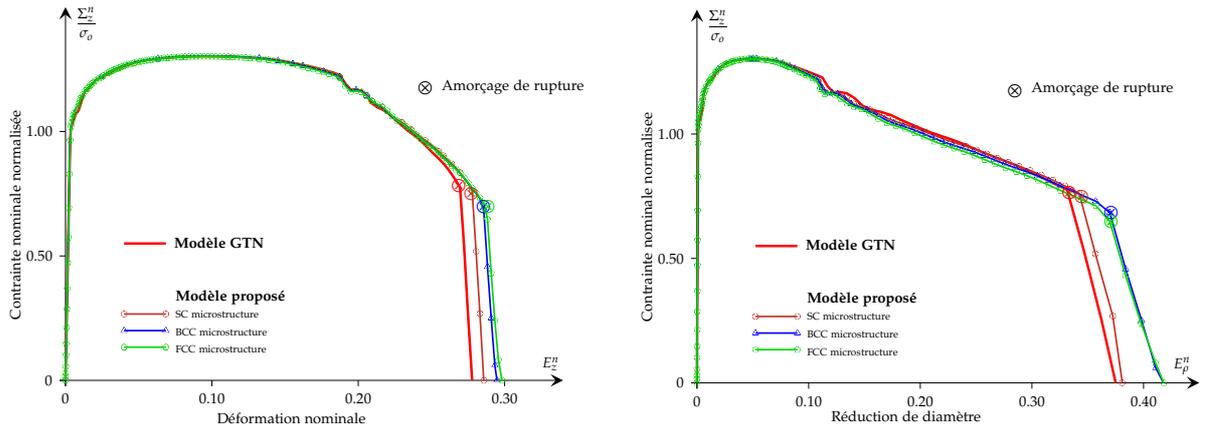


Fig. 3 – Simulation de la striction d’une éprouvette de traction lisse : variations de la contrainte nominale axiale normalisée en fonction des déformations nominales axiale et radiale pour les trois microstructures SC, BCC et FCC du modèle proposé et le modèle GTN.

3.2 Traction d’éprouvettes axisymétriques entaillées

La géométrie de l’éprouvette axisymétrique entaillée est représentée schématiquement à la figure 4 où ses dimensions sont mentionnées. Son diamètre initial maximal D_0 est fixé à 10 mm et deux rayons d’entaille R_0 sont considérés : 1.5 mm et 3.0 mm. L’éprouvette est chargée en imposant aux nœuds du bord $z = L_{z0}$ une vitesse axiale v_z constante d’amplitude $10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Le matériau constitutif est élastique plastique écrouissable obéissant au critère de von Mises. Ses caractéristiques élastiques sont $E = 210.7 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$, sa loi d’écrouissage est donnée par $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) = 896.89 (\bar{\epsilon}^p)^{0.1693}$ pour $\bar{\epsilon}^p > 0.021$, et sa contrainte à rupture vaut $\sigma_u = 536.8 \text{ MPa}$. Quant aux valeurs des paramètres d’endommagement, nous avons choisi $f_0 = 0.00125$, $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1.0$, $\epsilon_N = 0.3$, $s_N = 0.1$, $f_N = 0.008$, $f_c = 0.015$, $f_f = 0.25$.

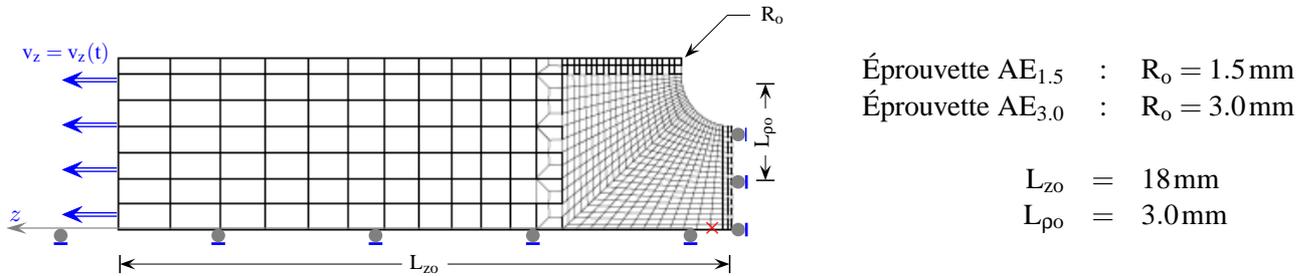


Fig. 4 – Traction d’éprouvettes axisymétriques entaillées : géométrie, maillage, conditions aux limites, et chargement.

La figure 5 montre, pour l’éprouvette $EA_{3.0}$, les variations de la contrainte nominale axiale Σ_z^n en fonction de la déformations nominale axiale E_z^n , pour les trois microstructures SC, BCC et FCC du modèle proposé et le modèle GTN. Des résultats similaires sont obtenus pour l’éprouvette $EA_{1.5}$. De nouveau, les résultats fournis par les deux modèles de comportement sont pratiquement les mêmes, y compris durant la phase d’adoucissement “lent”, tant la rupture accélérée de l’éprouvette n’est pas amorcée. Les résultats du modèle GTN semblent être plus proches de ceux du modèle proposé avec la microstructure FCC.

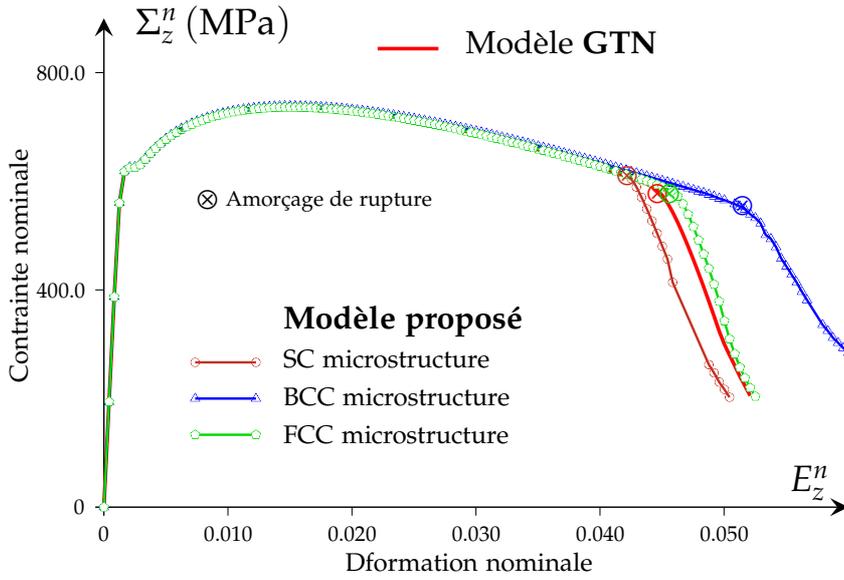


Fig. 5 – Simulation de la traction de l'éprouvette entaillée EA_{3,0} : variations de la contrainte nominale axiale en fonction de la déformation nominale axiale pour les trois microstructures SC, BCC et FCC du modèle proposé et le modèle GTN.

3.3 Cisaillement d'une couche 2D de dimension finie

On s'intéresse au cisaillement simple d'une couche homogène bidimensionnelle rapportée aux axes (x, y) . La couche de longueur $L_0 = 5.08$ mm dans la direction x et de hauteur $2H_0 = 0.65$ mm dans la direction y , s'étend indéfiniment le long des z , (figure 6). Elle est sollicitée en cisaillement simple par application à ses faces supérieure $y = H_0$ et inférieure $y = -H_0$ de vitesses uniformes $\mathbf{v} = V_0 \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v} = -V_0 \mathbf{e}_x$, respectivement. La vitesse V_0 est prise égale $= 50$ m/s dans les simulations ci-dessous. Il s'ensuit que la vitesse de cisaillement nominale est $\dot{\Gamma}_n = 1.54 \times 10^4$ s⁻¹. Le plan moyen \mathbf{AB} ($y = 0$) est maintenu fixe durant tout le processus de chargement. Le problème considéré est bidimensionnel au sens où toutes les grandeurs attachées à ce problème ne dépendent que des coordonnées (x, y) et du temps t . Les conditions aux limites s'écrivent alors

$$\mathbf{v}(x, H_0, t) = V_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}(x, -H_0, t) = -V_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}(x, 0, t) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (6)$$

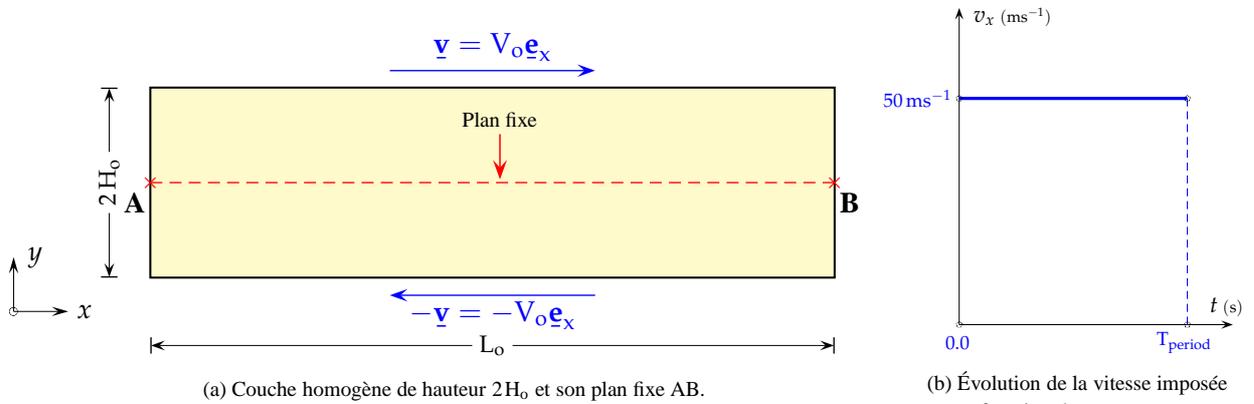


Fig. 6 – Représentation schématique d'une couche homogène 2D de hauteur $2H_0$ et sollicitée en cisaillement simple par application de vitesses, égales et opposées, à ses deux faces $y = \pm H_0$.

La loi d'érouissage du matériau constitutif est donnée par : $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_o (1 + 0.6339 \bar{\epsilon}^p)^{0.26}$ où

la contrainte initiale d'écoulement σ_o est prise égale à 1805.3 MPa. La masse volumique est $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$. Les valeurs des paramètres d'endommagement sont les mêmes que celles utilisées dans l'exemple de la traction de l'éprouvette lisse.

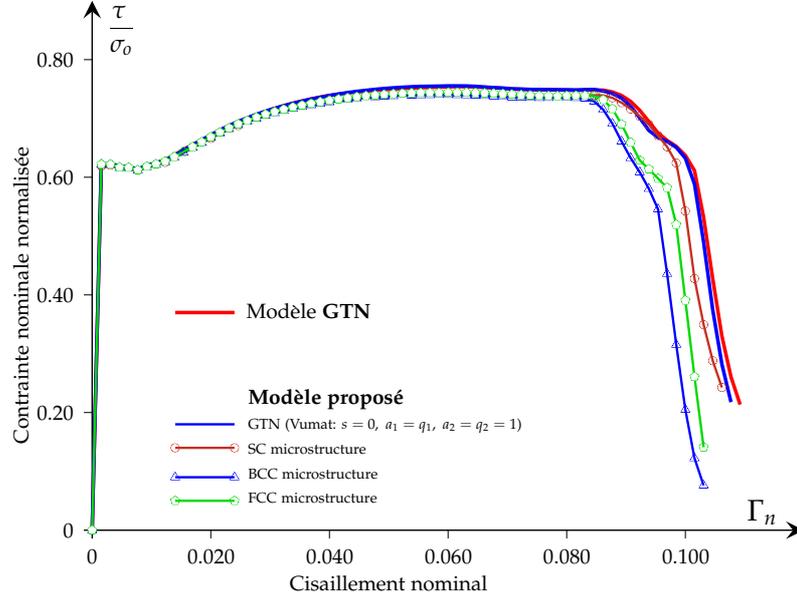


Fig. 7 – Simulation du cisaillement 2D d'une couche de dimension finie : variations de la contrainte nominale normalisée de cisaillement en fonction du cisaillement nominal pour les trois microstructures SC, BCC et FCC du modèle proposé et le modèle GTN.

La figure 7 indique les variations de la contrainte nominale normalisée de cisaillement sollicitant la face supérieure de la couche ($y = H$) et définie par $\frac{\tau}{\sigma_o}$ en fonction du cisaillement nominal Γ_n , pour les trois microstructures SC, BCC et FCC du modèle proposé et le modèle GTN. En ce qui concerne l'évolution de la déformation de la couche³, nous pouvons dire que le cisaillement du matériau s'avère uniforme jusqu'au point correspondant au maximum de la contrainte de cisaillement caractérisé par la condition $\frac{d\tau}{d\Gamma_n} = 0$. Au delà de ce point, les déformations commencent à se localiser dans la zone entourant le plan moyen **AB**, maintenu fixe, de la couche. Les résultats numériques auxquels conduisent les deux modèles de comportement sont très proches tant que des points annonçant le début d'adoucissement de la couche considérée (et non l'amorçage de la rupture brutale comme dans les exemples précédents). Les écarts observés durant la phase d'adoucissement entre les différents résultats s'accroissent dès le début de la rupture rapide de l'échantillon. Pour cet exemple aussi, le modèle proposé avec la microstructure SC est le plus proche des trois du modèle GTN.

4 Conclusion

Un modèle d'endommagement ductile pour matériaux plastiques poreux similaire au bien connu modèle GTN est présenté dans cet article. Le pré-existant potentiel plastique de ce modèle, déterminé par des calculs éléments finis de trois microstructures poreuses, dépend du troisième invariant des contraintes, et semble être valable pour une large gamme de valeurs de la porosité. Après la validation de son implantation dans un code éléments finis, les prédictions du modèle sont comparées à celles fournies par le modèle GTN, à travers l'analyse à la rupture de trois exemples

3. Les cartes correspondantes ne peuvent être incluses, faute de place, dans cet article.

pratiques simples que sont (i) la striction d’une éprouvette axisymétrique lisse ; (ii) la rupture d’éprouvettes axisymétriques entaillées ; et (iii) le cisaillement d’une couche 2D de dimension finie. Pour les trois exemples considérés pour lesquels les champs de contrainte ne sont pas du même type, les résultats des deux modèles de comportement ne se distinguent qu’au delà de l’amorçage de la chute rapide de résistance des structures analysées.

Références

- [1] N. ARAVAS *On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 24 :1395-1416, 1987.
- [2] A.A. BENZERGA, J.-B. LEBLOND. *Ductile Fracture by Void Growth to Coalescence*, Advances in Applied Mechanics, 44 :169-305, 2010.
- [3] J. BESSON. *Continuum models of ductile fracture : A review* International Journal of Damage Mechanics., 19(1) :3–52, 2010.
- [4] P. PONTE CASTANEDA. *The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39 :45–71, 1991.
- [5] P. PONTE CASTANEDA, P. SUQUET. *Nonlinear composites*, Advances in Applied Mechanics, 34 :171–302, 1998.
- [6] J.-L.CHABOCHE, P. SUQUET, J. BESSON *Endommagement et changement d’échelle*, In M. BORNERT, T. BRETHERAU, and P. GILORMINI, éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2*, chapitre 3, pages 113-141. Hermès Science Publications, Paris, 2001.
- [7] J.G. COWIE, M. AZRIN, G.B. OLSON. *Microvoid formation during shear deformation of ultrahigh strength steels*, Metallurgical Transaction A, 20A :143–153, January 1989.
- [8] X. GAO, T. ZHANG, J. ZHOU, S.M. GRAHAM M. HAYDEN, C. ROE. *On stress-state dependent plasticity modeling : Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule*, International Journal of Plasticity, 27 :217–231, 2011.
- [9] A. L. GURSON. *Plastic Flow and Fracture Behavior of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth and Interaction*. PhD thesis, Brown University, Providence, R. I., 1975.
- [10] D.L.S. MCELWAIN, A.P. ROBERTS, and A.H. WILKINS. *Yield criterion for porous materials subjected to complex stress states*, Acta materialia, 54, 2006.
- [11] C. MCVEIGH, F. VERNEREY, W.K. LIU, B. MORAN, W.K. LIU, G.B. OLSON. *An interactive micro-void shear localization mechanism in high strength steels*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 55 :225–244, 2007.
- [12] K. NAHSHON, and J. HUTCHINSON. *Modification of the Gurson model for shear failure*, European Journal of Mechanics A/Solids, 27 :1–17, 2008.
- [13] A. PINEAU. *Development of the local approach to fracture over the past 25 years : theory and applications*, International Journal of Fracture, 138 :139-166, 2006.
- [14] M..A. RAHMAN C. BUTCHER, Z. CHEN. *Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials*, Int. J. Fracture, 177 :129–139, 2012.
- [15] G. ROUSSELIER. *Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture*, Nuclear Engineering and Design, 105 :97–111, 1987.
- [16] L. SIAD. *Ductile damage analysis based on a J_3 -GTN-like model*, Journal of Multiscale Modelling, 3 :4, 1–27, 2011.
- [17] J.C. SIMO, T.J.R. HUGHES. *Computational inelasticity*, Springer-Verlag New York, Inc, 1998.
- [18] V. TVERGAARD *Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions*, International Journal of Fracture, 17 :389–407, 1981.
- [19] V. TVERGAARD and A. NEEDLEMAN *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar*, Acta Metallurgica, 32 :157–169, 1984.
- [20] L. XUE. *Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials*, Engineering Fracture Mechanics, 75 :3343–3366, 2008.