



HAL
open science

Filtrage spatio-temporel en IRM de flux sanguin 4D

Sébastien Levilly, Jérôme Idier, Félicien Bonnefoy, David Le Touzé, Perrine Paul-Gilloteaux, Saïd Moussaoui, Jean Michel Serfaty

► **To cite this version:**

Sébastien Levilly, Jérôme Idier, Félicien Bonnefoy, David Le Touzé, Perrine Paul-Gilloteaux, et al.. Filtrage spatio-temporel en IRM de flux sanguin 4D. XXVIème colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. hal-01720339

HAL Id: hal-01720339

<https://hal.science/hal-01720339>

Submitted on 29 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Filtrage spatio-temporel en IRM de flux sanguin 4D

Sébastien LEVILLY¹, Jérôme IDIER¹, Félicien BONNEFOY², David LE TOUZÉ², Perrine PAUL-GILLOTEAUX³, Saïd MOUSSAOUI¹, Jean-Michel SERFATY⁴

¹Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N), 1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3, France

²Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique, et Environnement Atmosphérique (LHEEA)
1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3, France

³CNRS, SFR Santé François Bonamy UMS 3556, IRS-UN, 8 quai Moncoussu, BP 70721, 44007 Nantes Cedex 1, France

⁴UF Imagerie Cardiaque et Vasculaire Diagnostique, CHU de Nantes, France

Sebastien.Levilly@ls2n.fr, Jerome.Idier@ls2n.fr, felicien.bonnefoy@ec-nantes.fr,
david.letouze@ec-nantes.fr, Perrine.Paul-Gilloteaux@univ-nantes.fr,
Saïd.Moussaoui@ls2n.fr, JeanMichel.SERFATY@chu-nantes.fr

Résumé – L’IRM de flux 4D permet l’imagerie spatio-temporelle de la vitesse du flux sanguin dans une région d’intérêt telle que le système aortique au cours du cycle cardiaque. Cependant, la résolution et le rapport signal sur bruit (RSB) sont limités par des contraintes d’acquisition. Afin d’améliorer le RSB, nous proposons de régulariser le champ de vitesse du flux sanguin en introduisant une contrainte physique, l’incompressibilité, ainsi qu’une pénalisation temporelle quadratique. La solution développée a pour avantage sa simplicité de mise en œuvre tout en améliorant significativement la précision du champ de vitesse et le rapport vitesse sur bruit (RVB).

Abstract – 4D PC-MRI provides the spatio-temporal imaging of the blood-flow velocity in an area of interest such as the aortic system during a cardiac cycle. However, the resolution and the signal-to-noise ratio (SNR) are limited by acquisition constraints. In order to improve the SNR, we propose to regularize the blood-flow velocity field by introducing a physical constraint, incompressibility, and a temporal quadratic penalization. The advantage of the developed solution is its simple implementation while enhancing significantly the speed precision and speed-to-noise ratio (SpNR).

1 Introduction

Les améliorations récentes apportées à l’IRM de flux (*Phase-Contrast Magnetic Resonance Imaging*) ont permis de rendre cliniquement viable la cartographie d’un champ de vitesse dans un volume d’intérêt au cours d’un cycle cardiaque [1]. Le médecin peut analyser directement cette carte spatio-temporelle, mais aussi en extraire des bio-marqueurs spécifiques : vitesse maximale dans une zone particulière, contrainte de cisaillement aux parois des vaisseaux, etc. Ces bio-marqueurs constituent aussi bien des indices du degré d’évolution de maladies, que des aides à la prédiction du risque de complications graves ou mortelles.

Une limite actuelle de l’IRM de flux 4D concerne le niveau de discrétisation spatio-temporel relativement grossier atteint par les séquences d’acquisition. Cette limite résulte de la gestion d’un compromis impliquant à la fois la durée d’acquisition (de l’ordre de 20 minutes) et le rapport signal à bruit (RSB). En effet, le RSB apparaît proportionnel au temps d’acquisition, et inversement proportionnel au nombre de voxels utilisés pour discrétiser le volume d’acquisition.

Ce constat justifie plusieurs travaux récents ayant pour objectif d’améliorer par post-traitement la qualité des cartes spatio-

temporelles de flux [2, 3, 4, 5]. L’idée générale consiste à améliorer le RSB grâce à la prise en compte d’informations supplémentaires, soit issues de données anatomiques [3], soit d’informations *a priori* [2, 4].

L’incompressibilité du fluide sanguin est une information *a priori* de nature physique. Une conséquence est que le champ de vitesse est à divergence nulle en tout point du domaine et à tout instant, ce qui correspond à une contrainte linéaire [2, 3], parfois prise en compte sous la forme d’un terme de pénalisation dans un critère des moindres carrés [5]. Par ailleurs, [5] et [3] se concentrent sur l’adaptation du modèle au niveau de la paroi.

Cet article propose de combiner la contrainte spatiale de divergence nulle avec une régularisation temporelle obtenue par pénalisation quadratique. De façon globale, la solution que nous proposons est calculable de façon simple, par une combinaison parallélisable de résolutions de systèmes linéaires (un par instant), suivie d’un filtrage temporel simple. Nous exploitons le caractère circulant du filtre temporel et une hypothèse de bords libres aux frontières spatiales du domaine analogue à celle de Song et al. [2].

2 Débruitage du champ de vitesse

2.1 Hypothèses *a priori*

Comme les travaux existants, nous faisons l'hypothèse que les vitesses acquises sont affectées d'un bruit blanc additif gaussien. Cette hypothèse est simplificatrice car ces mesures de vitesse sont obtenues à partir de variations de phase de mesures complexes effectuées dans l'espace K (c'est-à-dire dans le domaine de Fourier du domaine spatial). L'intérêt d'utiliser un modèle plus précis pourra faire l'objet de travaux ultérieurs.

Nous exploitons par ailleurs l'hypothèse d'incompressibilité du flux sanguin, qui se traduit par l'annulation de la divergence de la vitesse en tout point du domaine fluide et en tout temps. Dans un formalisme continu, le champ de vitesse variable en temps est une fonction $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dont chaque composante peut être supposée d'énergie finie, *i.e.*, à chaque instant t , $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3$. L'incompressibilité se traduit par l'appartenance de $\mathbf{u}(\cdot, t)$ pour tout t au sous-espace hilbertien \mathcal{M} des fonctions \mathbf{u} à divergence nulle :

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Le théorème de Helmholtz et les travaux de Hodge [6] permettent de caractériser \mathcal{M} sous la forme

$$\mathcal{M} = \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3\}, \quad (1)$$

et de définir l'opérateur de projection orthogonal \mathcal{P} sur \mathcal{M} :

$$\mathcal{P}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{u} - \nabla(\Delta^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{u})). \quad (2)$$

Dans un cadre calculatoire usuel, le volume spatio-temporel est discrétisé sur la même grille spatio-temporelle que les mesures, sous la forme de $N_s = N_x \times N_y \times N_z$ voxels et de N_t pas temporels. On peut alors redéfinir l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle \mathcal{M}_0 comme le noyau de la matrice \mathbf{D}_s utilisée pour définir la version discrétisée de l'opérateur de divergence. Busch et al. [3] ont exploité une version discrète de l'expression (1) pour obtenir une solution appartenant à \mathcal{M} . Cette approche nécessite de trouver le champ \mathbf{r} par un calcul itératif plus coûteux qu'une projection. L'approche projective a été employée par exemple dans [2, 4] pour différents choix de base. Notons que l'opérateur de divergence \mathbf{D}_s se décompose en plusieurs opérateurs de différentiation spatiale sous la forme $\mathbf{D}_s = (\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z)$, et que la formulation discrète du projecteur \mathcal{P} s'écrit en tant qu'opérateur matriciel :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{D}_s^t (\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^t)^{-1} \mathbf{D}_s \quad (3)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité et t la transposition. On note que la matrice \mathbf{D}_s doit être de rang plein.

Enfin, nous n'avons pas encore explicité de condition de bord dans la spécification de \mathcal{M} et \mathcal{M}_0 . Dans le cas de données IRM, le champ de vitesse mesuré concerne des zones fluides et organiques. En toute rigueur, nous devrions appliquer cette projection uniquement au sein du fluide et mettre en place les considérations nécessaires [6] aux bords du domaine fluide Ω_f comme cela est réalisé en simulation CFD (*Computational Fluid*

Dynamics). Sachant que la vitesse d'un fluide visqueux tend vers zéro au niveau de la paroi [6], supposer que la divergence de la vitesse est nulle sur l'ensemble du volume est justifié comme première approximation. Cette hypothèse a pour intérêt de ne pas nécessiter la connaissance précise de la position des parois. Cependant, les conditions aux bords de ce volume restent à préciser. Sachant qu'en situation réelle, des vaisseaux sanguins traversent ce volume d'intérêt, les conditions de bord peuvent avoir un effet considérable sur la solution. Dans cet article, nous privilégions la condition de bord *libre* introduite par Song et al. [2] et la comparons à une hypothèse de bord *circulant*.

2.2 Formulation du problème

On note $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1^t, \dots, \mathbf{w}_{N_t}^t)^t$ le vecteur des vitesses observées pour l'ensemble des nœuds spatio-temporels. A cause du bruit de mesure, ce vecteur correspond à un champ de vitesse qui n'est pas à divergence nulle. On note également $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^t, \dots, \mathbf{v}_{N_t}^t)^t$ le vecteur des vitesses à estimer avec \mathbf{v}_t rangé dans un ordre lexicographique (défilement des composantes x , y puis z). On définit \mathbf{D}_t une matrice Toeplitz à blocs Toeplitz telle que $\mathbf{D}_t \mathbf{v} = \mathbf{v}_{t+1} - \mathbf{v}_t$, qui sera utilisée pour favoriser une certaine régularité temporelle. On se propose alors de résoudre le problème suivant :

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0} \{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{D}_t \mathbf{v}\|_2^2\} \quad (4)$$

où, par abus de notation, $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0$ signifie que $\mathbf{v}_t \in \mathcal{M}_0$ pour tout t , et $\lambda \geq 0$ est un paramètre de régularisation temporelle.

Soit \mathbf{P} la matrice diagonale par blocs permettant d'appliquer \mathbf{P}_0 séparément à tous les \mathbf{v}_t . Pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0$, $\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}$ est orthogonal à $\mathbf{P}\mathbf{w} - \mathbf{w}$, donc

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}\|_2^2 + \|\mathbf{P}\mathbf{w} - \mathbf{w}\|_2^2. \quad (5)$$

Par conséquent, le problème (4) peut se réécrire sous la forme : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0} J(\mathbf{v})$ avec

$$J(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{D}_t \mathbf{v}\|_2^2$$

Sans tenir compte de la contrainte, l'annulation du gradient de J se produit de façon unique au point

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^t \mathbf{D}_t)^{-1} \mathbf{P}\mathbf{w}. \quad (6)$$

Les opérateurs \mathbf{P} et $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^t \mathbf{D}_t)^{-1}$ correspondent à des filtres spatiaux et temporels, respectivement. Ils peuvent donc commuter, ce qui implique que $\hat{\mathbf{v}}$ s'écrit aussi

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^t \mathbf{D}_t)^{-1} \mathbf{w}, \quad (7)$$

donc que $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}_0$. On en conclut que $\hat{\mathbf{v}}$ est bien la solution du problème (4).

2.3 Mise en œuvre numérique

Nous proposons de discrétiser la divergence par la méthode des différences finies suivant le schéma : $\mathbf{D}_x \mathbf{v} = \mathbf{v}_{x+1} - \mathbf{v}_x$,

$\mathbf{D}_y \mathbf{v} = \mathbf{v}_{y+1} - \mathbf{v}_y$ et $\mathbf{D}_z \mathbf{v} = \mathbf{v}_{z+1} - \mathbf{v}_z$. L'hypothèse de bord conditionne la structure des matrices \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y , \mathbf{D}_z . En IRM de flux, le sang traverse le volume d'intérêt Γ avec une vitesse non-nulle. Par conséquent, le choix de la condition de bord peut avoir un impact important sur la solution.

Dans le cas de la condition de bord spatiale *libre*, les matrices \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y et \mathbf{D}_z de dimension $N_{sr} \times N_s$ sont Toeplitz à blocs Toeplitz et fortement creuse avec seulement $2N_{sr}$ éléments non-nuls (avec $N_{sr} = (N_x - 1)(N_y - 1)(N_z - 1)$). Ainsi, la matrice $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^t$ est de dimension $N_{sr} \times N_{sr}$ et de rang plein. On pose \mathbf{L} la racine de $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^t$ obtenue par factorisation de Cholesky (matrice triangulaire inférieure de dimension $N_{sr} \times N_{sr}$). Le projecteur $\mathbf{P}_0^{\text{lib}}$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{P}_0^{\text{lib}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_s^t \mathbf{L}^{-t} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_s \quad (8)$$

Le calcul de \mathbf{L} est réalisé une fois pour les N_t temps et le projecteur est calculé à travers la résolution de systèmes linéaires. Song et al. [2] proposent une alternative consistant à diagonaliser la matrice $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^t$ et de l'inverser dans la base des sinus discret.

Par la suite, nous comparons cette condition de bord avec l'hypothèse de bord *circulant*. La structure des matrices \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y et \mathbf{D}_z deviennent circulantes à blocs circulants de dimension $N_s \times N_s$ et de rang $N_s - 1$ (la déficience de rang correspondant aux vecteurs constants). Les matrices \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y et \mathbf{D}_z sont alors diagonalisables dans la base de Fourier 3D (sans considérer le vecteur constant). Cette hypothèse permet un calcul rapide mais n'est pas naturelle aux bords du domaine spatial Γ . En revanche, la périodicité du cycle cardiaque rend cette hypothèse adaptée selon le temps. On peut donc employer les propriétés de diagonalisation sur le filtre temporel $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^t \mathbf{D}_t)^{-1}$.

3 Résultats

3.1 Exemple simulé

Afin de valider notre approche, nous travaillons sur des données synthétiques respectant l'hypothèse d'incompressibilité. La morphologie des artères nous a conduit à la simulation d'un fluide au sein d'un tube cylindrique de rayon 1 cm. La simulation fluide de Womersley [7] propose une solution analytique pour un écoulement instationnaire, visqueux et périodique où la vitesse n'évolue que selon l'axe du tube. Il est alors possible de simuler le flux sanguin à partir du débit [8] sur un cycle cardiaque. Par souci de réalisme, l'orientation du tube a été choisie de manière à ne pas respecter la condition de périodicité aux bords du domaine spatial.

Le champ de vitesse simulé est entaché d'un bruit gaussien centré. Nous avons estimé un RSB de 24,3 dB sur des données d'IRM de flux (SIEMENS Magnetom Aera 1.5T - Résolution : $2,5 \times 2,5 \times 2,8 \text{ mm}^3$). Sachant qu'en IRM de flux, on mesure à la fois le signal anatomique et la vitesse (dans un terme de phase), l'écart-type σ_ν du bruit sur la phase [9] s'écrit :

$$\sigma_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{V_{\text{enc}}}{10^{\text{RSB}/20}} \quad (9)$$

avec V_{enc} la vitesse d'encodage de la séquence d'acquisition. On définit alors le rapport vitesse sur bruit (RVB) tel que :

$$\text{RVB}_{\mathcal{D}}(\mathbf{v}) = 20 \log \frac{\|\mathbf{v}_{\text{th}}\|}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{th}}\|} \quad (10)$$

avec \mathbf{v}_{th} le champ de vitesse théorique et \mathcal{D} le domaine sur lequel est calculé le RVB.

3.2 Analyse quantitative et visuelle

Tout d'abord, on s'intéresse aux performances de débruitage pour une gamme de RSB autour de 24,3 dB (*i.e.*, RVB de 8 dB). Le tableau 1 présente le RVB obtenu après filtrage, soit spatial, soit spatio-temporel pour les hypothèses de bord *circulant* et *libre*. Le RVB est calculé en considérant, soit seulement les vitesses appartenant au domaine fluide RVB_{Ω_f} , soit l'ensemble des vitesses du volume d'intérêt RVB_{Γ} . On note λ_{Ω_f} le paramètre de pénalisation maximisant le RVB sur Ω_f .

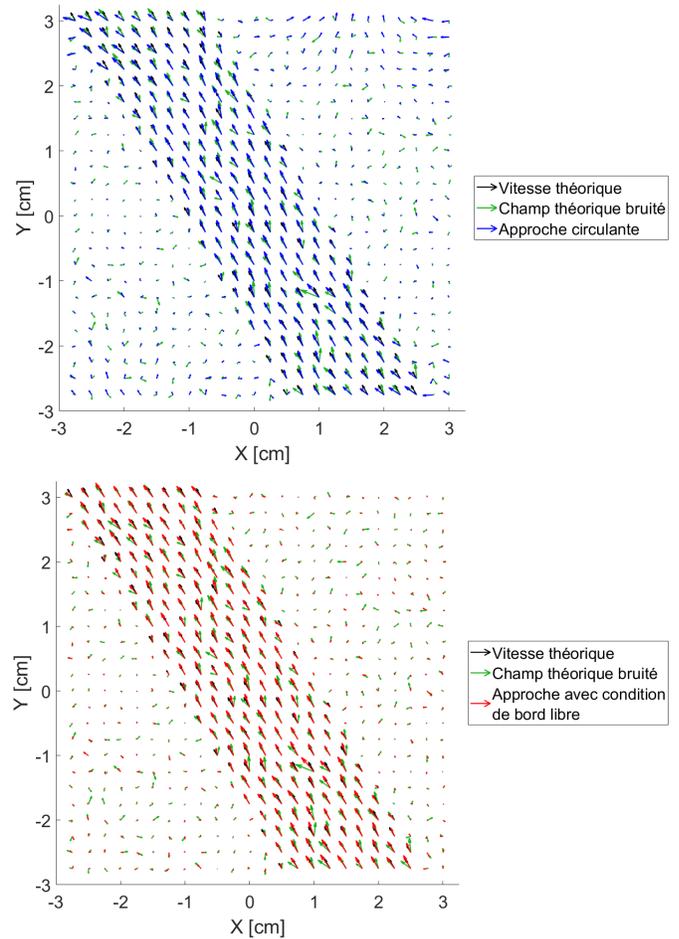


FIGURE 1 – Champs de vitesse théorique (en noir), bruité (en vert) et filtré avec l'hypothèse de bord *circulant* en (a) et *libre* en (b) (Résolution : $2,5 \times 2,5 \text{ mm}^2$; 46 ms et un RVB de 8 dB).

Le tableau 1 montre d'une part que l'hypothèse de bord *libre* permet d'atteindre des RVB significativement plus élevés que l'hypothèse *circulante* quel que soit le RVB des données. Ces

RVB des données sur Γ [dB]	Hypothèse de bord	Filtrage spatial $\lambda = 0$		Filtrage spatio-temporel $\lambda \neq 0$	
		$\text{RVB}_{\Gamma}(\mathbf{v})$	$\text{RVB}_{\Omega_f}(\mathbf{v})$	$\text{RVB}_{\Gamma}(\mathbf{v})$ avec λ_{Ω_f}	$\text{RVB}_{\Omega_f}(\mathbf{v})$ avec λ_{Ω_f}
5	<i>libre</i>	7,6	12	10,3	13,9
	<i>circulant</i>	5,6	9,9	6,9	10,7
8	<i>libre</i>	10,5	14,7	12,4	16,2
	<i>circulant</i>	7,2	11,3	7,7	11,6
11	<i>libre</i>	13,5	17,7	14,7	18,3
	<i>circulant</i>	8,2	12,3	8,4	12,3

TABLE 1 – Rapport Vitesse sur Bruit [dB] après filtrage spatial et spatio-temporel selon les hypothèses de bord *libre* et *circulant*.

résultats se confirment visuellement sur les figures 1(a) et 1(b) obtenues avec le paramètre λ_{Ω_f} . L'hypothèse de bord *circulant* crée une continuité artificielle entre les bords du domaine Γ , qui explique les mauvaises performances obtenues. D'autre part, on note que le filtrage spatio-temporel présente de meilleurs RVB que le filtrage spatial quel que soit le RVB des données.

Par ailleurs, les filtrages spatial et spatio-temporel présentent de meilleurs résultats lorsque le RVB est calculé sur la zone fluide Ω_f plutôt que sur le volume d'intérêt Γ . Ceci s'explique par le fait que l'énergie du champ de vitesse théorique est nulle dans la zone hors-fluide et non nulle sur Ω_f . L'énergie du signal $\|\mathbf{v}_{th}\|$ est la même pour Γ et Ω_f alors que l'énergie du bruit résiduel $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{th}\|$ n'est pas estimée sur le même nombre de pixel. Compte tenu de l'application de ces travaux, l'analyse doit être concentrée sur la zone fluide Ω_f .

Enfin, nous avons observé qu'au delà d'un certain RVB appliqué aux données, les performances se dégradent jusqu'à atteindre des RVB après filtrage inférieurs à ceux des données. Comme l'illustre le tableau 1, pour des données avec un RVB de 8 et 11 dB, toutes les approches employant l'hypothèse *circulante* détériorent le RVB_{Γ} . En ce qui concerne l'hypothèse de bord *libre*, les filtrages spatial et spatio-temporel ont un effet positif jusqu'à $\text{RVB}_{\Omega_f} = 28,8$ dB. Ceci s'explique d'une part par le caractère approché de la prise en compte de l'incompressibilité : l'annulation de la divergence est une propriété exacte de la vitesse du fluide mais nous l'approchons sur une grille discrète grossière. D'autre part, la méconnaissance de la paroi et la non prise en compte de son existence introduit une erreur. En effet, la différence de milieu entre Ω_f et la zone hors-fluide implique une discontinuité de la divergence sur les bords de la paroi. Cette hypothèse est d'autant plus importante que certains bio-marqueurs locaux comme le cisaillement à la paroi pourraient en être impactés.

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté une solution de filtrage permettant d'augmenter le rapport vitesse sur bruit dans le contexte de l'IRM de flux 4D. Les perspectives de ce travail consisteront d'une part à estimer le champ de vitesse sur une grille plus fine que la grille d'acquisition et d'autre part à gérer l'existence d'une paroi. Cela permettrait une prise en compte plus précise de la contrainte d'incompressibilité et plus particulièrement aux bords. Ainsi, on augmenterait la précision de

bio-marqueurs locaux tels que le cisaillement à la paroi.

Remerciements

Les travaux présentés ont été partiellement financés par la Région Pays de la Loire dans le cadre du projet MRI-Quantif.

Références

- [1] M. Markl, A. Frydrychowicz, S. Kozerke, M. Hope et O. Wieben, « 4D flow MRI », *J. Magn. Reson. Imaging*, vol. 36, n°5, pp. 1015–1036, 2012.
- [2] S. M. Song, S. Napel, G. H. Glover et N. J. Pelc, « Noise reduction in three-dimensional phase-contrast MR velocity measurements », *J. Magn. Reson. Imaging*, vol. 3, n°4, pp. 587–596, 1993.
- [3] J. Busch, D. Giese, L. Wissmann et S. Kozerke, « Reconstruction of divergence-free velocity fields from CINE 3D phase-contrast flow measurements », *Magn. Reson. Med.*, vol. 69, n°1, pp. 200–210, 2013.
- [4] E. Bostan, M. Unser et J. P. Ward, « Divergence-free wavelet frames », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, n°8, pp. 1142–1146, 2015.
- [5] P. D. Tafti et M. Unser, « On regularized reconstruction of vector fields », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 20, n°11, pp. 3163–3178, 2011.
- [6] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci et P.-T. Bremer, « The Helmholtz-Hodge decomposition - a survey », *IEEE Trans. Visual. Comp. Graph.*, vol. 19, n°8, pp. 1386–1404, 2013.
- [7] J. R. Womersley, « Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known », *J. Physiol.*, vol. 127, n°3, pp. 553–563, 1955.
- [8] C. Puelz, S. Čanić, B. Rivière et C. G. Rusin, « Comparison of reduced models for blood flow using Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods », *Appl. Num. Math.*, vol. 115, pp. 114 – 141, 2017.
- [9] A. H. Andersen et J. E. Kirsch, « Analysis of noise in phase contrast MR imaging », *Med. Phys.*, vol. 23, n°6, pp. 857–869, 1996.