



HAL
open science

Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples

Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache, Aline Robert

► To cite this version:

Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache, Aline Robert. Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 2016. hal-01720671

HAL Id: hal-01720671

<https://hal.science/hal-01720671>

Submitted on 7 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES MOMENTS D'EXPOSITION DES CONNAISSANCES – ANALYSES ET EXEMPLES

Abstract

In this article we tackle some issues tied to the moments when the teacher elaborates and introduces in his classroom the mathematical knowledge to be learnt. By this word, we mean the general, formal knowledge, as definitions, theorems, methods, in contrast to the “contextualized” knowledge used in the exercises. The study does not concern the primary school. We recall some theoretical didactical tools which were used in previous analysis and add new questions, to make our new analysis clear. Some cognitive possible functions of these moments of the students' learning are involved. We introduce the notion of “proximities” (closeness) to qualify the relations between the knowledge used by students solving an exercise, according their precise needs in the exercise (mathematical tools), and the corresponding general knowledge (mathematical objects). These relations may be only potential or actually developed by the teacher. We distinguish some kind of proximities, according to the moment of their occurrence in the classroom – before, during or after the teacher's presentation of the general knowledge. It is tied to our assumption that there is some difference of their impact on the learning according to this moment. Some global interpretation of the teacher's presentation is also suggested. Some examples are given to illustrate our analysis and indicate some results, first for the teaching of functions (for 14-15-16 years old students). The importance of the analysis of the involved knowledge is clearly showed. Then we use these tools to analyze three kinds of “lessons” on sequences and functions 'limits (at the beginning of the university, 18-19 years old students). A textbook, a video and a lesson with students and teacher are compared. Obviously in the last form of lesson it is easier to develop some relations between new and old knowledge and on the structure of some proofs. At last, we show that this kind of analysis may induce some new studies on the teacher's discourse in the classroom, and also, necessarily, on the mathematical discourse, with what it involves, open or hidden. We recall in the conclusion the remaining questions.

Key words : knowledge, lessons, closeness's, classroom's management.

Résumé

De nombreuses questions se posent sur l'élaboration et le déroulement des moments où l'enseignant expose, en classe, les connaissances (savoirs) qui constituent « le cours », par opposition aux exercices, où l'utilisation des connaissances est contextualisée. Nous nous sommes restreints ici à l'enseignement secondaire et aux débuts de l'enseignement universitaire scientifique. Nous rappelons un certain nombre d'éléments connus sur les cours et précisons le questionnaire adopté dans ce texte pour développer nos analyses didactiques. Nous dégageons ainsi d'abord certaines fonctions, notamment cognitives, que peut remplir ce moment d'enseignement au sein d'un scénario complet sur une notion à enseigner. En particulier nous précisons diverses proximités qui peuvent ou non être en jeu, pendant les déroulements, potentielles ou effectivement explicitées par l'enseignant, entre le travail des élèves sur des exemples ou des activités (connaissances outils), et l'énoncé précis hors-contexte concerné, qui peut suivre ou précéder ce travail (connaissances objets). C'est le moment de l'occurrence de ces proximités en classe qui nous amène à les distinguer, dans la mesure où nous supposons que la nature de leur impact sur les apprentissages diffère. Nous suggérons aussi une lecture globale des cours, révélant des tensions, sans doute incontournables. Ces analyses sont illustrées d'abord par des exemples tirés d'extraits de cours sur les fonctions au collège et au début du lycée. On montre l'importance d'une analyse précise des connaissances en jeu, actuelles et visées, pour élaborer (ou non), expliciter (ou non) des proximités. Puis on en montre une utilisation sur la comparaison de diverses formes de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions, qui permet d'illustrer et de prolonger le développement théorique : on met en regard le cours d'un manuel, un cours en amphitheâtre filmé, et une vidéo de type FAD (formation à distance). On constate que seul le cours en amphitheâtre est l'occasion de développer certains liens ancien/nouveau et d'explicitier les structures logiques à l'œuvre sur des démonstrations précises. On peut aussi voir que ce type de préoccupations amène à de nouvelles analyses du discours de l'enseignant en relation avec le discours mathématique, avec ce qu'il « embarque », clairement ou de manière cachée. En conclusion nous revenons sur les moments d'exposition des connaissances étudiés et sur les questions qui demeurent, notamment sur leur apport spécifique dans les apprentissages.

Mots-clés. Exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités.

Introduction

L'installation du sens reste une des priorités de l'enseignement, souvent attachée à l'idée d'activités plus ou moins autonomes des élèves, mais l'organisation des connaissances, la construction de leur disponibilité, l'acquisition des techniques et du formalisme mathématique contribuent à donner du sens aux notions, et il n'y a sans doute pas un ordre fixe, le même pour tous les élèves de surcroît, qui garantirait dans ce qui est fait en classe cette prise de sens escomptée : il y a une certaine indépendance et des relations fortes entre sens, techniques, formalisme, par exemple, et un des enjeux de nos recherches est d'en comprendre les articulations, ce qu'ils « embarquent » les uns des autres, pour enrichir la réflexion sur l'enseignement, compte tenu des contraintes incontournables qui l'accompagnent. Activités, cours, dans quel ordre, pour qui ?

Les enseignants de mathématiques questionnent dès le collège (11-12 ans) l'utilité des moments « de cours »¹. C'est aussi une question récurrente des élèves. L'évolution souhaitée ou constatée par l'institution (notamment en lien avec les « pédagogies inversées », ou plus largement l'usage de ressources en ligne) des modalités de ces cours contribue à cette mise en question. On constate que les enseignants sont plutôt attachés à ces moments spécifiques de l'enseignement où, tout au long de l'année scolaire, le professeur expose aux élèves les connaissances² qu'ils sont censés « apprendre ». Les interrogations d'enseignants portent souvent sur les choix difficiles, à repenser chaque année, de ce qu'on choisit d'exposer, sur l'insertion de ces moments dans le reste des activités et sur ce qu'on attend des élèves³. Les élèves se demandent souvent à quoi sert ce moment de « cours », comment concilier écoute, compréhension et prise de notes (de façon à garder une trace jugée indispensable). Un certain nombre d'élèves semble ne pas apprécier autant les activités préparant le cours que les exemples ou exercices résolus donnés pendant ce dernier⁴.

La question que nous abordons ici n'est pas nouvelle. C'est celle des moyens d'analyser, d'apprécier ce que peut apporter l'*exposition des connaissances* dans les acquisitions des élèves, quel que soit le dispositif. C'est d'autant plus difficile qu'il y a peu de traces directes de l'activité des élèves à ce moment-là, et qu'il est quasiment impossible d'évaluer séparément l'apport de ces moments de cours et de celui passé autour de la résolution d'exercices, tant les uns et les autres se complètent. Les activités des élèves et les traces observables de ces activités pilotent en effet nos analyses de séances d'exercices, servant à la fois à décoder les interventions des enseignants et à apprécier les activités possibles des élèves à partir des tâches attendues et des déroulements effectifs. Pendant les moments d'exposition des connaissances en revanche il y a beaucoup moins d'observables sur les activités des élèves, et il est plus difficile de les relier à d'éventuels apprentissages. On peut voir si les élèves notent, voire acquiescent, certains participent – mais écoutent-ils ? Ont-ils vraiment compris ? Quelle est la portée de la question à laquelle ils répondent, vont-ils intégrer cette réponse au reste, quelle mémorisation est enclenchée ? Dans quelle mesure les élèves ont accès à autre chose qu'à la suite linéaire de ce qui est développé par l'enseignant ? Enfin, comment en évaluer les effets : en interrogeant les élèves tout de suite après le cours, plus tard ?

Les notions d'*institutionnalisation* et de *décontextualisation*⁵, issues de la Théorie des situations didactiques (TSD), permettent déjà d'aborder la question du contenu de ces moments d'exposition des connaissances et leur place dans l'ensemble d'une séquence, particulièrement pour des notions introduites par une recherche des élèves sur un problème où le « besoin » des connaissances visées est incontournable (*situation fondamentale*). Dans ce texte nous les reprenons, en discutant leur domaine

¹ Le même type de questions se pose aussi en primaire, mais les contenus enseignés étant différents, ainsi que la formation des enseignants, les problématiques ne sont pas les mêmes (voir par exemple la thèse de Cécile Allard, 2015).

² Ou le savoir, la distinction entre connaissances et savoir est peu présente ici : le mot savoir est associé à ce qui est adopté par les mathématiciens, souvent mis en texte, produit culturel de l'activité scientifique, alors que le mot connaissances est plutôt réservé à ce qu'en retiennent et utilisent les sujets (élèves, voire professeurs).

³ Nous en donnerons quelques exemples.

⁴ C'est un des résultats d'un questionnaire proposé dans quelques classes variées sur la perception des cours par les élèves (Bridoux et al, 2015).

⁵ Nous ne distinguons pas la dépersonnalisation qui accompagne aussi l'exposé du cours après des activités des élèves en contexte, le passage au général associé à l'omission de l'action et ses acteurs.

de validité (partie 1). Cela nous amène (partie 1) à nous restreindre à utiliser des expressions plus neutres : exposition des connaissances, exposé hors-contexte. Nous esquissons une proposition sur un rôle possible de ces phases dans la construction des connaissances, compatible avec les éléments théoriques dont nous disposons et avec les premières notions citées. Ce point de vue amène à donner une grande importance d'une part aux contenus mathématiques abordés, en relation avec leur degré de généralité (degré de généralisation) et les activités contextualisées associées. Ce point de vue donne d'autre part une grande importance à l'analyse des déroulements effectifs. Les liens, ajoutés pendant les déroulements, entre les connaissances mathématiques utilisées en contexte (dans des tâches précises) et hors-contexte (dans le cours) sont constitutifs pour nous de ce que l'enseignement peut apporter, notamment par des explicitations mettant en perspective les mises en œuvre des connaissances et l'exposé de celles-ci. Ainsi nous en étudions plusieurs types de tels « rapprochements » possibles dans les discours des enseignants. Cela amène à repérer *a priori* et à analyser *a posteriori* des proximités (d'abord potentielles), certaines partant du contextualisé vers le général – ascendantes, ou du général vers le particulier – descendantes, ou sans changement de « niveau » de généralité (horizontales). D'autre part nous dégagons plusieurs logiques globales, en tension, qui rendent compte de la tonalité générale du cours⁶ : en reste-t-on à l'énoncé d'énoncés et à leur mise en application, commentée (ou non) – logique baptisée trop rapidement procédurale, ou bien cherche-t-on à aborder davantage des questions théoriques qui ne donnent pas lieu à des activités directes ou liées au fonctionnement global du savoir – logique trop rapidement épistémologique. Ces logiques renforcent éventuellement (ou non) les proximités précédentes, qui jouent davantage sur le détail des contenus. Ces outils servent à affiner la description des moments d'exposition des connaissances (la partie 2 synthétise ce point).

La partie trois reprends plusieurs exemples d'analyses de cours, illustrant les outils et amenant quelques premiers résultats partiels. Tout d'abord (partie 3.1) des extraits de cours filmés en classe de troisième (élèves de 15 ans) et en classe de seconde (élèves de 16 ans) sur des notions qui se laissent mal aborder par des situations fondamentales (à propos des fonctions), confirment des pistes de difficultés possibles pour les enseignants dans leurs cours. Pour le chercheur, il s'agit de repérer s'il y a ou non possibilité d'une proximité, si oui, dans quelle mesure est-elle effective (ou manquée), sinon de quelle manière l'enseignant s'y prend ? Nous présentons ensuite en 3.2 plusieurs analyses de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions : cours d'un manuel, cours en amphithéâtre filmé, vidéo de formation à distance (FAD). Leur comparaison amène à illustrer tout ce qui peut être dans un « vrai » cours oral et pas dans les autres, avec en même temps les questions que cela soulève, notamment sur le formalisme.

Notre conclusion reprend la portée et les limites de cette étude, et revient sur des perspectives : réflexions sur les évolutions actuelles, sur la façon dont on peut envisager une approche des effets des cours sur les élèves.

1. Préalables et éléments nouveaux (théorie et méthodologie générales)

1.1. L'institutionnalisation, élargissements au « moment d'exposition des connaissances »

Initialement l'institutionnalisation, introduite en TSD (Brousseau, 1998) et dans les travaux de Douady (1987) sur les dialectiques outil/objet⁷, correspond à la fin de toute une séquence basée sur la réalisation d'une situation fondamentale. Cette dernière traduit le fonctionnement du savoir visé (défini par les programmes, à un niveau de scolarité). À la fin du processus au sein de l'ensemble de la séquence, il est attendu que l'enseignant dégage avec un certain degré de généralité, à partir d'une synthèse des activités des élèves, ce qui est à retenir et sera à réutiliser. Citons Margolinas (2015) : « Le savoir, produit culturel de l'activité scientifique... Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé, formulé, formalisé, validé et mémorisé... Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu... elle vit dans une situation - alors que le savoir vit dans une institution... Le processus d'institutionnalisation [est] envisagé comme une transformation qui légitime tout savoir dans une institution. La transformation en savoir, qui rompt le lien avec les premières situations dans lesquelles ont été rencontrées les connaissances, permet aussi de s'en émanciper : le savoir pourra à

⁶ Supposée assez stable, vu nos résultats sur la stabilité des pratiques enseignantes.

⁷ Puis travaillée dans diverses recherches (Perrin, 1992 par exemple).

nouveau se transformer en connaissances dans de nouvelles situations. La déconstruction nécessaire pour retrouver les connaissances et les situations qui permettent de leur donner du sens est la dévolution » p 14-15.

Il reste cependant des interrogations sur la manière précise et la possibilité de mener à bien cette phase finale d'institutionnalisation (Mounier, 2010). Qu'est-ce qui peut être déduit de l'activité initiale induite par la situation fondamentale ? Quel (nouveau) niveau de rigueur peut-on attacher aux généralités hors-contexte ? Les élèves ont-ils été tous associés de la même manière à l'activité (dévolution uniforme) ? Dans quelle mesure les interventions de l'enseignant modifient-elles ce qui est en jeu ? D'autres questions se posent sur l'extension de cette démarche à tous les contenus à enseigner. Cela peut être lié à la nature de ces contenus, à leur place dans les programmes, et à leur statut par rapport aux connaissances antérieures des élèves, ou même aux contraintes de temps ou aux personnalités des enseignants, plus ou moins convaincus par cette approche, dont la gestion est exigeante et peu naturelle pour certains élèves, voire tellement longue que les élèves peuvent perdre le fil. Quoi qu'il en soit, cela se pose tout particulièrement lorsque les connaissances visées sont reliées de manière partielle aux activités précédentes des élèves, voire peu reliées⁸ : la question est alors entière de l'inscription des moments d'exposition des connaissances dans les apprentissages, et des variables pouvant intervenir à ce sujet.

Nous avons ainsi postulé (Robert, 1998) qu'il existe des types de notions pour lesquelles il est difficile de trouver des situations menant à une institutionnalisation au sens de la TSD. Ce peut être le cas notamment pour des notions dites FUG, portées par un formalisme nouveau, généralisateur, unifiant des connaissances antérieures des élèves, dont elles sont, de fait, éloignées. C'est ce qui les rend peu accessibles par l'intermédiaire d'une situation fondamentale⁹ (Robert 1998, Bridoux 2011, Dorier 1997). Citons par exemple la règle des signes pour la multiplication des nombres négatifs. Pour d'autres connaissances qui apparaissent dans la scolarité, il est nécessaire de tenir compte d'emblée des aspects techniques qui ne mettent pas nécessairement non plus en jeu la réalisation de situations fondamentales (par exemple pour la distributivité, Constantin, 2014). On admet ainsi qu'il peut y avoir parfois une certaine indépendance entre le travail du sens et celui de la technique, souvent lié à un formalisme spécifique, ces deux dimensions se recomposant petit à petit, et pouvant donner lieu à des cours différents. Enfin, il peut exister des paragraphes du cours qui ne relèvent pas d'activités ou qui ne donnent pas directement lieu à des activités ou à des évaluations (par exemple sur la différence entre discret et continu, sur la notion d'équation, sur les ensembles de nombres, etc.). Cela met en jeu ce que Pouyanne (Robert et Pouyanne 2004) appelle des notions non encore formalisées, voire non encore formalisables ; les notions para-mathématiques et proto-mathématiques définies par Chevillard (1991) s'inscrivent aussi dans cette catégorie.

De fait le mot institutionnalisation au sens de la TSD est peut-être trop restrictif pour rendre compte de tout ce qui se fait ou de ce qui peut être fait en cours. C'est pour cette raison que nous évoquons la notion d'exposition des connaissances (ou s'il n'y a pas ambiguïté, le cours) et que nous préférons à l'expression d'activités d'introduction celle d'activités de préparation, moins connotée.

1.2. Décontextualisations ou hors-contexte ?

La TSD a amené à travailler les idées d'institutionnalisation à partir de la décontextualisation et de la dépersonnalisation (nous regroupons les deux qualités sous le terme de « hors contexte »). La décontextualisation et la dépersonnalisation s'appuient sur des activités des élèves, notamment pour le primaire. Ainsi, après un travail des élèves sur une situation potentiellement porteuse d'apprentissages, où la mise en œuvre du savoir visé par les élèves est incontournable, voire si possible contrôlable par les seuls élèves, les enseignants dégagent, en s'appuyant sur ce travail des élèves, le savoir décontextualisé, légitime, général, à retenir et réutiliser.

⁸ Notamment s'il n'y a pas de situations fondamentales dont s'inspirer.

⁹ Mais cela n'empêche pas d'envisager des activités de préparation, plus partielles !

Le mot « décontextualisé » a alors son sens propre, « issu d'un contexte », « généralisé ». En fait il est souvent utilisé de manière plus large, comme synonyme de « général ». Nous utiliserons le cas échéant le mot « hors contexte » pour nous démarquer de l'indication implicite d'un travail contextualisé antérieur à l'énonciation du savoir.

1.3. Une hypothèse sur un rôle possible des cours

Banalement le cours participe à la compréhension locale et globale des notions visées, à leur mémorisation et à leur utilisation future : ce peut être un moment constitutif de l'appropriation par les élèves des concepts visés. Nous allons préciser ces idées en nous appuyant sur des éléments théoriques. Par ce mot « cours », attaché à un moment où l'enseignant expose des connaissances aux élèves, nous désignons à la fois un contenu (rapporté à un texte du savoir), écrit et/ou oral, et un déroulement devant les élèves. Nous étendons cependant quelquefois le mot aux parties des manuels dévolues aux seuls textes du savoir.

Pour l'installation de connaissances notamment, en reprenant les théories précédentes, le cours (en tout cas l'institutionnalisation) contribuerait au tissage des liens dans les têtes des élèves entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé ou hors contexte (texte général du savoir). Nous posons que ces liens en construction sont effectivement constitutifs de la construction visée des connaissances (nous parlerons de *connexions provisoires*). Ces liens, amorcés dans le cours, peuvent être préparés avant le cours notamment pour les aspects « outils » des notions qui donnent accès à une partie de leur sens. Ils se renforceraient alors dans les mises en fonctionnement à partir du cours, d'autant « mieux » que sont activées des proximités entre ce que les élèves savent, ont fait ou doivent faire et ce qui est nouveau, y compris les aspects « objets » introduits par l'enseignant (les définitions et propriétés générales, le vocabulaire, les méthodes...). Ce peut être sous forme d'applications immédiates, exemples et exercices résolus, et/ou d'éléments de discours. C'est l'ensemble cours-activités qui est en jeu.

L'hypothèse que nous faisons est inspirée à la fois des idées de zone proximale de développement (ZPD) et de pseudo-concepts, empruntées à Vygotski, reprises en partie par Vergnaud notamment en didactique professionnelle, et des idées d'institutionnalisation suivant l'activité autonome des élèves, voire la précédant (inspirées par Piaget, reprises par Brousseau (ibid.), Douady (ibid.) et d'autres didacticiens à leur suite). Nous assimilons les cours à la présentation aux élèves de concepts en mots et en formules, qui, pour eux, joueraient d'abord le rôle de "pseudo-concepts". Il s'initialiserait pendant les cours quelque chose, une familiarisation, qui ressemble à ce qui fait passer pour Vygotsky d'un pseudo-concept à un concept chez le jeune enfant : à partir du mot utilisé par un adulte qui s'adresse à lui en contexte, l'avancée vers le concept pour l'enfant est rendue possible par un début de manipulation du mot, hésitante, peut-être en partie erronée, dans ses propres contextes, notamment en répétant et en étant attentif aux réactions de l'adulte confronté à cette utilisation enfantine du mot, en en testant ainsi l'usage en quelque sorte. Cela joue comme une anticipation de ce qui est visé et l'usage, ainsi rendu possible même s'il est incertain, en est alors sans cesse ajusté grâce aux effets de son utilisation par l'enfant sur ses interlocuteurs, reprises, corrections mais aussi encouragements, jusqu'à la transformation attendue en concept et à son intériorisation.

Autrement dit les concepts introduits dans le cours avec des phrases, y compris formelles, symboliques, porteuses d'idées et/ou de techniques (relevant de théories, porteuses de justifications), ne seraient que des « pseudo-concepts » pour les élèves au début, mais devraient pouvoir se transformer à moyen terme en concepts ; les leviers de ce processus de conceptualisation étant les exercices et le texte du savoir proposés ainsi que la qualité des liens explicités entre exercices et cours. Sans prétendre cependant que parce qu'une proximité est dévoilée, explicitée, cela suffit à ce que l'élève s'en saisisse.

Dans cette acception, et comme nous l'annonçons au début de ce paragraphe, ce qu'il y a à analyser dans un cours n'est pas seulement le texte du savoir à présenter puis présenté par l'enseignant mais bien une source porteuse de construction de concepts à partir de mots et d'idées, et grâce à tout un accompagnement. Le processus n'est pas immédiat. Le cours ne donne pas de modèle à retenir et à

appliquer pour les élèves dès qu'il a été dispensé. Une fois qu'ils ont entendu (et/ou noté) le cours, les élèves peuvent revenir à d'autres procédures, il s'agit justement pour l'enseignant de signaler que le cours permet de faire autrement. Un enseignant débutant vient ainsi de donner la règle sur le calcul de l'exposant d'un produit de puissances du même nombre. Confronté à un problème numérique de ce type, un élève recommence à développer pour donner le résultat juste. L'enseignant le corrige lui reprochant de ne pas appliquer la règle – alternative : l'enseignant lui montre qu'il pouvait aussi aller plus vite en appliquant la règle, qui donne le même résultat... C'est l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves qui est à apprécier, qui fait sens petit à petit. Notons une différence avec les pseudo-concepts tels qu'introduits par Vygotski, associés souvent seulement à des mots et des idées : le concept mathématique associé aux mots (définitions, propriétés...) est, lui, porteur de sens, de techniques, il peut faire intervenir du symbolisme, il y a même souvent plusieurs représentations associées et il n'est jamais isolé. Cela justifie l'attention que nous portons à tout ce qui accompagne le texte du savoir, à plusieurs niveaux, exprimé dans différents registres pour illustrer les différents aspects du concept. Cela induit l'étude des diverses proximités éventuelles introduites par l'enseignant, que nous précisons plus loin.

Le travail de conceptualisation serait ainsi lié à la transformation individuelle de ces pseudo-concepts en concepts, grâce notamment à tous les allers-retours « cours »/activités. Rappelons que nous adoptons une définition « opérationnelle » de la conceptualisation : en l'associant à la disponibilité des notions (outils et objets, utilisés à bon escient) et à l'organisation mutuelle des connaissances nouvelles et anciennes, avec la flexibilité attendue et la possibilité de résoudre des tâches comportant des adaptations. On conçoit ainsi le rôle du choix de l'ensemble des tâches et du travail des élèves dessus, le rôle du professeur à l'affût des proximités qui peuvent apparaître, le rôle de l'« exploitation » qu'il peut en faire pour que les élèves en profitent. De même qu'il y a des différences dans les différentes parties des cours, qui n'alimentent pas les mêmes aspects des connaissances, de même il est vraisemblable qu'il y a des différences entre les élèves concernant les processus d'apprentissage liés aux allers-retours en question, même si l'objectif est que tous apprennent au final, grâce à l'ensemble de ce qui leur est proposé. Par exemple certains élèves ont du mal à entrer directement dans un cours décontextualisé, d'autres en revanche ont du mal à s'intéresser à un exercice dont ils ne comprennent pas (encore) la finalité.

1.4. Un outil pour étudier localement les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants

Notre inscription en théorie de l'activité et l'importance que nous accordons aux activités effectives dans les apprentissages nous amènent à donner autant d'importance aux déroulements en classe qu'aux contenus travaillés. Nous postulons que si l'autonomie des élèves¹⁰ pendant les activités est une condition d'apprentissage (Piaget), la qualité des discours de l'enseignant pendant les déroulements en est une autre, tout aussi cruciale (Vygostki), comme noté ci-dessus. C'est ainsi l'importance que nous donnons au travail des élèves sur des connaissances proches de celles qu'ils ont déjà, connaissances « déjà-là » ou « presque déjà-là », qui nous amène à repérer les occasions que les enseignants donnent (ou non) à leurs élèves d'entendre, voire d'éprouver de telles proximités avec les connaissances nouvelles qui sont visées par l'enseignement. Autrement dit c'est en appréciant ce qui est dit ou décidé par l'enseignant en relation avec les ZPD supposées des élèves sur les connaissances inconnues en jeu (Robert et Vandebrouck, 2014) que nous détectons ce type de proximités.

Les moments d'exposition des connaissances ne sont pas ceux où les élèves sont le plus en activité visible, même si les enseignants essaient de les animer autant que possible, même si quelquefois, par exemple, les élèves peuvent eux-mêmes commencer à décontextualiser¹¹. Il peut y avoir des éléments du cours qui ne se prêtent pas directement à des exercices mais, par exemple, plus à des réflexions. Lors d'un cours sur la nature des différents nombres, il n'y a pas d'exercices d'application immédiats, même si les élèves peuvent être sollicités sur ce qu'ils connaissent déjà. Or il est important pour les enseignants de garder les élèves plus ou moins attentifs, et même si possible de faire progresser

¹⁰ En termes d'a-didacticité ou de travail en petits groupes par exemple.

¹¹ C'est de moins en moins possible au fur et à mesure de la scolarité.

certaines de leurs connaissances, ou au moins d'amorcer ce progrès, pendant ces moments-là. Nous faisons l'hypothèse qu'une des manières développées par les enseignants pour y arriver est de rester aussi « proche » que possible des élèves. Nous allons revenir sur ce mot « proche » ci-dessous. C'est sans doute une caractéristique constante de ce que font les professeurs en classe, à tout moment, mais elle est d'autant plus importante pendant les cours qu'ils ne peuvent pas s'appuyer autant qu'à d'autres moments sur les activités des élèves.

Nous avons ainsi introduit la notion de *proximité-en-acte* pour qualifier ce qui, dans les discours ou dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves (Robert et Vandebrouck *ibid*). Nous les avons étudiées dans des phases de recherche d'exercices en classe et, dans le travail présenté ici, nous allons les spécifier et les repérer dans les moments d'exposition des connaissances.

Les proximités-en-acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité avec les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves. Cette activité de l'enseignant peut être consciente et voulue, plus ou moins explicitement, mais peut aussi être automatique¹². Cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves. Même si l'enseignant a explicitement conçu une activité préalable à un cours, pour préparer l'introduction de certaines connaissances visées, ce n'est pas pour autant que le passage de l'activité aux connaissances qui vont être dégagées soit facilement perçu comme proche par (tous) les élèves. Ainsi ce mot « en-acte » accolé à « proximité » spécifie, dans notre idée, une qualité de l'activité de l'enseignant en classe qui accompagne le développement des contenus, qualité ni nécessairement consciente pour l'enseignant, ni exprimable. Ceci de la même façon que pour Vergnaud (1990), le « en acte » de l'expression concept-en-actes qualifie une connaissance qui se manifeste dans l'activité d'un sujet sans être toujours consciente ni exprimable.

De manière générale, nous reconstituons ces proximités (ou non-proximités) à détecter dans des pratiques enseignantes à partir de divers indicateurs, les enrôlements et certains arguments employés pour mettre et maintenir les élèves au travail, la durée du travail des élèves et de ce qui amène à l'arrêter, la nature des questions ou les types d'aides (procédurales ou constructives notamment) avec leur relation au travail des élèves, à leurs réponses. Les aides sont souvent des ajustements improvisés pour répondre aux élèves, très ajustées au travail fourni, et donc ce sont des formes particulières de proximités. D'autres indicateurs de ces dernières sont donnés par les répétitions (avec ou sans ajouts), les reprises, complétées ou non (du professeur, des élèves), le fait de (tenter de) se mettre au niveau des élèves en utilisant le « nous » ou le « je » (Pariès 2004), avec ou sans changement dans le niveau de langage ou le niveau de généralité adopté dans le discours.

Un autre élément indispensable est notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile. C'est un travail préalable sur le relief (Pariès et al. 2007) des notions concernées qui permet au chercheur de repérer ces dernières caractéristiques (supposées) des connaissances des élèves... Quoi qu'il en soit, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant, et ce qui est étiqueté comme proximité-en-acte reste dans une certaine mesure « potentiel » : d'une part il n'est pas certain que l'enseignant l'ait conçue comme telle, mais, d'autre part, il n'est pas certain que cela soit efficace pour les élèves, que la proximité soit reconnue et source de progrès. Ce serait par des entretiens a posteriori qu'on pourrait vérifier la concordance entre l'attribution par le chercheur d'une intention de rapprochement et l'intention réelle de l'enseignant. Ce type d'entretiens serait sans doute un enrichissement important si on étudiait les pratiques des enseignants pour elles-mêmes, mais ça l'est moins dans notre visée actuelle d'analyse des moments d'exposition des connaissances et de ce qui les constitue.

¹² Si un élève semble perdu, on lui pose une question.

Il y a des proximités non strictement mathématiques : affectives (encouragements), langagières (jouant sur divers niveaux de langue, du familier au symbolique, ou sur des images, etc.), de type « carotte/bâton » (jouant sur des motivations liées à la scolarité).

D'autres proximités peuvent avoir une portée plus directement cognitive, mettant en jeu des liens portant sur des contenus (par l'intermédiaire de commentaires méta¹³ mais pas seulement), ou révélant des relations portant sur diverses tâches, ou sur diverses sous-activités, ou sur leurs liens avec le cours, au sens large... Ce sont ces dernières proximités supposées cognitives que nous étudions plus particulièrement, même si les diverses caractéristiques énumérées ci-dessus ne sont souvent pas exclusives les unes des autres.

On a montré par exemple (Robert & Vandebrouck, *ibid.*), pour des recherches d'exercices en classe, que tous les élèves ne sont pas concernés de la même façon par les décisions des enseignants. Celles-ci « collent » aux réponses d'élèves (mais ce peut être de certains élèves seulement) et les engagent dans la suite des sous-activités sur une tâche complexe sans que tous les élèves aient participé aux premières réponses. Des régularités ont été inférées dans les types de sous-activités peut-être « manquantes » pour les élèves, non engagés dans les premières réponses : ils sont de fait souvent exclus des sous-activités de reconnaissance des connaissances à mettre en fonctionnement et d'organisation des raisonnements, dont ils ne font qu'adopter les résultats donnés par d'autres élèves plus rapides ou plus habitués à répondre. L'enseignant prend des décisions proches du travail de ces derniers, mais éloignées du travail des autres élèves. Par ailleurs, un certain nombre d'illusions de la transparence, déjà signalées, peuvent aussi être associées à des non-proximités pour certains élèves. « Avoir déjà vu » par exemple signale souvent quelque chose qui a été « traité » en cours, mais cela n'implique pas, pour les élèves, se rappeler, ni savoir appliquer... D'autres non-proximités peuvent être liées à des naturalisations¹⁴ chez l'enseignant, c'est-à-dire à des connaissances devenues tellement évidentes pour lui que le professeur ne remarque plus qu'il peut y avoir quelque chose à expliquer. Par exemple tel enseignant remplace directement, pendant un raisonnement, la propriété d'un triangle rectangle d'avoir un angle droit par le fait que ses côtés sont perpendiculaires, sans signaler ce changement de point de vue qui peut engendrer pourtant un « trou » dans le suivi de tel ou tel élève. On est passé d'une mesure d'angle dans un triangle à une propriété géométrique des droites supports des côtés...

Une dernière remarque s'impose sur la différence entre les proximités étudiées ici et les « petits pas » préconisés par certaines pédagogies, même si cette dernière expression n'est pas très précise. Les petits pas engagent les élèves dans une forme de proximité très limitée, locale, souvent sans changement ni de point de vue ni de degré de généralité ni de cadre ou registre, et souvent ils peuvent effectuer seuls une partie du chemin. En revanche, les proximités sur lesquelles nous travaillons peuvent concerner un changement de niveau de connaissances, une généralisation importante, que les élèves auraient eu du mal à faire seuls, voire à concevoir seuls, mais qu'ils pourront accepter, s'approprier, parce que l'enseignant va leur expliquer, y compris sur un exercice, *a posteriori*, ce qui dans leurs connaissances est proche de ce qui est mobilisé et ce qui est nouveau.

1.5. Les proximités discursives dans le cas particulier des moments d'exposition des connaissances

Dans le cas particulier des moments d'exposition des connaissances qui nous intéresse ici, vu la définition en termes d'éléments et de connexions provisoires à transformer en nouvelles

¹³ Précisons ce que nous entendons par méta (Tenaud 1991, Robert & Robinet 1996). On a défini plusieurs niveaux, mettant en jeu l'objet du commentaire. Ce peuvent être des exemples non strictement mathématiques, des métaphores, images, illustrations, explications, méthodes, contrat, enjeux, attendus d'un cours (en acte, explicites). Rappelons qu'on distingue le *méta 3*, au niveau le plus général, avec les références à des besoins, internes aux mathématiques ou non, le pourquoi des choses. Le *méta 2* aborde des questions de structuration globale (explicite ou non), des idées générales sur le comment, par exemple les méthodes à utiliser face à un type de problème, sans tenir compte des énoncés particuliers ; le *méta 1* est le plus adapté au contexte, il permet de parler des liens précis déclaratif / procédural ; sur des exercices il est associé à la prise en compte de la conclusion, et des données (des hypothèses).

¹⁴ Éléments transparents pour les enseignants, non explicités, alors que pour les élèves il peut y avoir non transparence.

connaissances, il nous semble particulièrement intéressant de traquer ce type d'interventions visant les rapprochements, puis de s'interroger sur les effets possibles sur les élèves des différentes proximités repérées (ici surtout dans les discours). Cela peut concerner notamment ce qui se passe entre du contextualisé et du hors-contexte, que ce soit entre exemples ou activités avant le cours et développement de ce cours, ou entre le cours et les exemples ou premiers exercices qui l'illustrent ensuite. Cela engage deux types d'analyses, *a priori* lorsqu'on met en jeu les contenus à travailler, et *a posteriori* sur le déroulement du cours.

Nous suggérons qu'il y a, dans les cours, plusieurs grands types de ces proximités-en-acte particulières. Elles sont discursives et se déclinent en relation avec les contenus précis. Elles sont soit le fait de l'enseignant, soit se jouent dans des échanges questions/réponses avec les élèves. Nous pensons qu'elles peuvent avoir des finalités différentes, mais qu'elles n'atteignent leurs objectifs qu'à certaines conditions, liées à la nature du hors-contexte en jeu et notamment à son degré de généralité, et aussi à la nature des exemples et activités proposés et au travail que les élèves ont eu ou ont encore à faire dessus. C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'elles supposent entre contextualisé et hors-contexte qui déterminent ces types. Pour chaque cas, nous donnons la caractérisation retenue puis nous indiquons des questions qui résultent de nos interrogations générales, en relation avec les connaissances des élèves. Soulignons qu'un passage du cours ou une activité introductive ou illustrative peut activer plusieurs types de proximités successivement. Des exemples seront donnés dans la troisième partie.

1.5.1. Les proximités inductives, ascendantes

Elles se placent entre ce qu'ont pu déjà faire les élèves et du nouveau (mots, définitions, propriétés) – il y a généralisation, décontextualisation ou hors-contexte, soit d'un caractère outil qui donne naissance à un « nouvel » objet ou à un « nouvel » outil, soit directement d'un nouvel objet, définition ou propriété. Ce qui varie, c'est ce qui est décontextualisable à partir de ce que peuvent savoir ou faire les élèves, et la distance entre ancien et nouveau. Mais le transfert, en général, n'est pas transparent, et un enjeu de ces proximités est d'explicitier ce qui est retenu et généralisé à partir de ce que les élèves ont pu faire. Selon l'empan de cette généralisation, selon le type de hors-contexte, c'est plus ou moins facile. Ce type de proximités peut se retrouver dans beaucoup d'ingénieries ou de problèmes développant une dialectique outil-objet (Brousseau *ibid*, Douady *ibid*, Butlen & Pezard, 2003). Nous en avons moins d'exemples au collège qu'à l'école primaire. Il n'est pas exclu qu'il y a là une source de différences entre primaire et secondaire, liées à un degré de généralité adopté dans les passages hors-contexte, à leur place dans l'ensemble des séances (et aux dynamiques avec les exercices qui les accompagnent), et peut-être surtout au fait que davantage de notions FUG (cf. ci-dessus), sont porteuses d'un formalisme nouveau, généralisateur et unificateur, qui n'est pas suffisamment accessible à partir d'un « bon » problème, même si partiellement il peut exister des avancées vers la notion. On peut aussi proposer aux élèves des problèmes les mettant devant un manque d'outils pour résoudre, et l'enseignant peut en « profiter » pour introduire au moins la nécessité d'un nouvel élément (on parlera encore de proximité ascendante). Nous illustrerons ci-dessous en ces termes des activités introductives sur des extraits de cours sur les généralités sur les fonctions en classe de troisième au collège.

1.5.2. Les proximités déductives, descendantes

Elles se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou exercices à faire ensuite avec ou par les élèves (contextualisation, voire re-contextualisation différente des anciennes). Les élèves peuvent être associés plus ou moins directement. Ce sont des illustrations par exemple. L'enjeu est d'explicitier ce qui est à contextualiser, la manière d'inscrire le cas particulier traité dans l'invariant général, de substituer les données aux bonnes variables (à repérer). Ce n'est pas toujours transparent pour les élèves, alors même que leur longue fréquentation des mathématiques amène les enseignants à ne pas toujours repérer ces difficultés, tant ces connaissances sont naturalisées chez eux. Par exemple il n'est pas question d'appliquer le théorème de Pythagore à un triangle non rectangle, ou à un quadrilatère – mais on peut changer le nom des sommets, les mesures des côtés, la place de la figure... et on peut transformer triangle rectangle en triangle ayant un angle droit, et introduire des côtés perpendiculaires (ou repérer un triangle rectangle dans une figure plus compliquée). De plus il ne s'agit pas d'obliger

les élèves à appliquer le cours tout de suite, mais au contraire de profiter de leur maladresse pour introduire les éléments ignorés !

Des exemples sont donnés ci-dessous sur les cours déjà cités.

1.5.3. Les proximités horizontales

Elles ne font pas changer de niveau de discours. Cela peut porter sur le cours en train de se faire (demandes de compléments, de réponses) ou sur la structuration du cours (« on en est où ? ») ou même sur des discours plus méta, mises en évidence de relations, d'analogies, statuts des éléments en jeu, voire questions sur le savoir concerné, selon ce qui est en jeu. C'est l'enseignant qui les gère, même s'il peut poser des questions. C'est sans doute difficile à faire vivre à tous les élèves. Il y a différentes manières de les présenter, avant ou après ce sur quoi elles portent... Il y en aurait davantage à l'oral que dans un texte écrit. Souvent tout se passe comme si cela servait plus à maintenir des interactions qu'à des objectifs purement cognitifs.

Un exemple est donné à partir d'un extrait de cours sur les fonctions, en classe de seconde.

1.6. Vision globale...

À un niveau plus global, faire cours, que l'on soit ou non dans un schéma d'institutionnalisation stricte, engage inévitablement des choix (ou des compromis ?), plus ou moins prévisibles, en tension entre la présentation d'un exposé cohérent, général, donnant à voir le jeu mathématique, et celle d'un exposé plus directement applicable et mémorisable et peut être plus utile aux élèves, donnant à voir les aspects procéduraux. On pourrait évoquer, en référence à la théorie anthropologique du didactique (TAD), une tension entre les aspects techniques et les aspects théoriques ou technologiques des notions. On peut se demander ainsi s'il n'y a pas, de manière caricaturée, davantage que pendant le travail sur les exercices, deux logiques « en tension » (associées à des niveaux de langage) qui traversent les manières d'exposer les cours devant les élèves, activant deux niveaux de pensées :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, à l'adoption plus ou moins implicite d'un mode de validation et même de travail mathématiques (cf. épistémologie), qui peut se traduire par l'utilisation d'un langage non strictement mathématique, de commentaires méta, etc. On pourrait évoquer une logique épistémologique, voire heuristique, qui mettrait en jeu des réponses à des questionnements d'ordre théorique ou technologiques (justifications de différents niveaux).
- et une autre plus « scolaire », plus locale, plus liée aux contrats, liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, d'armer les futures utilisations (y compris techniques, mais inscrites dans l'épistémologie spécifique des mathématiques), voire d'obliger à les faire même s'il y a d'autres voies. On pourrait évoquer une logique « procédurale » qui mettrait en jeu des réponses à des questions techniques.

Il peut y avoir tension car suivre la deuxième logique peut faire perdre le fil aux élèves, voire être (très) ennuyeux, tout en les rassurant en partie, privilégiant un apprentissage procédural, mais suivre la première peut avoir pour conséquence de perdre les élèves, notamment au moment du retour aux applications strictement mathématiques, tout en « séduisant » certains et en dépassant d'autres élèves, notamment par le recours à des éléments externes aux mathématiques, faisant intervenir l'intelligence « ordinaire » à laquelle des élèves ne s'attendent pas dans ce contexte.

Il y aurait sans doute, grâce à une lecture diversifiée, à étudier les traces de ces deux logiques qui se combinent dans les cours, y compris pour traquer dans chacune les naturalisations éventuelles côté enseignants qui feraient difficultés aux élèves. Ce peuvent être des naturalisations langagières, notamment sur des mots, ou des passages implicites entre deux idées, qu'ils soient d'ordre logique (mathématique) ou simples changements de points de vue, ou des acceptations ou refus de procédures ou d'arguments d'élèves, supposés clairs, mais qui restent obscurs...

Les analyses des cours de L1 ci-dessous (3^e partie) mettent en valeur cette discussion.

2. Le questionnement actuel, éléments de méthodologie

Nous allons étudier des cours réels, à défaut de leurs effets sur les élèves, en général filmés¹⁵ et transcrits, éventuellement complétés par des documents, voire des entretiens. Quels sont donc les choix des enseignants dans ces moments d'exposition des connaissances ? En termes de contenus, une première alternative tient à l'adoption ou non de situations propices à une certaine décontextualisation ou au moins d'activités préparant le cours. Sont en jeu, ensuite, la manière dont l'enseignant s'appuie sur ces activités ainsi que le degré de généralité adopté dans la présentation des savoirs, en relation éventuelle avec ce qui précède. Les activités suivant le cours et l'explicitation des liens entre eux sont alors des variables, dépendant aussi des déroulements adoptés. Interviennent également les choix de logique globale du cours. Ce qui pourrait différencier les cours à cet égard, serait justement les proximités mises en œuvre, leur ordre, leurs accroches, voire leur durée : les développer beaucoup entre du général et du décontextualisé, par exemple, signale peut-être plutôt la première logique ; les développer beaucoup entre du contextualisé et du décontextualisé, s'inscrirait plutôt dans la deuxième.

2.1. Questionner les contenus des cours

En fait le rôle et le contenu de ces moments d'exposition des connaissances dépendent de manière importante de ce qu'on vise dans l'enseignement, au niveau de l'institution – selon qu'on ne vise que l'installation de techniques, ou au contraire l'installation de connaissances un peu disponibles ou encore non évaluables, le cours sera complètement différent par exemple. Il y a des notions qui ne sont pas transformables en activités, ou du moins pas immédiatement, on peut aussi tenter ou non une institutionnalisation partielle qui suit une activité adéquate¹⁶... Selon les classes aussi il peut y avoir des différences notamment sur ce qu'on attend des élèves. Il est donc difficile d'émettre des généralités, il faut prendre en compte les savoirs et connaissances concernés et les contextes.

Une étude préalable du relief sur la notion est nécessaire pour identifier et caractériser les spécificités du savoir en jeu à travers les programmes, la nature des notions et leur sens, les difficultés des élèves. Cela facilitera l'appréciation des choix que fait l'enseignant du mode d'introduction de la notion aux élèves, de l'ordre et des alternances entre cours et exercices proposés, des évaluations.

Puis il s'agit de décrire les contenus précis du cours (reconstitués à partir des vidéos et des documents de l'enseignant) et de le découper en épisodes correspondant aux phases du cours. Ainsi, pour une notion¹⁷ au programme, l'enseignant dispose ou établit un texte du savoir, qui donne souvent lieu à un écrit du professeur (effectif ou non). Ce texte sera à donner d'une façon ou d'une autre aux élèves, il est en général accompagné d'une présentation orale, fractionnée, éventuellement précédée, souvent truffée et suivie d'exemples, d'exercices ou d'activités, à dégager par le chercheur (et associés aux épisodes). C'est ce qui sert à la classe de référence, décontextualisée ou générale mais exemplifiée, pour les définitions, les théorèmes, les démonstrations, le niveau de rigueur et le symbolisme attendus, les exercices types et les méthodes, voire les commentaires méta, quelquefois écrits. C'est une réserve pour puiser les objets et outils utilisés ensuite mais c'est aussi le lieu où peuvent être décrits le statut des connaissances (admis, démontré, méthode...), les liens et mises en relation entre connaissances anciennes et nouvelles et entre diverses parties du cours (mise en évidence de l'organisation des connaissances). Il est ainsi attendu que les élèves empruntent ces mots, ces formulations, ces notions (sans qu'il y ait nécessairement modèle, on y insiste).

Pour les épisodes d'exemples ou d'exercices, les analyses portent sur la manière dont la notion est investie.

Pour le reste, on part du fait que le cours est une mise en forme – il introduit des mots, des formulations, des propriétés, des justifications, il a une fonction d'étiquetage, il participe à la décontextualisation ou à la présentation « hors contexte ». La description correspondante met en jeu le degré de formalisation, de généralisation retenu dans les énoncés hors-contexte. Cela permet

¹⁵ La caméra est posée au fond de la classe et centrée sur le tableau et l'enseignant.

¹⁶ Si ce n'est inspirée d'une situation fondamentale.

¹⁷ Au sens large.

d'identifier ce que les élèves auront à faire de ce général, qu'est-ce qu'ils auront à « remplacer » ou à substituer par exemple ?

Notre étude doit ainsi dégager différents niveaux possibles de généralisation, notamment selon ce qui reste du contexte dans le général, à commencer par le générique (pour lequel il n'y a pas de variable explicite). À partir d'une même activité on peut exprimer une généralisation à tous les contextes qui restent évoqués (ne serait-ce que par un « pour chaque »). On peut aussi exprimer une généralité où les contextes précédents ne sont plus cités.

Le manuel est lui aussi un exemple de texte du savoir et de mise en forme, mais sans fractionnement entre leçons ni beaucoup d'explications ni d'usage de certains ostensifs, ni de réponses adaptées aux questions d'élèves ni beaucoup de liens entre chapitres. Le manuel délivre un texte relativement homogène, alors qu'un cours oral et écrit peut davantage fluctuer, être adapté à ce qui se devine chez les élèves, à ce qui a été fait, aux difficultés qu'on connaît et qu'on anticipe.

C'est notamment le vocabulaire utilisé, entre langage courant et langage mathématique, avec ou sans rupture, avec ou sans implicite, les rappels, répétitions, reprises (actives ou non), qui habillent le cours de l'enseignant qui doivent être précisés ensuite ainsi que l'écrit en jeu : les traces visibles de l'histoire racontée, les liens et différences oral/écrit et l'usage des ostensifs, et des diverses représentations doivent être repérées et permettre de reconstituer tout ce qui est dans le cours, ce qui fait nécessairement intervenir le déroulement.

C'est justement l'étude des différences entre manuel et cours qui fait l'objet d'une partie de nos travaux, avec la mise en évidence de ce qu'apporte l'introduction des déroulements et des proximités.

2.2. Questionner les déroulements

Les premiers indicateurs doivent permettre de repérer le découpage (associé au temps) – en termes d'épisodes (liés aux contenus travaillés) - et le rythme du cours. À chaque épisode est associée l'indication de qui parle et de ce qu'ont à faire les élèves. Puis il s'agit d'analyser précisément le rôle de l'enseignant, à travers le discours précis qu'il tient. Dans ce qui suit nous balisons ce qui peut être recherché dans ce discours.

D'une certaine manière, les contenus des cours c'est ce qui ne peut pas être élaboré (dans son ensemble) par les élèves... D'où d'ailleurs l'idée, véhiculée par les enseignants débutants, de légitimité de l'enseignant dispensant le cours, attachée à ce moment particulier. Certes, les élèves seuls, peuvent, pour certaines notions, être associés à un début de décontextualisation mais c'est très partiel. On peut aussi faire travailler avant le cours sur des exercices proposant l'utilisation, dans un contexte, de ce qui sera ensuite généralisé, sans que les élèves puissent « deviner » ce qui sera l'objet de cette généralisation, dont ils n'ont, de fait, pas besoin dans l'exercice. Cela servira d'exemple à reprendre pendant et après la décontextualisation. Mais cette dernière reste du côté de l'enseignant, vu ce qu'est la nature même du savoir. Ce qui nous intéresse alors, c'est la manière dont l'enseignant remplace les activités des élèves, compte tenu de la perte des leviers « autonomie et aide » utilisés dans les exercices.

Cela dit, la présentation des objets (définitions, théorèmes ...) dépend en partie de tout ce qui a été fait avant le cours et oriente ce qui sera fait après. Notre hypothèse est qu'interviennent dans ce qui nous intéresse non seulement les choix de ce qui figure dans le cours, le degré de généralité évoqué ci-dessus, mais aussi, à travers les commentaires et les questions auxquelles il répond - qu'elles viennent ou non des élèves, les proximités potentielles, que l'enseignant dégage, suggère, introduit pendant le cours (ou non). D'une certaine manière cela peut jouer comme un levier cognitif. Il est donc important à nos yeux de s'y attarder, de les repérer et de les analyser. Ces proximités favoriseraient, on l'a dit, la construction transitoire attendue vers la conceptualisation, que ce soit par des reprises, des applications ou des explications...

À ce titre, on peut penser que les passages contextualisés↔hors-contexte sont spécifiques des cours¹⁸ et sont des occasions particulièrement propices à développer des proximités cognitives, mettant en jeu connaissances déjà-là, presque déjà-là et visées (avec notamment les liens ancien/nouveau). Ces proximités dépendent de la visibilité de ce qui est illustré ou généralisé, et des liens précis entre contexte et hors-contexte¹⁹ à expliciter, ou à systématiser (cf. passages du déclaratif au procédural). Il se peut que l'analyse du relief indique qu'il n'y a pas de proximité à introduire (proximité impossible, voire illusoire). Il se peut qu'au contraire une proximité potentielle soit manquée ou effective²⁰. Dans le cas des proximités ascendantes, on essaie de comprendre ce qui est ajouté à l'exemple traité pour éclairer la montée en généralité. Dans le cas des proximités descendantes on traque le repérage (explicite) de ce qui est (encore) variable dans le hors-contexte et de ce qui ne l'est pas, ainsi que les remplacements et substitutions à faire dans l'expression générale (avec éventuellement des transitivités et des changements de registres ou de points de vue cachés).

De plus, des éléments explicites sur les parties hors-contexte, qui ne sont pas toujours transformables en activités immédiates, peuvent participer à maintenir les élèves dans l'activité : ils peuvent dégager la structuration de l'exposition des connaissances en cours, ou ponctuer son organisation globale, ils peuvent souligner les objectifs à atteindre pour les élèves. Même si leur apport n'est pas directement cognitif, il est sans doute utile, voire indispensable. Et, dans la mesure où il n'y a pas beaucoup d'activités d'élèves pendant ces temps-là, on peut s'attendre à ce qu'un certain nombre d'échanges enseignant-élèves jouent aussi un rôle dans le maintien de ces derniers dans l'écoute, servant également à renseigner l'enseignant sur cette écoute, ces interactions entretenant une certaine proximité entre les acteurs, peut-être pas directement cognitive, mais nécessaire.

Enfin le cours est presque le seul moment où l'enseignant peut donner des éléments liés à une vue globale de ce qui est en jeu, où il peut dégager des relations entre notions, revenir sur les démarches à l'œuvre, sur l'organisation ou même la genèse du savoir, par-delà les proximités locales évoquées, notamment par des explicitations méta (cf. note 13). Reste à savoir dans quelle mesure ce niveau d'intervention s'inscrit dans le reste, et participe à la compréhension visée des élèves. Ainsi il pourrait y avoir des proximités engagées par des questions de l'enseignant, en cours, sur des besoins théoriques (ou technologiques) supposés ou des besoins procéduraux, ou alors pas de questions et des réponses sans questions préalables, comme si l'enseignant pensait que les élèves se les posent « seuls »... On reconstitue à partir de tout ce qui précède les différentes logiques globales présentes dans le cours (épistémologique ou procédurale).

2.3. Questionner les acteurs : enseignants et élèves – un enjeu pour des recherches ultérieures

La question, difficile, se pose au didacticien : qu'est-ce que les enseignants attendent des cours, comment les élèves écoutent le cours, apprennent/retiennent le cours²¹, quel travail pensent-ils être attendu d'eux (pendant le cours, après), comment jouent les diversités entre élèves (par exemple, par quoi ils « commencent » leur travail à la maison, le cours ou les exercices) ?

Dans cet article nous n'avançons pas sur cette question, nous signalons juste comment cela peut être abordé et quelques éléments préliminaires déjà obtenus.

Les activités des élèves au fur et à mesure (écrire, répondre, appliquer, énoncer du cours (élaborer)...) sont détaillées dans ce qui précède, avec la place et les contenus des questions et des réponses : qu'est-ce qui est demandé aux élèves (rappels, actions, démonstrations, questions...), sur quoi ils sont impliqués, qu'est-ce qui est fait de leurs réponses ou questions – évaluées, mutualisées, complétées... A maxima ou a minima ? Il est entendu que ce qui est dans le cours oral (et écrit) doit être en partie retenu (mémorisé)²², mais aussi être utilisé correctement en y faisant référence, que ce soit comme objet ou comme outil puis être reconnu et adapté dans la résolution des tâches donnant lieu à leur

¹⁸ Même s'il y en a aussi dans les moments d'exercices, mais plus dispersés, et toujours initiés par le contextualisé, alors que dans les cours les passages peuvent être activés dans les deux sens.

¹⁹ En général de l'ordre des commentaires méta, plus ou moins généraux eux-aussi.

²⁰ Les proximités impossibles se repèrent plutôt à partir des contenus et les proximités manquées à partir des déroulements. Cependant on peut se demander si certaines proximités impossibles ne sont pas quand même tentées par les enseignants.

²¹ La grande majorité des élèves déclarent ne pas avoir de difficultés à retenir le cours, ni à retrouver ce qui peut leur servir.

²² On peut évoquer le contrat didactique en cours.

utilisation, avec flexibilité, et organisé avec les autres connaissances. Mais qu'en est-il, par exemple au niveau des évaluations ? Des compléments doivent être pensés.

Il est important d'étudier ce qu'en disent les professeurs (entretiens) : quelle utilisation du cours est attendue (implicite, rappelée à certains moments). Les élèves doivent-ils apprendre par cœur ou seulement savoir retrouver ce dont ils ont besoin ? Comment s'y prennent-ils ? On aura à se questionner sur ce qui pourrait leur manquer dans un cours et aussi sur la valeur ajoutée par le cours en classe.

Les premiers éléments obtenus, qui doivent être complétés, indiquent en tous cas une certaine diversité, même pour un seul enseignant, et beaucoup de questionnements. Ils sont liés à la durée consentie et à la « lassitude » redoutée des élèves, voire à l'ennui de ces moments-là au regard des moments de découverte ou de résolution d'exercices, à la difficulté pour certains élèves d'écrire. Les enseignants s'interrogent aussi sur les activités introductives à mettre en place et sur les illustrations du cours à trouver entre applications immédiates et tâches complexes.

Les élèves quant à eux témoignent aussi d'une grande diversité, comme en atteste leurs réponses à un questionnaire sur les cours déjà cité (note 4). Cependant l'identification précise des savoirs en jeu qu'ils évoquent reste floue même s'ils pensent souvent qu'en termes de mises en fonctionnement attendues du cours, ce dernier semble satisfaisant. Par exemple ils semblent n'avoir aucune idée sur ce que « choses générales » pourrait bien signifier dans leurs cours (c'est l'objet d'une question) et n'ont pas non plus de mots pour différencier définitions, théorèmes et propriétés, même si certains perçoivent qu'il y en a une. Il est significatif que les élèves interrogés identifient principalement le cours au fait que le professeur parle, ou fait prendre un cahier spécial, ou il dicte, ou annonce qu'il fait cours – le contenu spécifique n'est jamais évoqué en réponse à la question « comment savez-vous que le professeur fait cours ? ». Les exemples et exercices corrigés sont très appréciés, les activités avant le cours moins, ce qui pourrait confirmer que les élèves ont du mal à se saisir et à profiter de la démarche attendue à ce moment-là – faute de suffisamment de proximités ascendantes ? Enfin le travail des élèves porte beaucoup sur les exercices, y compris en allant en chercher dans le manuel. La question se pose donc, à approfondir, qu'est-ce que le cours pour les élèves ?

Bilan sur le questionnement adopté

Finalement le questionnement que nous adoptons est le suivant, en termes de diversités, de régularités intra et inter-individuelles, voire de manques éventuels et de palettes de contenus et de déroulements possibles, à partir d'une étude préalable du relief :

Qu'est-ce qu'il y a dans un cours donné (éléments hors contexte²³, degré de généralité et formalisme, exemples, activités préalables et exercices immédiats) ? Quelles en sont les variables significatives (alternatives) en relation avec les programmes, les types de notions, les difficultés connues des élèves ? Quels déroulements : quelles proximités sont ou non développées, quelles logiques globales sont adoptées ? Quels attendus côté enseignants et élèves ?

La dernière question, évoquée plus haut, n'est pas encore abordée directement ici : quel peut être le rôle des cours dans les apprentissages, avec quelles diversités selon les contenus et les élèves ?

3. Exemples et premiers résultats

3.1. Au collège et au début du lycée : exemples de proximités dans des cours sur fonctions

3.1.1. Les enjeux liés à l'introduction de la notion au collège – vers le lycée

Notre étude du relief sur la notion nous amène à distinguer plusieurs enjeux, que nous allons présenter et dont nous discuterons des possibilités d'introduction et des occasions de proximités potentielles.

Les aspects algébriques

²³ Définition, théorème, propriété, démonstration, éventuellement méthode, éléments sur la démarche, théorie...

Les élèves ont travaillé sur des processus de calcul (ou programmes de calcul²⁴), définis par des expressions algébriques. Chaque processus est étudié pour lui-même. Il s'agit à ce stade d'introduire un nouvel objet mathématique, qui a un nom, une notation, f , et un symbole, une flèche, avec des notations et des noms pour les valeurs en entrée et en sortie (le plus souvent x , antécédent ; $f(x)$, image). On est en présence d'un formalisme généralisateur unifiant les processus de calcul explicites déjà vus, en retenant (ce qui est commun à tous ces processus)

- la correspondance (le processus ou le programme de calcul ou la « machine »)
- toutes les valeurs d'entrées concernées, qui peuvent être résumées avec un intervalle (ou par l'expression « tous les nombres de départ »...),
- les valeurs obtenues.

On ajoute une clause d'unicité de l'image (réalisée automatiquement dans les exemples d'avant), peu justifiée. Mais cet objet n'est pas introduit pour résoudre quelque chose, dont les élèves auraient besoin, même s'il peut être associé à des formulations en français courant du style « en fonction de ». Cet objet va être associé (servir) à des descriptions. Le travail précis sur les aspects algébriques consiste beaucoup en des calculs sur des expressions, notamment les résolutions d'équations pour trouver les antécédents (le travail algébrique est alors mobilisé, comme outil intermédiaire) : il n'y a pas de vraies tâches simples et isolées car on est obligé de revenir aux connaissances antérieures, seules disponibles ou mobilisables, pour faire travailler les élèves (c'est une caractéristique des notions FUG, Bridoux 2011).

Les aspects graphiques

La première chose qu'on peut souligner est que la représentation graphique des fonctions est non congruente à l'expression algébrique : en effet elle n'est pas directement accessible sur la courbe. Le lien entre abscisse et ordonnée de tous les points de la courbe, par l'expression algébrique unique de la fonction, est « illisible » en général.

Les connaissances anciennes des élèves sont les courbes déjà étudiées depuis longtemps, mais exclusivement graphiquement. Les élèves savent placer des points de coordonnées données, lire des coordonnées (valeurs numériques particulières), repérer visuellement des variations des grandeurs en jeu sur chaque axe. Ils savent passer des abscisses numérique aux ordonnées et réciproquement. Mais c'est un travail « séparé », successif, sur les deux coordonnées. Les tâches et techniques antérieures ne nécessitent pas de prendre en compte les couples (x, y) , alors que cela devient nécessaire si on travaille sur la fonction représentée, car alors $y = f(x)$ (cf. le fait qu'une courbe est un objet de dimension 1 dans le plan).

Autrement dit les élèves interprètent déjà beaucoup de choses sur des graphiques mais en dehors de l'association à une représentation de fonction, donc sans que cette propriété serve, et l'enjeu nous semble être le transfert à f de ce qu'ils savent déjà faire sans mettre en jeu f – transfert invisible, qui ne peut pas se deviner. Par exemple l'image remplace l'ordonnée, l'antécédent remplace x ; si on se donne un intervalle de l'axe des x , cela permet d'accéder à des informations sur la portion de courbe correspondante (par exemple elle monte) et sur les ordonnées associées (leur croissance éventuelle) mais ce qui est nouveau c'est la traduction de ces dernières informations sur f (par exemple f croît). Pour travailler sur cet aspect, on doit réaliser en actes *une substitution* liée à une *transitivité* (*remplacer y par $f(x)$ et (x, y) par $(x, f(x))$)* très difficile, très éloignée de ce que les élèves savent faire.

Mais il y a une autre nouveauté, liée à ce qui est introduit dans l'aspect algébrique : si les élèves peuvent construire des points isolés, même proches, rien ne peut les aider à joindre les points, à tracer la courbe qui passerait par ces points, ni surtout à justifier ou interpréter ce tracé : sauf l'habitude de voir des courbes et l'envie de les tracer, ou sauf si c'est une droite dont ils connaissent deux points. Il leur manque (encore) l'idée de s'intéresser à tous les points (à leur ensemble), et l'idée que, sur les courbes associées à des fonctions, non seulement tous les points sont obtenus de la même façon à partir de la fonction, l'ordonnée valant « f de l'abscisse » mais encore tout point $(x, f(x))$ est sur la

²⁴ On évoque aussi des « machines » qui transforment un nombre en un autre, toujours de la même façon.

courbe (idée de réciproque, associée à celle d'ensemble)... Ils ont certes l'intuition du continu mais cela reste une intuition !

Le cas de la proportionnalité

On pourrait penser qu'il y a là une source d'activité d'introduction bien naturelle, restreinte aux droites mais ce serait déjà ça.

En classe de quatrième (14 ans), en effet, on étudie la proportionnalité et à partir d'un tableau de valeurs discrètes et numériques (souvent entières d'ailleurs), on trace, dans le plan muni d'un repère, des points que l'on joint par une droite. Ces points ont comme coordonnées les deux valeurs numériques d'une colonne du tableau. Cet alignement, ainsi que sa réciproque – si des points sont alignés avec l'origine ils représentent une situation de proportionnalité -, sont des propriétés admises. Mais ce qu'il faut souligner, c'est que les points de la droite différents de ceux qui ont servi à la tracer ne sont pas l'objet d'attention, ni d'explication ni d'interprétation (du moins dans les programmes actuels). La droite (alors objet géométrique) ne sert qu'à traduire l'alignement des points initiaux, le fait que tous les autres points de la droite ont des coordonnées proportionnelles, liées par la même relation du type $y = ax$, est souvent passé sous silence, même si on fait vérifier qu'un certain nombre d'autres couples de coordonnées proportionnelles sont sur la droite.

Une démonstration utilisant le théorème de Thalès était proposée dans certains programmes antérieurs. Le fait est qu'elle était difficile pour un certain nombre d'élèves, qui ne pouvaient la produire seuls : ce n'est donc sans doute pas un bon candidat à une activité d'introduction.

Et les logiciels ?

On pourrait objecter à ce qui précède que les élèves « disposent »²⁵ de courbes tracées par un logiciel, ou données dans un document, mais questionnent-ils la manière de les obtenir ? Quelles mathématiques là-dedans ? Qu'est-ce que la donnée de telles courbes produit chez les élèves ? Qu'est-ce qui peut être dit aux élèves ? On retrouve la question plus générale de ce qui est « embarqué » comme propriétés dans les logiciels.

De manière générale un logiciel comme Geogebra peut placer de très nombreux points de coordonnées (x, y) , avec $y = f(x)$ (commande), points suffisamment nombreux pour qu'on ait l'impression visuelle de continuité dans le cas de graphes de fonctions. On gagne ainsi le fait de s'intéresser à beaucoup de valeurs de x , avec la « bonne » relation entre x et y pour un point tracé. Les élèves peuvent déduire que si on trace beaucoup de points, cela finit par « se toucher », mais il nous semble que la dépendance systématique entre x et y de tous les points de la courbe représentative de f (et la réciproque évoquée ci-dessus) peut encore rester lointaine.

Situations d'introduction et proximités potentielles à mettre en jeu ?

Jusqu'à présent²⁶, c'est surtout l'objet fonction qui est étudié au collège – il y a peu d'exercices dont la résolution demanderait aux élèves d'introduire des fonctions pour les utiliser comme outil. Cela est lié au peu de propriétés introduites à ce niveau, il y a surtout des descriptions attachées à l'objet dans ses différents aspects – notamment les notions d'image et d'antécédent à travailler dans les différents registres, qui peuvent amener à résoudre des équations, comme déjà signalé. D'où la difficulté de créer des activités d'introduction au sens initial.

Le chapitre sur fonctions linéaires ou affines donne lieu à des tâches assez peu variées (reprises), avec cependant quelques modélisations de situations géométriques notamment, pour lesquelles l'étude des fonctions affines obtenues peut renseigner sur des variations ou des comparaisons.

Tout cela est approfondi en seconde, avec reprise des généralités complétées par une étude systématique du sens de variation, des maxima et minima et la reprise des fonctions affines, complétée pour grossir le stock des fonctions connues (carrées, inverses, homographiques). Il y a plus de

²⁵ Que ce soit par eux-mêmes ou grâce à l'enseignant

²⁶ Nous n'avons pas étudié les nouveaux programmes qui auront cours à la rentrée 2016.

problèmes où les fonctions peuvent être utilisées comme outil, d'autant que les élèves ont déjà eu une familiarisation avec la notion.

Que ce soit avant ou (plutôt) après le cours au collège, en terme de proximités potentielles, on peut penser à expliciter tout ce qui est ajouté à ce qu'on connaît déjà : le fait de s'intéresser à n'importe quel processus, de chercher les images de tous les x de départ, de représenter par des points d'un plan tous les couples $(x, f(x))$ correspondants et surtout la possibilité nouvelle que cela donne de transférer des informations visuelles non seulement sur $f(x)$ mais aussi sur f . En se basant sur un certain usage antérieur des représentations graphiques, on pourrait introduire l'idée de dépendance, ou même l'idée de variation, jusque-là réservées à un travail visuel sur des courbes. Mais la possibilité de transfert à des propriétés de x , $f(x)$, à f , ce passage du visuel (graphique) au fonctionnel est nouveau, c'est changement de point de vue difficile qui peut (doit) donc être explicité. On conçoit qu'il y a plutôt là des occasions de proximités descendantes ou horizontales qu'ascendantes.

3.1.2. Des exemples à partir de séances en classe

Nous allons illustrer quelques aspects de ce qui précède sans aucune prétention à une quelconque exhaustivité. Les exemples ne sont pas très récents, cela ne nous a pas semblé gênant dans la mesure où nous voulons illustrer non pas précisément telle ou telle pratique mais ce que nous appelons proximité et à quoi leur étude peut servir. Le premier exemple permet de montrer comment au collège, au cours d'une activité de préparation, l'enseignant gère des proximités ascendantes, comment il « accroche » son cours et des proximités descendantes et les questions que cela peut poser au chercheur. Le deuxième exemple illustre comment l'enseignant doit introduire lui-même certaines caractéristiques des graphiques associés à des fonctions et comment il gère les proximités correspondantes. Le troisième exemple montre des proximités horizontales, dont nous pensons qu'elles sont finalement très répandues notamment dans les cours dialoguées, avec là encore les questions que cela peut poser.

Activités de préparation, cours et proximités sur l'introduction des fonctions

Il s'agit d'une classe de troisième d'un enseignant de collège, au début de l'installation des programmes en vigueur jusqu'en 2015. Les séances (qui ont eu lieu en mars) ont été filmées et la plupart des moments analysés transcrits.

L'enseignant introduit d'abord les fonctions comme processus de calcul, à partir d'un certain nombre de brèves activités de préparation donnant aux élèves comme tâche de deviner l'expression algébrique du processus, à partir de l'image, donnée par l'enseignant qui connaît le processus cherché, de nombres donnés par les élèves. Par exemple, si le processus est $(x \rightarrow 2x + 3)$, le troisième utilisé, les élèves proposent 1, 2, 5, etc... et l'enseignant répond 5, 7, 13... Des élèves trouvent en général, sans d'ailleurs demander l'image de 0 par exemple, et en se limitant à des entiers positifs. Puis l'enseignant installe la définition d'une fonction comme programme ou processus de calcul. Il propose la définition suivante, précédée des commentaires généraux que nous indiquons. Ce que dit l'enseignant est indiqué en italique. La partie soulignée est ce qui est écrit au tableau en même temps. « ... *On écrit un programme de calcul sous la forme d'une fonction. C'est une écriture particulière d'un programme de calcul.*

On retrouve ce que nous indiquons dans les éléments de relief ci-dessus : il n'y a pas besoin de la notion, c'est juste une nouvelle manière de parler (d'écrire)... Les activités de préparation ont servi à réactualiser la notion de programme et l'enseignant prend explicitement à sa charge l'introduction du mot et du formalisme dont on ne voit pas ce qu'il ajoute. Toutefois, sans doute gêné par ce manque de besoin de la notion, il ajoute une généralité pour justifier quand même :

Les programmes de calcul ça peut servir à beaucoup de choses notamment après à faire des représentations graphiques et ça vous permet de faire des calculs. Alors en 3° on ne va pas aller très loin dans les calculs et on va pas aller très loin dans le type de fonctions. Les fonctions c'est très utilisé en économie par exemple, dans plein de domaines.

L'enseignant reprend en le généralisant à n'importe quel programme, non précisé, ce qui a été fait sur des processus particuliers. Il explicite ce qu'il dit, à la fois en indiquant que c'est général et que c'est une traduction en langage mathématique, essentiellement une notation en fait. On peut évoquer une proximité descendante, sous forme de commentaire méta.

Au départ j'ai un nombre à l'arrivée j'en ai un nombre. Là on voit des généralités c'est-à-dire des bases²⁷. Bon donc I Définition- Vocabulaire. Tout ce qu'on a dit là en français on va l'écrire maintenant sous forme mathématique donc ça va être toujours le problème de traduire la langue par les notations mathématiques. C'est la partie presque plus difficile.

Donc définition. On appelle fonction numérique on appelle fonction numérique f notée f une fonction numérique c'est un processus de calcul c'est la machine, donc on appelle fonction numérique f un processus de calcul processus de calcul qui qu'est-ce qu'il fait ce processus de calcul qui prend un nombre x à un nombre x qui associe un unique nombre. Alors pour être précis je devrais dire au plus un nombre mais pour l'instant je dis un unique nombre. J'ai un nombre en entrée, à la sortie j'en ai un seul, je pourrais ne pas en avoir donc c'est un processus de calcul qui à un nombre x associe c'est ce qui sort de la machine un unique nombre noté ce nombre on le note f parenthèse x ($f(x)$ parenthèse et ça se lit se lit, cette notation ça se lit (f de x).

On voit que la généralité ne porte d'abord que sur le fait de mettre tous les programmes de calcul « dans le même sac » (celui des fonctions), avec le mot « un » (remplaçant le mot quelconque), et de donner une nouvelle notation et un nouveau nom à cette chose générale. Tout de suite après l'enseignant associe à ce programme de calcul non précisé ce qu'on sait sur les exemples déjà vus, ce qui est commun à tous même si ce n'est pas exprimé ainsi, en rappelant l'association à un nombre (là encore le « un » remplace le quelconque) un autre nombre. Il ajoute cependant que ce nouveau nombre, à la sortie du processus, doit être unique, ce qui n'était pas précisé les années précédentes (car vérifié automatiquement). Mais l'enseignant introduit d'abord assez subrepticement une autre généralisation, à savoir qu'on peut ne pas connaître explicitement le programme, ce qui est nouveau, et reprend les notations précédentes en les étendant à ce nouveau niveau de généralité. Mais immédiatement il insiste sur ce qui est généralisé, à savoir l'expression du processus, explicite jusqu'ici. On peut là encore évoquer une véritable proximité descendante.

Vous avez souvent énormément de mal avec ça. Le nombre d'arrivée parce que je ne sais pas exactement, en général, je ne sais pas ce que fait la machine. Là j'ai écrit une définition générale. Je ne sais pas exactement quelles sont les opérations de la machine. Quand je ne connais pas les opérations c'est-à-dire quand moi je ne peux pas vous dire ce qui va sortir, le nombre d'arrivée il faut bien que je le note. J'aurais pu l'appeler y , j'aurais pu l'appeler z . On le note f pourquoi on le note f , f ben c'est le nom de la machine et puis l'arrivée le nombre d'arrivée il est bien fonction de x .

Voilà la première contextualisation qu'il donne de la définition.

Rappelez-vous tout à l'heure $2x + 3$ c'était une expression qui dépendait du nombre de départ. Donc le f c'est juste pour nommer la machine et le x parce que je suis en relation avec ce que j'avais au départ. C'est juste une notation. D'accord ?

Suit une digression sur l'unicité de l'image et la non unicité de l'antécédent que nous ne reproduisons pas. Dans cette application directe du cours qui précède, c'est par des reprises presque mot à mot de ce qui vient d'être fait en cours que l'enseignant installe la proximité descendante, en interrogeant les élèves cette fois :

Donc fonction numérique d'une variable, j'aurais pu préciser d'une variable, je ne l'ai pas fait donc au départ je prends un nombre x et j'associe un unique nombre que je note $f(x)$. D'accord ? Tout

²⁷ Nous retrouvons dans la bouche de l'enseignant ce que nous avons trouvé dans des questionnaires d'élèves : l'assimilation de généralités et bases...

cela on le remplace par cette notation $f : f$ c'est le nom de la machine x c'est le nombre de départ, qu'est ce qui se passe dans la machine et à l'arrivée j'ai quoi ?

E : le résultat.

P : et le résultat comment on l'a noté

E : $f(x)$

P : f de x . Très bien. Donc on a un résultat qui dépend du nombre de départ. Cette notation c'est quand je ne sais pas les opérations que je fais au milieu, sinon j'aurais écrit $2x + 3$ mais évidemment c'est un cas particulier $2x + 3$.

Ici le cas particulier est bien signalé explicitement, en regard du général qu'il illustre.

Terminons par l'installation de la suite du vocabulaire associé à ce nouveau formalisme. Là encore l'enseignant accompagne le cours par des proximités descendantes sur ce qui est variable, et ce qui est donc invariant (sans le mot) et sur la nature de ce qui est en jeu entre nombres et fonctions, en rappelant les cas particuliers explicites travaillés avant.

Bon vocabulaire toujours ... fonction $f(x)$ s'appelle image de x nombre d'arrivée par f donc je précise toujours le nom du processus. Le processus il peut s'appeler h , il peut s'appeler g . Les processus c'est souvent c'est généralement des lettres minuscules. $f(x)$ c'est l'image de x par la fonction f et x c'est quoi ? C'est l'antécédent. C'est l'antécédent de qui ? très bien c'est l'antécédent de $f(x)$ par f . Là je parle de nombres quand je quand j'écris $f(x)$ c'est un nombre hein; Ça peut être 3, ça peut être 4, ça peut être 7. Rappelez-vous ce qu'on a fait ce matin, x est l'antécédent de $f(x)$ par f .

Qu'est-ce qui peut résonner avec des connaissances déjà-là des élèves, qu'est-ce qui peut (pourra) se constituer en connaissances proches de la définition, voire en connaissance de la définition ? L'enseignant développe des proximités sous forme de commentaires de plusieurs niveaux, très généraux, ou au contraire très liés aux exemples des activités de préparation, mis en regard des définitions générales. Une interrogation reste néanmoins sur le manque de besoin de la notion, le « à quoi ça sert » si prisé des élèves, auquel l'enseignant ne peut apporter, du fait des programmes, qu'une réponse vague.

Représentations graphiques

C'est la suite du cours précédent.

Il y a trois activités successives avant le cours pour préparer la définition des représentations graphiques des fonctions. Nous allons les résumer en indiquant à chaque fois les proximités qui nous semblent activées et ce qui peut rester éloigné.

La première activité consiste à deviner que des couples de nombres proposés sont associés à la fonction $x \rightarrow 2x$.

Puis les élèves complètent avec quelques autres valeurs le tableau formé par les nombres et leurs images (en colonne). Ils identifient une situation de proportionnalité (déjà vue en quatrième) que l'enseignant demande de représenter dans un repère. Le fait que les points (il y en a donc beaucoup plus que deux) sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère est rappelé. La droite est tracée. Rien n'est dit à ce moment de la séance sur les points intermédiaires. Il n'y a rien de nouveau, ce sont des révisions (sans doute avec des différences entre élèves). On peut remarquer l'association explicite d'un couple de nombres (a, b) en colonne sur le tableau aux coordonnées (a, b) d'un point. Il n'y a pas de fonction dans l'affaire sauf dans deux allusions de l'enseignant. Il cite au début la fonction $x \rightarrow 2x$ et, après le tracé, la représentation graphique de la situation donc de la fonction. En

réponse à une question d'élève il annonce une généralisation de la représentation graphique à d'autres fonctions comme $(x \rightarrow 2x + 3)$. L'enjeu ultime des représentations graphiques, à savoir l'interprétation des coordonnées de tout point d'une courbe représentative de f comme $(x, f(x))$ n'est pas encore préparé.

Dans la deuxième activité, il s'agit de deviner que des couples de nombres proposés sont associés cette fois à la fonction qui à un nombre fait correspondre son carré. L'enseignant demande ensuite de compléter un tableau de valeurs de ce qui sera la fonction $x \rightarrow x^2$ puis de placer les points dont les coordonnées sont les colonnes du tableau dans un repère. Il demande aux élèves de s'arrêter au tracé de ces seuls points. L'enseignant continue lui-même, en traçant grâce à un logiciel « tous » les points de coordonnées (nombre de départ x , nombre d'arrivée x^2). Il parle de courbe – qui n'est pas une droite (reprenant ce que dit un élève), il évoque l'ensemble des points de la courbe, mais sans insister du tout sur le mot ensemble. Les points initiaux des élèves sont placés et on constate qu'ils sont sur la courbe obtenue. Là, l'enseignant insiste sur la construction de la courbe par le logiciel grâce au placement de très nombreux points de coordonnées (x, x^2) . La question se pose peut être encore pour les élèves entre la construction de la courbe à partir de points nombreux et son interprétation : ce n'est pas parce que la courbe est obtenue à partir de points (x, x^2) que les coordonnées de tous ses points vérifient la même relation. Même si l'enseignant affiche les coordonnées d'un point au hasard, et indique que l'ordonnée est le carré de l'abscisse, l'explicitation de ce que veut dire « ensemble » n'est pas possible. On vérifie ce que nous signalions dans le relief. Autant généraliser une construction de courbe point par point en remplaçant y par $f(x)$ peut sembler à la portée des élèves, autant, à l'envers, interpréter les coordonnées de n'importe quel point de la courbe comme $(x, f(x))$ met en jeu quelque chose de nouveau qui n'est plus proche du tout de ce qu'ont déjà fait les élèves. Tout se passe comme s'il manquait un « réciproquement ». L'utilisation du mot ensemble justifie ce que dit l'enseignant sans avoir vraisemblablement de signification pour les élèves.

La troisième activité reprend la même chose pour la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$. Les élèves complètent un tableau de valeurs numériques puis pour le représenter autrement, les élèves placent les points dans un repère. L'enseignant demande s'il est légitime de les joindre, comme certains élèves l'ont fait cette fois-ci. Il laisse la réponse en suspens. Ensuite il trace devant les élèves la courbe sur ordinateur en commandant à ce dernier de placer les points (abscisse x , ordonnée \sqrt{x}). Il fait varier l'abscisse, x , déclarée comme variable, et redit que l'ordonnée du point correspondant de la courbe est \sqrt{x} . La courbe s'affiche. L'enseignant choisit un point de la courbe et l'ordinateur affiche les coordonnées numériques. L'enseignant demande la signification des deux nombres ainsi affichés. Pas de réponses jusqu'à ce qu'un élève reprenne le (x, \sqrt{x}) . On constate à nouveau à la fois l'appui sur les constructions précédentes et la difficulté d'interpréter la courbe ce qui est éloigné de ce que les élèves ont déjà pu faire. Enfin l'enseignant donne la définition : une représentation graphique est un ensemble de points, l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, – il précise qu'une droite est une courbe... Il demande enfin de tracer une courbe non représentation graphique d'une fonction.

On peut se demander quelles proximités avec tous les élèves sont engagées. Peut-on parler de proximité ascendante ? L'enseignant s'appuie sur une interprétation des coordonnées mais il n'explique pas pourquoi on choisit justement ces coordonnées pour chaque point ; les élèves peuvent encore moins le deviner seuls.

De plus l'enseignant insiste sur le fait que x prend toutes les valeurs, que tous les points sont concernés (comme s'ils se touchaient, qu'ils avaient une épaisseur) mais il ne dit rien sur le fait que tout point de la courbe a comme ordonnée $f(x)$. Il n'évoque pas non plus ce qu'on connaît de plus sur la fonction grâce à cette représentation, il dit seulement que c'est une autre façon de l'aborder.

Comme d'habitude, en dire trop aux élèves peut aussi bien les noyer que n'en dire pas assez. Il s'agit d'adapter à chaque classe les informations qu'on juge adéquates.

Un exemple de proximités horizontales en classe de seconde

Il s'agit, dans cette partie de séance en classe de seconde, de réintroduire les fonctions affines. L'enseignante écrit au tableau les définitions en ajoutant des commentaires oraux et en questionnant les élèves sur le détail de ce qui est travaillé. On constate dans ce cours beaucoup de petites « questions-réponses » professeur/élèves, qui permettent d'animer le cours, en associant les élèves – qui répondent effectivement (d'où l'idée de proximité). Cependant les élèves ne demandent pas tous la parole. Les questions, dont souvent la réponse ne demande que quelques mots, portent sur un petit calcul formel ou du vocabulaire ancien, mais toujours hors contexte, et placent ainsi les élèves au même niveau de généralité que ce qui est travaillé par l'enseignant. Cela peut permettre de vérifier que les élèves suivent ce qui est développé, ou de les réveiller, mais de manière « interne », locale, isolée, voire limitée, c'est toujours validé et repris, mais sans aucune référence aux exemples.

Dans les extraits de transcriptions qui suivent, nous mettons en italique ce qui est transcrit, nous ajoutons entre parenthèses en gras nos commentaires et notre interprétation éventuelle en termes de proximités horizontales de ces interventions.

Donc maintenant nos fonctions on va les définir par leurs expressions algébriques.

a et b deux réels donnés, la fonction affine est la fonction définie par, donc c'est « à x associe » donc c'est l'image de x par f donc $f(x) = ax + b$.

(Explicitation) *Donc mon, ma variable x va être multipliée par le réel a et on va lui ajouter le réel b. Alors il y a deux cas particuliers que vous avez sûrement vus les années précédentes, l'année précédente, le cas où le réel a vaut 0, ça fait 0 fois ma variable, (question de calcul sur une formule générale) ça fait toujours.... (reprise de la question) Quand on multiplie par 0*

E : 0

P : Ça fait toujours 0 (validation et reprise du résultat demandé) et il va me rester donc (suite de la question)

E : b

P : b donc $f(x) = b$ (validation reprise et nouvelle question, de vocabulaire ancien) comment ça s'appelle ? Une fonction ? C'est une fonction affine mais c'est une fonction affine particulière

E : Pas linéaire

P : effectivement pas linéaire oui

E : je crois qu'elle est parallèle à l'axe des

P : à l'axe des (nouvelle question de vocabulaire ancien)

E : des abscisses

P : des abscisses (validation et reprise). Vous savez Sa courbe représentative est parallèle à l'axe des abscisses. On dit que la fonction est (reprise de la question de vocabulaire). C'est une fonction qui pour toute valeur de x donne toujours b (explicitation méta, avec le mot « toujours »). On appelle ça une fonction (reprise de la question de vocabulaire ancien)

E : Constante.

P : constante (validation et reprise) maintenant si b vaut 0 on dit que f est (nouvelle question, non précisée)

E : linéaire

P : Oui. Voilà ça c'est ma fonction linéaire (en écho à un dire d'élève). Elle passe par rien du tout ma fonction par contre sa courbe représentative va passer par (nouvelle question sur les représentations graphiques des fonctions linéaires – ancien)

E : ...

P : par l'origine du repère (validation et reprise). Donc ça voyez c'est deux cas particuliers du cas affine. Alors maintenant notre plan d'étude pour la fonction. On a dit, quand on a une fonction on a son expression. On pose toujours en premier la question. Quelle est la première question (nouvelle question liée à la démarche générale en cours d'acquisition à savoir) ?

E : ensemble de définition....

On constate que ces proximités horizontales consistent soit en petites questions de vocabulaire ou de calculs, soit en reprises et validations, au même niveau de généralité que l'exposé qui est présenté avec de temps en temps une explicitation méta. Il y a là des procédés qui nous semblent assez généraux, avec une interrogation sur leurs effets éventuels sur tous les élèves : par exemple au cas où certains élèves ne se sentiraient pas sollicités ou n'auraient pas le temps de répondre, même si l'enseignant est vigilant (interroge beaucoup d'élèves). De plus ces proximités ont un caractère très local, et on peut s'interroger sur leur portée cognitive, même si on voit bien que cela permet de conserver l'attention des élèves, ce qui est vraisemblablement une condition nécessaire à leur apprentissage !

3.1.3. Un bilan

Ce qui précède nous semble confirmer que ce qui peut être dans le cours est très conditionné par les contenus mathématiques visés et que l'étude préalable du relief aide le chercheur à repérer les occasions de proximité et à questionner les déroulements correspondants.

Notre étude du relief de la notion de fonction au collège nous avait amené à pointer la difficulté d'introduire les courbes représentatives des fonctions à partir des connaissances déjà-là sur les graphiques, pour amener les élèves à transférer sur les fonctions les propriétés connues des graphiques. Nous avons constaté qu'il est difficile pour l'enseignant cité d'établir la proximité graphes/représentations graphiques, de rapprocher des connaissances anciennes des élèves le fait que les courbes sont l'ensemble des points $(x, f(x))$ – nous sommes peut-être en présence d'une proximité relativement « impossible » d'où la difficulté de l'enseignant, d'autant que les élèves attendent cette démarche de rapprochement.

En revanche cette habitude des élèves et l'essence même du métier de professeur favorisent sans doute le fait que les enseignants créent ou s'emparent de toutes les occasions de proximités ascendantes, descendantes ou horizontales. Les questions précises que nous nous sommes posées dans les exemples relèvent finalement de la portée (et des limites) de ces proximités pour les élèves. Que ce soit dans des activités d'introduction, de préparation ou d'application, dans quelle mesure y a-t-il toujours possibilité de rapprochement ? Dans quelle mesure peut-on faire apparaître, au cours du rapprochement, ce qui est généralisé ? Dans quelle mesure, quand on part du cours, peut-on faire apparaître ce qui doit être contextualisé ? Des analyses complémentaires s'avèrent nécessaires. L'intérêt d'une analyse précise des connaissances en jeu, actuelles et visées, pour élaborer (ou non), expliciter (ou non) des proximités est ainsi renforcée. On peut y voir un certain parallèle avec les analyses de tâches concernant les exercices.

3.2. Exemples en première année d'université (cursus scientifique)

3.2.1. Contexte du travail

Le cours en amphitheâtre engendre probablement encore moins d'interactions entre l'enseignant et les étudiants qu'il n'y en a au lycée ou au collège, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont en général présents au cours. Au niveau universitaire, les étudiants peuvent également avoir

accès à de nombreuses ressources qui leur donnent directement accès au texte du savoir, comme des livres, des photocopies, des vidéos de cours en ligne... La présence au cours magistral n'étant, de plus, pas obligatoire, il nous a semblé pertinent de nous intéresser à ce que les étudiants peuvent retirer de ce type de cours. Nous mettons ici en regard le cours d'un manuel, un cours en amphi filmé, et une vidéo de type FAD (formation à distance). Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. Cette diversité est selon nous un moyen de mieux mettre en évidence les spécificités propres au cours magistral.

Nous nous sommes centrés sur la notion de limite (suite et fonction) qui est une notion clé de l'enseignement de l'Analyse à l'université. Elle est en effet introduite en L1 dans de nombreux pays et son enseignement est source de difficultés récurrentes chez les étudiants en première année universitaire (par exemple, Bridoux (2015), Robert (1982) Przenioslo (2005)). Dans la suite et sauf mention contraire, quand nous parlerons de la notion de « limite » de suite ou de fonction, cela signifiera la « notion mathématisée formelle quantifiée de limite ». Nous donnons en annexe 1 quelques éléments de relief qui nous permettent de dégager, *a priori*, des occasions de développer des proximités dans les cours.

3.2.2. Nature des analyses réalisées et méthodologie

Compte tenu des spécificités de la notion de limite (annexe 1), nous avons fait l'hypothèse que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de l'introduction de la notion, notamment pour amener les étudiants à lui donner du sens, c'est-à-dire en comprenant ce qu'elle traduit et ce dont il y a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'appropriation du nouveau formalisme que la définition contient.

Nous nous sommes donc demandé ce qui était explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances approximatives du plus grand nombre possible d'étudiants? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation? Illustre-t-il la définition avec un dessin? Ces premières questions sont selon nous l'occasion de dégager des premiers exemples de proximités (plutôt horizontales) dans le discours de l'enseignant. Nous nous restreignons ici à l'émergence de la définition dans le cours mais pour avoir une vue globale du scénario choisi par l'enseignant, les premiers exemples proposés par l'enseignant, puis les premiers résultats et leurs démonstrations ont eux aussi été étudiés (Bridoux et al. (2015)).

Pour étudier les occasions de créer des proximités avec les connaissances des étudiants, nous étudions, pour chaque média, la présence de reformulations de la définition, la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et la prise en compte de la structure globale de la définition, en nous demandant en particulier quels sont les implicites entre écrit et oral dans ce qui est fait : qu'est-ce qui est écrit et pas dit, qu'est-ce qui est dit et pas écrit?

3.2.3 Étude de manuels et occasions de proximités

Ce qui est recherché

Pour mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe, il nous a semblé pertinent d'étudier un média, ici le manuel, où le professeur est absent. Dans cette situation, le savoir n'est pas présenté oralement et il n'y a pas non plus d'échanges verbaux comme dans une classe entre l'enseignant et les élèves. Le lecteur est seul face au livre. Dans ce cas, se pose donc la question de la transformation des « connexions » réalisées entre le lecteur et le texte du savoir en connaissances. Et quelles sont, *a priori*, les occasions de tisser des liens entre l'ancien et le nouveau? En ce sens, nous pensons pouvoir dégager de la lecture du manuel des occasions de proximités qui pourraient se créer avec le lecteur. Ces proximités, que nous qualifions de « potentielles », pourraient être développées par l'enseignant, c'est un élément à étudier. Par exemple, lorsqu'une définition est donnée dans un manuel et qu'elle est ensuite illustrée sur un exemple, il pourrait y avoir une occasion

de voir émerger une proximité descendante dans le discours de l'enseignant : par l'explicitation de ce qui est contextualisé dans la définition générale.

Nous regardons ici le manuel *Mathématiques Tout-en-Un* (Dunod, 2007). Ce manuel couvre le programme de mathématiques de la première année des classes préparatoires économiques et commerciales et concerne principalement la filière scientifique. La partie « Analyse » du manuel commence par l'étude des suites et des nombres réels (chapitre 15) puis vient celle de la notion de limite d'une fonction (chapitre 16). La progression suivie dans le chapitre 15 est la suivante : définition de la notion de suite, étude de certains comportements globaux des suites (monotonie, suite majorée/minorée/bornée), définition de la convergence d'une suite et unicité de la limite (avec démonstration). Quelques exemples sont alors donnés. Viennent ensuite les premiers résultats de convergence, comme par exemple la convergence de deux suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes, le lien entre la convergence des suites (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et le fait que toute suite convergente est bornée (la question de la réciproque de cette propriété n'est pas évoquée). Les limites infinies sont ensuite étudiées, puis les opérations sur les limites.

La définition de convergence

La section qui traite des suites convergentes démarre par la définition suivante et fixe ensuite les notations (p.322):

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

On note $l = \lim u$ ou $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

La caractérisation choisie pour définir la notion de convergence vers un réel n'utilise que des symboles mathématiques. Elle n'est accompagnée d'aucun commentaire explicatif, n'est pas illustrée par un dessin. Telle qu'elle est présentée, il nous semble difficile d'établir ici un rapprochement avec les connaissances « déjà-là » d'un étudiant de L1 qui tenterait de s'appropriier seul la notion en lisant ce manuel. Celui-ci aurait en effet complètement à sa charge de donner du sens au formalisme utilisé dans la définition.

Deux remarques suivent la définition dans le manuel. La première consiste à reformuler la définition précédente en termes d'intervalles (comme le préconisent les programmes du lycée) :

La définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ou encore tous les termes de la suite sauf un nombre fini, sont dans l'intervalle $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$.

Dans cette nouvelle formulation, seul le quantificateur universel sur ε apparaît explicitement avec des mots (et non plus en utilisant le symbole mathématique du « pour tout »). Cette reformulation est une occasion de donner un certain sens à la définition précédente. Cependant, aucune explication n'est donnée sur le passage des symboles présents dans la définition aux expressions utilisées ici, comme « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang », ni sur le passage de l'inégalité à la notion d'intervalle. De nouveau, il n'y a ici aucune trace d'une tentative de connexion avec les connaissances du lecteur, c'est à lui de puiser dans ses connaissances ce qui permet de passer d'une caractérisation à une autre.

La deuxième remarque concerne le fait que la caractérisation en termes d'intervalles est aussi vérifiée pour des intervalles ouverts, avec une tentative de justification :

Comme tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle de la forme $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, la propriété est vérifiée pour tout intervalle ouvert contenant l : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si, pour tout intervalle ouvert I contenant l , tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans I .

Remarquons que la justification ne porte que sur la transformation des intervalles, la question de savoir si le même entier n_0 convient selon qu'on travaille avec un intervalle ouvert ou un intervalle fermé n'est pas abordée. Elle est de nouveau laissée à la charge du lecteur.

Trois exemples d'utilisation de la définition sont ensuite traités pour montrer qu'une suite donnée converge vers un réel l ou est divergente (p.323): « une suite u constante converge vers u_0 », « la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 » et « la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente ». C'est donc en tant qu'objet que la définition est ici utilisée. Nous étudions ici le second exemple. Les deux autres sont étudiés dans Bridoux et al. (2015).

Nous découpons la présentation du livre :

En effet, soient $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Cette première ligne soulève selon nous une ambiguïté. En effet, l'expression « soi(en)t » fait classiquement référence à la présence d'un (de) quantificateur(s) universel(s) dans la proposition quantifiée que l'on doit montrer. Or, dans la définition de convergence, c'est un quantificateur existentiel qui précède l'entier n_0 . Le fait de considérer un entier quelconque parmi tous ceux qui sont supérieurs à $\frac{1}{\varepsilon}$ ne met donc pas en évidence la quantification existentielle portant sur cet entier dans la définition puisque cet entier n'est pas explicitement donné. On se contente d'affirmer (implicitement) la possibilité d'en construire un qui satisfait l'inégalité donnée. Cela tient peut-être au fait que pour définir facilement un tel entier positif, il faudrait utiliser la partie entière d'un réel. Or, cette notion n'est définie que plus tard, dans la section sur les nombres réels. Nous y revenons juste après.

On a alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon$.

Tout d'abord, remarquons que l'expression « pour tout entier $n \geq n_0$ » ne respecte pas la structure logique choisie dans la définition dans laquelle il y a une implication liant les indices n et n_0 . Ensuite, les inégalités ne sont pas justifiées, de nouveau c'est au lecteur de le faire lui-même. Comme dans l'exemple précédent, on ne revient pas sur ce qu'on a finalement montré.

Nous trouvons enfin une remarque en lien avec la construction de l'indice n_0 (qui renforce ce qui précède) :

L'existence, pour tout réel x d'un entier $n \geq x$, utilisée constamment ici, sera justifiée dans la section 6 sur la partie entière.

Telle qu'elle est proposée, la rédaction de cet exemple ne montre pas une utilisation de la définition qui met en évidence sa syntaxe logique. Il nous semble de plus que la rédaction proposée ici pourrait ne pas être acceptée par tous les enseignants universitaires s'il s'agissait de la production écrite d'un étudiant de L1, puisque l'entier n_0 n'est pas explicitement donné et que les inégalités ne sont pas justifiées.

Bilan

Revenons sur nos résultats en termes de proximités potentielles, qui pourraient s'introduire dans les déroulements.

Dans ce manuel, la notion de convergence d'une suite numérique est présentée sans motivation, la nécessité de la nouvelle définition n'apparaît pas. Dans un cours magistral, l'enseignant pourrait commenter, même brièvement, l'introduction d'une nouvelle notion, même si la motivation est justifiée seulement ici par l'évocation du savoir mathématique. Il arrive aussi qu'une nouvelle définition émerge du travail fait dans une démonstration, du besoin d'un lien entre deux arguments,... donnant lieu à reprise généralisée (et à commentaires sur la généralisation).

En anticipant sur ce qui va suivre, on peut déjà se dire que dans un amphi, en cours magistral, l'enseignant qui introduirait cette définition l'exprimerait sans doute à voix haute tout en l'écrivant. L'étudiant aurait alors au moins l'occasion d'entendre comment le professeur prononce cette phrase mathématique uniquement constituée de symboles. Nous avons également pu visionner des vidéos (cf. section suivante) où l'enseignant commente la définition en mettant en évidence l'ordre des quantificateurs par exemple, ou en la reformulant (souvent ces commentaires sont dits et pas écrits), développant ainsi une proximité horizontale. Dans un cours effectif, le passage de la définition à la caractérisation en termes d'intervalles pourrait aussi être accompagné de commentaires explicatifs de l'enseignant, notamment de rappels sur la manipulation d'inégalités avec valeur absolue, voire d'un dessin²⁸ pour les illustrer et serait ainsi l'occasion d'une proximité horizontale. Ainsi, ce moment de première rencontre avec la définition formelle de convergence offre sans doute des occasions de proximités horizontales à travers les reformulations qui sont présentées, les symboles utilisés et les notations introduites mais le manuel ne donne aucun commentaire explicatif sur ces différents passages.

La progression choisie par le manuel est de donner la définition puis de l'illustrer sur des exemples, offrant ainsi une occasion de proximité descendante. Cependant, cette occasion est selon nous manquée ici puisque rien n'est dit sur l'utilisation de la définition, ni sur la prise en compte de sa syntaxe logique dans les exemples traités. De plus, toutes les justifications sollicitant des connaissances anciennes sur les inégalités et sur l'ordre des réels sont laissées à la charge du lecteur. Dans un cours, l'enseignant peut signaler qu'il ne justifie pas tout, que certaines choses doivent être complétées dans les notes prises par les étudiants, faisant peut-être ainsi aussi allusion au travail personnel attendu de l'étudiant. Sur un plan plus transversal, le manuel ne montre finalement pas le niveau de rigueur attendu, même si nous pouvons comprendre que ce n'est sans doute pas son rôle.

Dans un cours, l'enseignant pourrait revenir sur l'organisation du raisonnement pour montrer que la définition est satisfaite dans cet exemple, insister sur le vocabulaire à utiliser (par exemple le quantificateur universel donne lieu au mot « soit ») ou encore donner des commentaires explicatifs sur la manière de trouver un entier n_0 qui convient et pourquoi il dépend de ε . Le passage de la définition à l'exemple serait ainsi une occasion de développer une proximité descendante.

Dans un cours, l'enseignant peut rappeler aussi plus volontiers les connaissances anciennes, ne fut-ce qu'oralement, ce qui n'est pas du tout fait dans le manuel... En ce sens, il y a donc potentiellement dans le cours magistral plus de « mouvement », de dynamiques entre connaissances mathématiques, cadres, registres, points de vue, de possibilités d'adaptation à un public particulier, que dans la lecture (probablement passive chez un certain nombre d'étudiants de L1) d'un manuel. De manière générale, la démarche globale n'est pas justifiée dans le manuel, on avance dans les contenus sans retour en arrière et sans projection vers où on va, il n'y a aucun élément d'heuristique ni sur le sens ni sur le formalisme.

Ainsi, le manuel ne développe pas de discours sur les contenus, qui serait le seul support de proximités, dans le cas qui nous occupe (cours sur une notion FUG). D'une certaine manière, dans un manuel, la construction du sens est alors complètement laissée à la charge du lecteur. Dit autrement, dans un manuel, un tel savoir reste exclusivement « objet » puisqu'on n'a pas de commentaire sur « à quoi il sert » et comment, même s'il est utilisé ; tous les liens sont à construire par le lecteur (dont le

²⁸ Robert (1983) a élaboré une séquence didactique visant à introduire la définition de convergence à partir d'un travail sur la représentation graphique de certaines suites. Une première représentation de la notion en terme de bande autour de la limite dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang peut émerger de ce travail avec l'aide l'enseignant.

manuel ne préjuge pas les connaissances déjà-là). Une hypothèse (que nous allons pouvoir en partie tester) serait peut-être qu'en cours magistral, l'enseignant peut mettre davantage en valeur la pertinence du formalisme (symboles et mots), y compris avec des formulations intermédiaires, transitoires (et des proximités horizontales) ainsi que les connaissances en logique embarquées (structure des propriétés, attention donnée aux quantificateurs, fil conducteur d'un raisonnement). En cours magistral, l'enseignant peut aussi apporter une certaine cohérence au savoir, ancien et/ou nouveau. L'enseignant enfin peut, par ses commentaires, anticiper sur la dimension outil et la préciser, en donnant même des méthodes. En ce sens, et tout particulièrement pour l'enseignement d'une notion FUG, pour laquelle il n'y a pas de proximités ascendantes évidentes, un cours oral animerait davantage le texte du savoir. C'est ce qu'il s'agit de commencer à vérifier maintenant. Reste aussi à étudier la portée et les limites de ces ajouts – dans quelle mesure, à quelles conditions tous les étudiants y gagnent ? Cela rejoint les interrogations déjà posées ci-dessus, qui demandent de poursuivre l'étude si on veut commencer à s'y attaquer.

Bien entendu, cette première étude se limite actuellement à l'analyse d'un manuel et doit être complétée par l'analyse d'autres manuels pour voir dans quelle mesure les constats faits ici se confirment ou non. Reste aussi que nous n'avons aucun élément sur ce que retirerait effectivement un étudiant d'une lecture autonome d'un manuel. Rien ne dit que certaines proximités avec ses connaissances ne pourraient effectivement pas se développer (par exemple s'il s'agit d'un très bon étudiant) et mener à la construction de certaines connaissances. Cet aspect pourrait être approché en réalisant des interviews d'étudiants à qui on aurait fait lire le chapitre étudié ici.

3.2.4. Des exemples de proximités dans le cours magistral

Ce qui est recherché

Pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1 sur la limite de fonction²⁹. Notre objectif est toujours de mettre en valeur les occasions qu'il a de créer des proximités avec les connaissances des étudiants. Pour ce faire, nous procédons à une analyse au niveau global et étudions le déroulement de ce cours en tentant d'y repérer des liens explicites entre ancien et nouveau pilotés par l'enseignant ; en particulier, nous nous intéressons à la présence de reformulations de la définition, à la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et de la structure logique (globale ou locale) de la définition de limite. Plus finement, nous prenons en compte le fait que dans un cours magistral le texte du savoir est accompagné du discours oral de l'enseignant, de ses gestes et d'interactions éventuelles avec certains étudiants³⁰ qui peuvent lui permettre de donner une certaine cohérence au savoir et de tisser des liens.

Nous analysons donc ce qui dans l'activité discursive de l'enseignant (orale et écrite) peut être vu comme un rapprochement potentiel (conscient ou pas) avec les connaissances des étudiants. La nature FUG de la notion de limite de fonction amène à poser qu'il n'y a pas d'activités préalables qui permettraient aux étudiants d'élaborer quelque chose se rapprochant de la définition visée et que, de ce fait, les seules occasions de proximités sont horizontales ou descendantes. Cela nous amène à prendre en compte tout ce que l'enseignant explicite, les différentes reformulations ou illustrations qu'il utilise, les commentaires méta qu'il fait, la distance entre ce qu'il dit et ce qu'il écrit et la formulation orale associée au formalisme écrit. On se donne ainsi les moyens de repérer plusieurs types de passage dans cette association entre écrit et oral, quel qu'en soit l'ordre : la lecture orale des symboles écrits, avec ou non des ajouts de liaisons implicites (*tel que* par exemple) ; la traduction de certaines parties formalisées en mots (les inégalités lues en termes de distance par exemple).

²⁹ Malgré les différences notables entre les définitions de limite de fonction et de limite de suite, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs puisque nous étudions des moments de première rencontre avec la définition formelle associée à une notion FUG (voir annexe 1).

³⁰ Même si l'on peut raisonnablement penser qu'il y a plutôt moins d'interactions entre enseignant et élèves que dans l'enseignement secondaire.

Cette analyse est l'occasion de voir sur cet exemple si certaines des proximités potentielles pointées dans l'analyse du manuel lors de la section précédente apparaissent dans le déroulement de ce cours.

Présentation générale du cours étudié

Le cours magistral étudié est une séance de 1h30 donnée au second semestre devant environ 200 étudiants de L1³¹ portant sur l'introduction de la définition mathématisée formelle de la notion de limite de fonction (en un point, en l'infini) ce qui constitue la première rencontre des étudiants avec cette définition. Pour analyser cette séance, nous avons procédé à la transcription intégrale des écrits de l'enseignant au tableau et de son discours puis nous les avons mis en regard avant de procéder à un découpage du déroulement en phases qui suit celui effectué par l'enseignant sur le plan de son cours.

Le cours a été découpé en 15 phases mais, comme dans le cas du manuel, nous en analysons quatre qui correspondent à l'émergence de la définition de limite (finie) d'une fonction et à sa première utilisation en tant qu'objet : phase 1 (introduction intuitive), phases 3 et 6 (écriture et reformulation de la définition) et phase 12 (application de la définition). Nous renvoyons à Bridoux et al., *ibid.*, pour une analyse plus complète de ces phases et de certaines autres phases (exemples, premiers résultats...).

Dans la suite, nous mettons en italique dans le corps des paragraphes les paroles transcrites.

Introduction intuitive (phase 1)

L'enseignant débute la phase 1 en demandant aux étudiants une définition de la notion de limite puis écrit au tableau sous la dictée d'un étudiant visiblement un peu avancé :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

L'enseignant obtient auprès d'un autre étudiant une définition plus intuitive, en mots, qu'il reformule une première fois : « *OK, $f(x)$ doit se rapprocher autant que l'on veut de l mais quand x se rapproche de x_0* » (reformulation 1). Il s'appuie ensuite sur un graphique sur lequel il traduit « se rapprocher/se rapproche » par des symboles « flèches » qu'il illustre par le geste avant de les reformuler en « aussi proche/suffisamment proche » ; dans le même temps, la locution « quand » devient « si » : « *$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l si x est suffisamment proche de x_0* » (reformulation 2).

Cette première phase témoigne d'une volonté de l'enseignant de tenter de partir des représentations intuitives d'un étudiant pour en arriver à une reformulation qui contient déjà en germe certains éléments logiques et formels de la définition. Cependant, la reformulation 2 nous semble encore éloignée de la définition formelle quantifiée : d'une part, si les deux propositions qui la composent sont formulées de façon similaire (« *$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l* » et « *si x est suffisamment proche de x_0* »), elles ne seront pas quantifiées de la même manière (respectivement par une quantification universelle et par une quantification existentielle) ; d'autre part cette reformulation nous semble être à la fois porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs³² qui rend *a posteriori* difficile la justification de l'ordre choisi dans la définition formelle quantifiée. Cette tentative s'appuie-t-elle sur des connaissances ou représentations déjà-là de tous les étudiants ? Relie-t-elle des besoins ou une réelle motivation ? La question se pose.

³¹ Les étudiants dont il est question sont en première année d'université (L1) et se destinent à des études en informatique ou en mathématiques.

³² Il y a de fait une « inversion » entre l'idée intuitive que si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ est proche de l , et la traduction formalisée qui garantit que cela est vrai « sans trou » pour peu qu'on soit « près de x_0 ».

Premières définitions (phases 3 et 6)

Lors de la phase 3, l'enseignant tente d'écrire la définition de limite d'une fonction en un point en respectant une chronologie qu'il base sur la reformulation 2 obtenue lors de la phase 1. Le tableau présent en annexe 2 explique ligne par ligne et de haut en bas la suite des activités de l'enseignant, en respectant l'ordre de ce qu'il fait ; la colonne de gauche rendant compte de ce qui est écrit au tableau, celle de droite des commentaires de l'enseignant en parallèle.

Lors de la phase 6, l'enseignant écrit au tableau la définition et le commentaire suivants :

Définition : soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Autrement dit, aussi petit que soit ε on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de x_0 sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε .

Lorsqu'il écrit la définition, il lit les valeurs absolues en termes de distances. Après le commentaire, il dit : « D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit ε », « $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha$ » ça c'est un intervalle en fait donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de x sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε ». Il interroge ensuite les étudiants pour savoir s'il est clair que : $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$.

Ce travail de l'enseignant témoigne d'une volonté d'introduire la définition de limite en travaillant à la fois sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales qu'il appuie sur de nombreuses reformulations : en mots (oral et écrit), par le biais d'un graphique (oral et écrit), en termes de distance (oral) et d'inégalités strictes impliquant des valeurs absolues (écrit), en termes d'intervalles et de voisinages (oral et écrit). Cependant, cette tentative de rapprochement est à relativiser car elle reste orale et non écrite et que la distance dit/écrit est grande (voir annexe 2).

Même s'il prend en charge une partie de la structure logique de la définition de limite au cours de ses différentes reformulations (voir aussi phase 1), son ordre et l'apparition des quantificateurs sont entièrement à sa charge et sans lien avec les connaissances des étudiants. Par exemple, l'introduction de « $\exists \alpha > 0$ » dans cette phrase logique semble retardée puis forcée par l'enseignant (cf. annexe 2), étant donné qu'aucun élément de ses différentes reformulations ne permet de la motiver réellement. Ce sont des choix de mathématiciens motivés par des exigences hors de portée des étudiants, ensemblistes ou topologiques et par l'efficacité qui ont présidé à l'émergence de cette expression...

Un exemple d'application de la définition (phase 12)

Durant la phase 11, l'enseignant a défini la limite finie d'une fonction en $+\infty$ de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall x \in Df, x > r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

qu'il a reformulée oralement en terme de distance avant d'écrire au tableau : autrement dit, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle $]r; +\infty[$ sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε . L'enseignant utilise dans cette définition la plupart des reformulations qu'il a introduites dans les phases 1, 3 et 6 ce qu'on peut interpréter comme une tentative de mise en cohérence des proximités horizontales qui y ont été mises en valeur. On peut penser aussi que cette mise en cohérence anticipe l'usage que l'enseignant va faire de cette définition dans la démonstration du résultat de la phase 12.

Dans la phase 12, l'enseignant propose de démontrer que « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ », annonce qu'une « méthode systématique » va être utilisée puis écrit successivement au tableau :

$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall x \in Df, x > r \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$

La seconde phrase est lue mot à mot par l'enseignant puis il dit : « *J'écris donc si alors plutôt que l'implication. Alors est ce que ça vous semble possible et pour quelles valeurs de r ça marche ?* ». Un étudiant répond, l'enseignant poursuit : « *Eh oui, voilà $\frac{1}{\varepsilon}$ très bien. Alors la bonne manière de faire c'est de regarder la conclusion qu'on veut obtenir, on veut avoir cette propriété alors regardons à quelle condition on peut avoir ça, $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, comment on peut l'écrire ? Moi je voudrais avoir une condition qui s'écrit $x > r$ donc on a des nombres positifs donc qu'est ce qui se passe si on prend l'inverse ? La fonction inverse elle est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ donc c'est dire que* » [Il écrit]

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x. \text{ Donc a fortiori } x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

Il commente : « *Je cherche une implication, j'ai une équivalence donc si maintenant j'impose que x soit positif, ça, ça s'écrit... Alors est ce que je peux écrire ça, là on avait une équivalence et puis je rajoute une condition x positif. Donc j'ai plus une équivalence mais j'ai une inclusion de gauche à droite. Alors une fois qu'on a écrit les choses comme ça, qu'est qu'on prend pour r ? On cherche un r tel que si $x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ et bien $r = \frac{1}{\varepsilon}$ ça marche d'accord ?* Il écrit finalement :

On pose $r = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Pour cette démonstration, l'enseignant met en valeur le formalisme et la logique locale de la définition qu'il reformule en utilisant les connaissances supposées anciennes des étudiants sur les valeurs absolues et la fonction inverse. Ce faisant, il parvient à créer une proximité descendante vis-à-vis de la définition formelle. En fin de démonstration, il revient explicitement et oralement sur une méthode générale et féconde pour prouver ce type de résultat : « *Donc qu'est-ce qu'il y a de général dans cette démarche ? C'est déjà de partir d'un epsilon positif quelconque et après d'avoir pour attitude de chercher r vérifiant cette propriété. Donc pour ça vous écrivez, vous tentez de réécrire la conclusion à laquelle vous voulez arriver de manière à trouver une condition suffisante sur x , une condition de la forme $x > r$ pour avoir cette conclusion, d'accord ?* ». En quelque sorte, il tente de rendre la définition « procédurale », il faut se donner un epsilon et réaliser quelque chose ensuite qui est de l'ordre de la recherche d'une condition suffisante d'une forme souhaitée. En d'autres termes, il a introduit l'activité de définition formelle par le biais de reformulations (proximités horizontales) et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser.

Bilan

En guise de bilan, nous pouvons dire au travers de l'étude des premiers moments en lien avec la définition de limite qu'il y a des différences sensibles entre le manuel et le cours magistral étudiés. Si le caractère FUG de cette définition semble interdire à l'enseignant des liens complets avec les connaissances des étudiants, de nombreux indicateurs au sein de son activité discursive montrent des essais de proximités horizontales avec les connaissances ou représentations anciennes des étudiants (soit par le biais de reformulations des définitions ou par la traduction de phrases logiques) mais aussi de proximités descendantes dans les démonstrations. La plupart des proximités potentielles pointées dans la section précédente apparaissent donc effectivement dans le déroulement de ce cours. Pour établir ces proximités, l'enseignant se base sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, distances et valeurs absolues, voisinages...) et sur une mise en valeur de connaissances en logique (quantificateurs, méthodes de raisonnement, condition suffisante...): en outre, il les accompagne de commentaires explicatifs, contrairement au manuel où certains passages étaient laissés à la charge du lecteur. On a cependant noté un certain nombre de paraphrases, qui ne permettent pas d'aborder des difficultés importantes, liées aux choix faits par les mathématiciens pour fixer cette définition de limite et pas à la traduction « mot à mot » de l'idée intuitive dynamique des

étudiants. D'autre part, la plupart de ces tentatives de proximités sont dites et non écrites (grande distance en général entre le dit et l'écrit chez cet enseignant) ce qui peut relativiser leur portée : parmi ceux qui participent, on peut se demander qui est susceptible de profiter de ces commentaires ; sans doute faudra-t-il attendre les cours ou les travaux dirigés suivants les rendre opérationnels. L'absence de proximités ascendantes dans ce cadre n'est pas étonnante justement parce que les notions sous-jacentes ont été identifiées comme FUG.

3.2.5. Analyse d'un cours en ligne, proximités potentielles

En complément des deux analyses précédentes (manuel de L1 et cours magistral), nous présentons ici une analyse logique des pratiques langagières d'un enseignant (vidéo proposée dans le cadre d'une formation à distance³³, l'enseignant n'est pas devant des étudiants, il accompagne son propos avec un diaporama). Cette analyse permet, à un niveau très local, de mettre en lumière des occasions de proximités potentielles. Nous voyons ici que l'enseignant s'éloigne du formalisme strict (tout en restant conforme aux pratiques de la communauté, ces pratiques langagières sont complètement naturalisée), on peut penser qu'il gagne souvent ainsi une certaine souplesse dans la formulation et une certaine concision. L'usage d'expression courante pour formuler les mathématiques, les reformulations ou la constations de possibilités multiples de formulations (du jeu entre écrit et oral notamment) peuvent permettre certaines proximités horizontales, ou a minima peuvent donner à voir certains implicites. Nous verrons que ces proximités restent ici potentielles.

Reformulations

Le cours analysé commence par énoncer la définition de la limite d'une suite. La formulation symbolique est très rapidement donnée. Il est frappant de constater que l'enseignant formule et reformule onze fois cette définition, par écrit ou oralement, de façon à chaque fois différente, en un peu plus d'une minute au début du cours. Cette première présentation est suivie d'un commentaire oral d'une représentation graphique d'une suite convergente, l'enseignant poursuit avec les limites infinies, puis énonce des propriétés des limites et prouve deux d'entre elles. Dans toutes ces phases de l'exposé, la définition est reformulée. Nous nous concentrons ici sur la première minute.

- (1) *Diapo*³⁴ 0:00³⁵ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$
- (2) *Oral* 0:08 La suite u_n a pour limite l appartenant à \mathbb{R}
- (3) *Diapo* 0:00 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$
Pour tout epsilon positif il existe un entier grand N tel que dès que
- (4) *Oral* 0:12 l'entier petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de u_n moins l est plus petit que epsilon.
- (5) *Diapo* 0:24 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$
Pour tout epsilon [main sur \forall] il existe un entier [un pas, main sur \exists] naturel grand N , tel que [deux pas, main sur « $n \geq N$ »] si petit n est plus grand que N alors [un pas, main sur « \Rightarrow »] valeur absolue de [recule] u_n moins l est plus petit que epsilon.
- (7) *Oral* 0:44 Autrement dit u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang.
- (8) *Diapo* 0:51 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- (9) *Oral* 0:58 Limite de u_n égale à l lorsque n tend vers plus l'infini.
- (10) *Diapo* 0:51 $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

³³<http://youtu.be/253AEiNBvGw>

³⁴ « Diapo » signale des éléments projetés sur le diaporama, « Oral » signale des phrases prononcées par l'enseignant, mis à part pour la formulation n°7 les formulations orales sont des reformulations de formulations écrites.

³⁵ Les temps indiqués correspondent au début de la formulation ou à l'apparition de la diapo. La vidéo commence 43 secondes avant le temps 0:00 ci-dessus. Pendant ces 43 secondes, l'enseignant présente le plan du cours.

(11) *Oral* 1:01 *u n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini.*

La définition est également reformulée plusieurs fois dans la suite du cours, notamment au cours des preuves, mais ce ne sera pas développé ici. Quelques observations soulignées dans Bridoux (2015) :

- On voit bien dans les formulations (1) et (2) un exemple de la complexité de la coexistence d'un usage formel de la langue et d'un usage plus courant³⁶ : la précision de l'appartenance de la limite à \mathbb{R} exprimée symboliquement et lue par un participe présent a un statut hybride (sorte de condition n'ayant pas de conséquence visible dans l'expression de la définition). Le fait que le nombre l représente un réel n'est d'ailleurs repris dans aucune des formulations suivantes.

- Le cas de la quantification de n est un cas intéressant de jeu entre l'oral et l'écrit, l'un complétant l'autre. Dans la formulation (3) la quantification universelle de n est classiquement omise (implicite lié à l'implication), dans la formulation (4) on peut voir une trace de la quantification de n dans le « dès que », dans la formulation (5) elle apparaît très explicitement, dans la formulation (6) elle disparaît à nouveau complètement (y compris dans la gestuelle de l'enseignant qui accompagne sa lecture de la main sur la diapo).

- L'oral peut aussi apporter des précisions sur l'écrit : ici c'est à l'oral que l'enseignant précise que n est un entier par exemple (formulations (2) et (3)). Ou apporter des nuances de sens, c'est ainsi que l'on peut comprendre la nuance entre le « si » de la formulation (3) et le « dès que » de la formulation (4) : l'enseignant introduit une dimension pragmatique³⁷, on voit apparaître une chronologie, une trace d'intention, l'enseignant formule ici la définition du point de vue d'un « démonstrateur ». Dans la formulation (7) l'enseignant introduit aussi une intention (« aussi proche que l'on veut »).

- Notons que dans les formulations (8) et (10) on énonce la définition en commençant par parler des termes de la suite et de sa limite, on parle ensuite de n (ordre d'énonciation inverse de l'ordre logique³⁸). « n tend vers plus l'infini » acquiert une autonomie grammaticale dont on sait qu'elle pose ensuite des difficultés quant à la compréhension de la notion de limite (voir par exemple Job 2013).

L'enseignant ne peut, ici, ajuster son discours aux réactions qu'il constaterait chez les étudiants. On voit aussi qu'il ne propose pas de commentaire mathématique sur les éléments pointés ci-dessus (ils sont évoqués ici dans le cadre d'une analyse technique, mais pourraient être abordés par l'enseignant) : on peut parler de limite sur d'autres objets que les réels, le caractère strict ou non des inégalités n'a pas d'importance dans la définition sauf pour « $\varepsilon > 0$ », une implication sous-entend toujours une quantification universelle, comment prouve-t-on ou utilise-t-on cette définition, (non) sens de l'expression « n tend vers l'infini » hors contexte, pourquoi utilise-t-on le mot « limite », « tendre vers », « proche », « à partir d'un certain rang » etc. Il y a matière dans cette très rapide succession à travailler ces points, ces questions, à les faire apparaître plus explicitement.

³⁶ L'usage de la langue est à la fois courant (phrase sujet – verbe – complément, les verbes sont conjugués selon les règles etc.) et formel (« La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » par exemple est un syntagme ayant une définition mathématique, de même « $l \in \mathbb{R}$ », le syntagme « a pour limite » a un statut particulier puisqu'il s'agit ici de le définir formellement). On voit ici aussi un usage de la langue en interaction avec l'usage de symboles, ces interactions sont étudiées dans la thèse de Colette Laborde (Laborde 1982).

³⁷ Donnant une place au locuteur, à l'auditeur au contexte de l'échange.

³⁸ Voir par exemple Hache (à paraître) : "Un des questionnements récurrents sur l'expression des [quantifications] concerne l'ordre de ces [quantifications] : [Rakotovoavi] distingue l'ordre logique et l'ordre d'écriture. (...) retenons qu'en présence de deux [quantifications] on dit en général que la première des deux, selon l'ordre logique, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la [quantification] s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique. Donnons ici un exemple (...) : « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné ». La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné »".

Usage du mot « rang », de l'expression « à partir d'un certain rang »

Le second exemple développé concerne l'introduction du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang ». Le mot « rang » dans le contexte des suites mathématiques est synonyme d'« indice », il peut parfois aussi être remplacé par « nombre entier » (mais on perd alors le rappel du contexte des suites). L'expression « à partir d'un certain rang » renvoie à la double quantification « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ », et la cache. On peut par exemple dire « La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang » pour « $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N u_n > 0$ ». Soulignons que dans cette situation il existe effectivement un entier N tel que, quel que soit l'entier n , si n plus grand que N alors u_n est positif. Les expressions « constante à partir d'un certain rang » ou « croissante à partir d'un certain rang » sont un peu plus compliquées, mais relèvent de la même analyse. Notons que ces différentes formulations ne font pas apparaître les variables muettes présentes dans les formulations quantifiées (classiquement N et n). Il existe d'autres formulations usuelles proches utilisant la variable n (mais pas N) comme « pour n assez grand », ou utilisant la variable N (mais pas n) comme « il existe un rang N à partir duquel ».

La formulation (7) ci-dessus « u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang » est classique. L'usage de « à partir d'un certain » est plus complexe que dans les phrases précédentes. Il faut ainsi lire dans la formulation une quantification universelle de ε (en ajoutant une intention concernant le fait que l'on veut que ε soit petit, on retrouve une dimension pragmatique) et le fait que le rang évoqué par « à partir d'un certain rang » n'est pas déterminé : il dépend de ε .

Les expressions issues des usages courants de la langue permettent des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (conjugaisons, nuances qualitatives, insertion d'adverbes etc.) que ne le permet le formalisme. Elles cachent par contre la référence formelle, et elles ne permettent pas un usage directement « opérationnel » : comment montrer par exemple qu'une suite n'a pas pour limite zéro avec la définition « Une suite tend vers zéro si et seulement si elle est aussi proche que l'on veut de zéro à partir d'un certain rang » ? Elles ne permettent pas facilement non plus de saisir certaines nuances (différences d'usage de « à partir d'un certain rang » entre « La suite est strictement positive à partir d'un certain rang » et « u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang »).

Il est intéressant d'analyser la façon dont l'enseignant introduit ces formulations dans son discours. Dans le premier cours sur les suites (définitions, exemples de suites, premières propriétés) et dans le cours étudié (2^e cours), on trouve dix occurrences du mot « rang ». Le mot « rang » est utilisé pour « indice » (trois fois), dans une expression « à partir d'un certain rang » pour laquelle il existe effectivement un rang (cinq fois) ou dans le contexte plus complexe de l'usage de « à partir d'un certain rang » lié à la définition de limite (deux fois). Aucun commentaire n'est fait à propos de ces usages, l'étudiant peut faire des liens entre les formulations employées et ce qui est écrit (quand quelque chose est écrit et quand ce qui est écrit est différent de ce qui est prononcé, deux occurrences), mais c'est à lui de prendre l'initiative³⁹. Autrement dit, les occasions existent bien, mais ne sont pas exploitées.

Prononciation de « $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ »

La formulation écrite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être lue simplement⁴⁰ : la lecture explicite des parenthèses serait lourde, la variable n est muette (« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » ne parle pas de n), cette suite n'a pas nécessairement encore de nom (faut-il l'appeler « u » ?)... On lit souvent cette formulation en commençant par « La suite... » : « La suite u », « La suite u indice n » (en ajoutant éventuellement « pour n dans \mathbb{N} », ce qui présente la variable n et introduit plus explicitement le fait qu'elle est

³⁹ Sauf pour la seconde occurrence, située à la fin du premier cours, il s'agit d'un exercice affichée à l'écran sans commentaire : « Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique, écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases. (...) (c) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang »

⁴⁰ La thèse de Jean Philippe Drouhard (Drouhard 1992) étudie entre autre ces notations mathématiques utilisant deux dimensions (notations des racines n -ièmes par exemple).

muette), « La suite u_n » (idem), « La suite de terme général u indice n » (là aussi on peut ajouter « pour n dans \mathbb{N} » ce qui précise le domaine dans lequel la variable n prend ses valeurs, la variable n est déjà mutifiée par « de terme général ») etc. Il arrive qu'on utilise des formulations plus concises : « u_n » pour « La suite u_n », ou « u », celles-ci permettent de simplifier les formulations de propositions ou de preuves complexes, tout en nécessitant une certaine complicité de l'auditeur ou du lecteur, et un travail complémentaire d'interprétation plus important.

Pour un entier n donné, le n -ième terme de la suite est noté « u_n », ce qui est souvent lu « u indice n » ou plus simplement « u_n », on peut parfois préciser en disant « le terme u_n » (ou « le nombre u_n » par exemple).

On voit donc ici que deux objets très différents mais liés (une suite de nombres et un nombre par exemple, ce dernier étant un des termes de la suite) peuvent être désigné par des formulations orales très proches, voire par la même formulation (« u_n »). Les relations entre ces deux objets sont au centre de la définition de limite : la convergence est une propriété de la suite, définie par une propriété de ses termes (et de la limite en question) quantifiée de façon complexe. La compréhension de la notion de limite est très liée à la compréhension de cet emboîtement (propriété de la suite, propriétés de ses termes), de ces deux niveaux de lecture. L'enseignant désigne ici presque systématiquement les suites par les expressions « suite u_n » ou « u_n », il est intéressant d'analyser ce que permet ces quasi similarités de formulations, la façon dont cela fait parler le formalisme, lui donne sens, mais aussi les difficultés que cela peut engendrer (plus une formulation est concise, plus elle est porteuse d'implicites), et la façon dont l'enseignant gère ces difficultés potentielles.

-L'enseignant ne désigne qu'une fois une suite par « la suite des termes » : « la suite des termes⁴¹ un sur u_n » pour dire « $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ » (avec, ici, l'expression « u_n » qui désigne donc un nombre).

-Il désigne aussi les suites par les expressions plus courtes « la suite », « une suite » ou « la suite u_n », « une suite u_n ». Par exemple dans : « Si une suite est convergente, sa limite est unique », « la suite u_n a pour limite l appartenant à \mathbb{R} », « une suite u_n est dite convergente si elle admet une limite finie ».

-On dénombre aussi quelques formulations dans lesquelles la suite est désignée par « la suite » suivie d'une expression plus complexe que la donnée d'un terme de la forme « u_n » : « la suite u_n moins l fois v_n » en parlant de $\left((u_n - l)v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, ou « la suite u_n facteur de un moins trois u_n moins un sur u_n carré moins un » pour désigner la suite $\left(u_n(1 - 3u_n) - \frac{1}{u_n^2 - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

-Quelques formulations où une suite est aussi désignée par un terme ayant une forme plus complexe que « u_n », mais sans préciser « la suite » : par exemple dans « si une suite u_n tend vers un réel l alors lambda fois u_n où chaque terme est multiplié par le réel lambda a pour limite lambda fois l » l'expression « lambda fois u_n » désigne $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme en témoigne la fin de la phrase « où chaque terme ».

-Certaines formulations jouent sur les deux niveaux (suite ou termes de la suite), voici quelques exemples :

Un premier exemple avec⁴² « si u_n tend vers plus l'infini [la suite tend vers $+\infty$] alors la suite des un sur u_n tend vers zéro [la suite tend vers 0]. Réciproquement, si u_n tend vers zéro [la suite tend vers zéro] et si les u_n sont strictement positifs [les termes sont strictement positifs⁴³], alors un sur u_n tend vers plus l'infini [à nouveau la suite] ». La formulation écrite correspondante affichée (ci-dessous) ne

⁴¹Nous soulignons ici les parties de phrases désignant une suite dont il est question.

⁴²Entre crochets, nos commentaires.

⁴³ L'enseignant marque, dans son expression orale, le fait qu'il parle des termes en utilisant le pluriel (« les u_n sont » et non simplement « u_n »).

laisse aucune ambiguïté sur le statut des objets. Elle permettrait donc à un auditeur attentif de décoder l'oral.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$
$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

Un second exemple : « la suite u_n est égal(e) à cosinus n et v_n est égal à un sur racine de n , alors la suite cosinus n divisé par racine de n tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini ». Dans cette phrase « v_n est égal à un sur racine de n » semble bien parler d'une égalité de nombre, la première partie de la phrase est plus difficile à interpréter, il est difficile de décider si l'enseignant parle de la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou, de façon mixte et simultanée de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'une égalité de termes $u_n = \cos n$. On retrouve en fin de phrase une lecture de $\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ du type de celles décrites précédemment. Sur cet exemple, le texte du diaporama correspondant à ce que dit l'enseignant est « $u_n = \cos n$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$ », la formulation écrite donne donc des égalités de termes (cette phrase est précédée de « Exemple : », on peut penser que n est quantifié implicitement universellement), la formulation orale ajoute deux fois sur trois « la suite » devant les termes dont il est question. On voit ici que l'écrit comporte des implicites forts qui sont au cœur des objets manipulés (statut de la variable n), et que l'oral ne clarifie pas la situation.

Ces exemples montrent bien la souplesse que permettent les expressions orales. Et les difficultés de compréhension ou d'apprentissages que cela pourrait engendrer. On glisse en tout cas petit à petit vers des formulations où l'on énonce les propriétés d'une suite en les formulant à propos des termes de la suite (ou de formules précisant ce que sont ces termes, par exemple « 1 sur racine de n tend vers 0 »). Comme pour l'utilisation du mot « rang », les formulations orales sont souvent complétées ici par une formulation écrite. Celles-ci lèvent parfois l'ambiguïté, et donnent donc implicitement des éléments des pratiques langagières concernant les suites. Parfois les formulations écrites intègrent, elles aussi, des raccourcis (que les formulations orales précisent ou non). Dans tous les cas, rien n'est explicité sur ces points.

On constate donc globalement que le manuel étudié ne donne pas d'occasion de proximités et que le cours filmé en donne beaucoup qui ne sont pas exploitées. Ces deux supports ne permettent peut-être pas facilement de travailler ces proximités (sans doute en lien avec le fait que le public est absent : pas de prise d'information au fil de l'exposé, obligation de « parler » à un public potentiellement très large et très varié etc.), on constate que le cours en présentiel est un lieu possible de développement de ces proximités. On peut aussi constater que nos préoccupations amènent à de nouvelles analyses du discours de l'enseignant en relation avec le discours mathématique, avec ce qu'il « embarque », clairement ou de manière cachée.

Des perspectives en guise de conclusion

Finalement une nouvelle notion, et particulièrement lorsqu'elle s'accompagne d'un nouveau formalisme, embarque un certain nombre de connaissances, y compris anciennes, et de nouveautés – invisibles directement à partir des seuls mots ou des premières formules. Elle contient aussi un potentiel d'utilisation pour aborder des (nouveaux) problèmes, également en partie caché.

Le cours proprement dit serait un réservoir de pseudo-concepts à retenir et à travailler pour les transformer en concepts, et/ou de modèles de démonstrations à comprendre, et/ou d'exercices-types à imiter, et/ou de méthodes à appliquer mais aussi, quelquefois, l'occasion de faire approcher des aspects de la démarche scientifique globale associée, de provoquer des interrogations théoriques ou en termes de justifications (technologiques) et d'y répondre. Nous avons distingué, pour étudier les contenus des cours, différents niveaux de généralités possibles, différentes logiques globales et les proximités discursives. Les élèves utiliseraient le cours pour retenir des mots ou idées-clefs, d'où l'importance des proximités horizontales, avant de construire, grâce à l'ensemble du scénario (et aux

exercices ou TD), les connaissances attendues, mettant en jeu davantage les autres proximités. Selon le niveau de conceptualisation en jeu, on peut viser des connaissances mobilisables ou disponibles, que ce soit en termes d'outils et/ou d'objets.

Conceptualiser amène en effet à repérer à la fois ce sur quoi porte la notion, son sens, et cette utilisation, et à l'effectuer « comme il faut », voire en partie « automatiquement » à terme. Cela se fait sur un temps long. Au moment de l'exposition des connaissances, les proximités ascendantes portées par le discours, lorsqu'elles sont possibles, c'est-à-dire lorsqu'il y a des activités préliminaires envisageables, ont pour objectif d'aider les élèves à repérer à partir de leur travail ce qui sera embarqué dans la nouvelle notion, à partir d'une « version » contextualisée, et en reliant leurs connaissances anciennes au nouveau. L'enseignant a la charge de dégager quelque chose. Les proximités descendantes ont pour objectif d'aider les élèves, au cours d'exercices d'application voire d'exemples, à éprouver le potentiel de la notion (et des formules) et à accompagner l'application en contexte. L'enseignant a la charge de préciser ce qui est contextualisé, substitué, invariant. Les proximités horizontales permettent de livrer des commentaires (méta), des intermédiaires, des images, étoffant les mots et les formules, mais sans lien avec leurs applications, en gardant le niveau de généralité du cours

Mais ce n'est pas évident pour l'enseignant - il y a des notions qui se prêtent mal à des activités préliminaires réellement liées à la notion visée ou alors il n'est pas clair de préciser ce qui va être généralisé (proximités impossibles - ou illusoire, ou manquées), et pour les applications, il n'est pas toujours facile de dégager précisément les liens, notamment dans la mesure où pour l'enseignant c'est très naturalisé. C'est l'écoute des élèves et l'interprétation de ce qu'ils disent (font) qui peuvent servir.

Plusieurs conditions joueraient, selon les cas, pour que des éléments donnés en cours puissent être appropriés, transformés par chaque élève en connaissances individuelles (éventuellement disponibles) :

- l'inscription des moments d'exposition dans le reste du scénario, en termes de cohérence, de liens et de dynamiques, mettant notamment en jeu les activités des élèves, avant ou après, et les relations que peut faire à cette occasion l'enseignant avec le savoir au degré de généralité choisi (repérage des occasions de proximités, potentielles),
- le déroulement choisi et les explicitations des passages du contextualisé au décontextualisé ainsi que les reformulations, reprises, répétitions et commentaires sur le décontextualisé, impliquant plus ou moins les élèves (appréciées en termes de proximités discursives réalisées),
- les logiques globales récurrentes, imbriquées, procédurale ou épistémologique, développées à l'oral, sur l'ensemble d'un chapitre, voire sur l'année.

En particulier ce serait de la qualité et des variétés du jeu des proximités que dépendrait la richesse de ce qui peut être mis en mémoire et la possibilité de mobiliser correctement les savoirs correspondants. Les logiques globales ainsi que les reformulations et les autres commentaires, pourraient contribuer à des formes de motivation pour certains élèves, donnant sens à une démarche d'ensemble, impliquant des liens et des aspects heuristiques ou épistémologiques, ou facilitant les mises en fonctionnement en rassurant certains élèves, côté procédural. Cela dit les différences entre les élèves amènent sans doute à choisir des équilibres adaptés à une classe donnée – ce qui n'implique pas de renoncer complètement à une des deux logiques.

Soulignons que les évaluations de ces « résultats » peuvent ne porter que sur certains aspects travaillés au cours du scénario, ce qui ne veut pas dire que l'ensemble n'ait pas contribué à la construction des connaissances, notamment dans une visée à moyen terme – mais ce qui peut peser sur l'écoute des cours, par une minoration de fait, côté élèves, de ce qui ne saurait être évalué. Cela peut retentir, à force, sur les choix de l'enseignant.

Côté enseignant, et cela peut alimenter un travail en formation, l'efficacité d'un cours dépendrait ainsi à la fois

- de la clarté des objectifs côté enseignant et de leur mise en actes plurielle choisie pour le scénario, en relation avec le relief sur la notion (nature des notions et activités d'introduction

possibles, difficultés des élèves et ordre entre exercices et cours, avec la détection de proximités potentielles)

- et des ajustements conjoncturels aux réactions des élèves, sources des proximités effectivement développées pendant le cours... avec la prise de conscience des difficultés.

Il manque à la fois une étude de davantage de cours, et une mise en relation directe avec des effets sur les élèves – ou au moins des hypothèses à ce sujet. Des recherches plus précises seraient à mener, en faisant varier les contenus étudiés, les élèves, les enseignants, en interrogeant les élèves à la sortie d'un cours, en comparant des productions d'élèves et leur cours...

Reste aussi à interroger tout ce qui concerne la transposition de ces résultats pour les enseignants.

Restent encore bien des questions plus larges et notamment celles-ci : quel statut donner aux différents savoirs dans la scolarité obligatoire ? Après ? Peut-on organiser différemment dans la forme et dans le temps la transmission des savoirs sans dénaturer ce statut, voire en l'améliorant ?

Annexe 1 : Un peu de relief sur les notions de limites formalisées

La notion de limite d'une suite numérique apparaît pour la première fois dans la classe de première au lycée (programme de l'année 2010 en France). Les programmes précisent bien que la définition formelle n'est pas donnée à ce stade de l'enseignement. La notion est donc introduite de manière empirique à partir d'exemples d'expérimentations logicielles, d'études d'algorithmes, etc. Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont étudiées, pour lesquelles la convergence est aussi abordée de manière intuitive, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. La notion de limite de fonction apparaît aussi en classe de première au lycée dans le chapitre « Dérivation » : comme dans le cas des suites, le programme stipule qu'« on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point » et qu'on n'en donne pas de définition formelle.

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont quelque peu approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ; le fait que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites avant d'en venir à la notion de continuité. Cependant, que ce soit pour la notion de limite de suite ou celle de limite de fonction, les tâches proposées aux élèves relèvent en général de l'application de techniques algébriques opératoires. D'ailleurs, cet aspect est confirmé dans les programmes où on peut lire que « le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'appropriier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Soulignons qu'il n'y a pas besoin d'utiliser la définition formalisée pour résoudre ces exercices.

À l'université, en revanche, la définition formelle en $\varepsilon - N$ de la notion de limite de suite et celle en $\varepsilon - \alpha$ de la notion de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs

caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalité que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$ (*Analyse MPSI*, Monier, 2006)

Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in Df, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$ (*Mathématiques Tout-en-Un*, Dunod, 2007)

Les quantifications présentes dans ces caractérisations, l'usage (ou non) des parenthèses et du symbole d'implication, tout comme l'emploi d'une inégalité avec une valeur absolue, font que ces définitions sont porteuses d'un formalisme complexe à ce niveau d'enseignement. De plus, il semble difficile de les introduire en s'appuyant sur les connaissances anciennes (même intuitives) des étudiants acquises au lycée puisque les notions formelles de limite n'y ont pas ou peu été travaillées, que le besoin de telles définitions ne s'est pas fait sentir, et que, si on se réfère aux programmes, lorsqu'une définition est donnée, elle n'est pas formulée de la même manière dans les deux institutions (lycée et université). En ce sens, ces deux notions de limite sont porteuses d'un nouveau formalisme qui généralise les exemples étudiés au lycée tout en unifiant la notion de limite dans un cadre général. Les notions de limite de suite et de fonction sont donc des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG) au sens de Robert (1998). Comme Robert l'explique, ce type de notion est difficile à introduire car la distance ancien-nouveau est grande. Elle souligne ainsi la difficulté à trouver un problème initial à proposer aux étudiants où la notion de limite apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal, les amenant ainsi à écrire de manière autonome la (nouvelle) définition formelle tout en lui donnant du sens. Il y a peu d'espoir de mettre en place des proximités ascendantes naturelles.

Une fois la définition formelle introduite à l'université, elle est en général utilisée pour étudier les premiers exemples, puis pour démontrer quelques résultats classiques comme l'unicité de la limite ou les règles de calculs (en partie déjà connues) sur les limites. Compte tenu de la complexité de la structure logique de la définition, ce type de travail nécessite d'utiliser à bon escient des connaissances en logique élémentaire mais aussi sur l'ordre dans les réels pour manipuler les inégalités. Nous savons que ces connaissances sont souvent peu disponibles en première année d'université (Dieudonné et al., 2011). Les étudiants sont donc d'emblée confrontés à des tâches complexes pour eux. Cela nous amène à penser qu'il est difficile de trouver des premières tâches qui seraient simples et isolées⁴⁴, permettant aux étudiants de se familiariser avec l'usage de la notion formalisée donnée en cours. Même les exercices d'application immédiate de la définition ne sont pas immédiats pour les étudiants (on retrouve un résultat de Bridoux (2011) qui semble spécifique de certaines notions FUG). Ainsi s'il y a proximité descendante, entre cours et exercices, elle devra mettre en jeu des explicitations à réfléchir. Restent aussi les proximités plutôt horizontales...

⁴⁴ Ces tâches sont des applications immédiates (définition, propriété...) des connaissances des étudiants.

Annexe 2

Ce qui est écrit au tableau	Ce qui est dit par l'enseignant (extraits)
$ f(x) - l < \varepsilon$	<p><i>Qu'est-ce que c'est que la distance de $f(x)$ à l ? [réponse d'un étudiant] Oui c'est la valeur absolue de $f(x) - l$ d'accord. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu'on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu'on veut de l, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu'on veut, on est d'accord.</i></p>
$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) - l < \varepsilon$	<p><i>On veut que epsilon soit aussi petit qu'on veut, ça veut dire que ça va être vrai pour tout epsilon positif donc on va avoir :</i></p>
$\forall \varepsilon > 0 \quad x - x_0 < \alpha \quad f(x) - l < \varepsilon$	<p><i>Et on doit avoir ça si x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à une certaine valeur alpha.</i></p>
$\forall \varepsilon > 0 \quad x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$	<p><i>Donc le si alors c'est l'implication donc aussi petit que soit epsilon, si $x - x_0$ est inférieur à alpha, on doit avoir $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, ça commence à ressembler à la définition qu'a donnée votre camarade.</i></p>
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$	<p><i>Alors alpha, comment on l'introduit, parce que là on introduit une notation, ça veut dire qu'il faut que ça soit dans quel ensemble alpha ? Il doit majorer une distance donc... [réponse étudiant] positif, voilà. Quel que soit epsilon, dès que x sera suffisamment proche de x_0 c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à alpha donc derrière c'est la notion « il existe alpha tel que ». Donc notre définition, si on veut l'écrire dans une manière rigoureuse, ça ressemble à quelque chose comme ça d'accord ?</i></p>

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in Df, x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$				Alors là, il manque encore quelque chose, c'est x appartient à quel ensemble, pour quelles valeurs de x on a cette implication. C'est pour les x appartenant à l'ensemble de définition donc je dois avoir...
$\forall \varepsilon > 0$ que l'on veut	$\exists \alpha > 0 \forall x \in Df$ Suffisamment	$ x - x_0 < \alpha \Rightarrow$ Proche	$ f(x) - l < \varepsilon$ proche	Donc ici c'est la notion aussi proche que l'on veut, ça ce serait que l'on veut. Ici, ça serait suffisamment, là on a la notion de proche et là on a à nouveau la notion de proche, d'accord ?

Bibliographie

- ALLARD C. (2015), *Étude du processus institutionnalisation dans les pratiques d'enseignants de fin d'école primaire : le cas des fractions*. Thèse de Doctorat en cours, Université Paris-Diderot.
- BRIDOUX S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).
- BRIDOUX S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY N., HACHE C. & ROBERT A. (AVEC LA COLLABORATION DE LEVI, M.C. ET PILORGE F.) (2015), Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, n°14, Juillet 2015.
- BRIDOUX S. (2015), Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *Texte soumis au colloque INDRUM 2016*.
- BRONNER ET AL. (ED.) (2013), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BUTLEN D. & PEZARD M. (2003), Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des mathématiques* **23.1**, 41-78, Grenoble, La Pensée sauvage.
- CONSTANTIN C. (2014), *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de Doctorat, Université de Marseille.
- CHEVALLARD Y. (1991), Sur la déconcertation cognitive. *Interactions didactiques* **12**, 27-51.
- DIEUDONNE M., DRONIOU J., DURAND-GUERRIER V., RAY B. & THERET D. (2011), Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. *Repères-IREM* **85**, 5-30.
- DORIER J.L. (ED.) (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7/2**, 5-31.
- DROUHARD J.P. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, éditée par l'IREM de Paris, Paris.
- GAUTIER C., WARUSFEL A., CAMINADE B., FONTAINE H. & NICOLAS S. *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1^{re} année*, Éditions Dunod.
- HACHE C. (A PARAITRE), Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques, in *Actes du 20^e colloque de la CORFEM, juin 2014*, Grenoble.
- JOB P. (2013), Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations, in COPPE S. et HASPEKIAN M. (2013) *Actes du séminaire national de didactique des Mathématiques, année 2013*, édité par l'IREM de Paris, Paris.
- LABORDE C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Université de Grenoble.
- MARGOLINAS C. (2015), Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie* **188**, 13-22.
- MONIER J.M. (2006), *Analyse MPSI*, Éditions Dunod.
- MOUNIER E. (2010), *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot (Paris7).

- PARIES M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques. Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24 2-3**, 251-284.
- PARIES M., POUYANNE N., ROBERT A., ROGALSKI M. & RODITI E. (2007), Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°9*, IREM Paris-Diderot.
- PERRIN M.J. (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse d'état, Université Paris 7.
- PRZENIOSLO M. (2005), Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics* **60 1**, 71-93.
- ROBERT A. (1982), L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **3.3**, 307-341.
- ROBERT A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* **340**, 431-449.
- ROBERT A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18/2**, 139-190.
- ROBERT A. & POUYANNE N. (2004), Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°5*, IREM Paris-Diderot.
- ROBERT A. & ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.2**, 145-176.
- ROBERT A. & VANDEBROUCK F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **34 2-3**, 239-285.
- TENAUD I. (1991), *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*. Thèse de Doctorat, Université Paris 7.
- VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2**, 133-170.

STEPHANIE BRIDOUX

LDAR (EA 4434)

Université de Mons (Belgique)

stephanie.bridoux@umons.ac.be

NICOLAS GRENIER-BOLEY

LDAR (EA 4434)

Université de Rouen (France)

nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr

CHRISTOPHE HACHE

LDAR (EA 4434)

Université Paris-Diderot (France)

christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

ALINE ROBERT

LDAR (EA 4434)

Université Cergy-Pontoise (France)

aline.robert@u-cergy.fr