



HAL
open science

Écoulement transitoire d'un fluide viscoélastique linéaire en milieu poreux

Bakhtiyor Khuzhayorov, Jean-Louis Auriault, Pascale Royer

► **To cite this version:**

Bakhtiyor Khuzhayorov, Jean-Louis Auriault, Pascale Royer. Écoulement transitoire d'un fluide viscoélastique linéaire en milieu poreux. 4èmes Journées d'Etude sur les Milieux Poreux, Jun 1999, Nancy, France. hal-01718836

HAL Id: hal-01718836

<https://hal.science/hal-01718836>

Submitted on 27 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Écoulement transitoire d'un fluide viscoélastique linéaire en milieu poreux

B. Khuzhayorov

Uzbekistan Academy of Sciences, Division of Samarkand, 3 Temur Malik Street, Samarkand City, Republic of Uzbekistan.

J.-L. Auriault

Laboratoire "Sols, Solides, Structures", UJF, INPG, CNRS UMR 5521, BP 53X, 38041 Grenoble cedex, France. Jean-Louis.Auriault@hmg.inpg.fr

P. Royer

Laboratoire "Sols, Solides, Structures", UJF, INPG, CNRS UMR 5521, BP 53X, 38041 Grenoble cedex, France. Pascale.Royer@hmg.inpg.fr

1 Introduction

Le but de cette étude est de déterminer une loi de filtration pour décrire l'écoulement transitoire d'un fluide viscoélastique linéaire en milieu poreux. Pour cela on utilise une méthode d'homogénéisation : le comportement macroscopique est déterminé à partir de la description à l'échelle des pores. On montre que, dans l'espace de Fourier, la loi de filtration macroscopique ainsi obtenue est une loi de Darcy généralisée avec un tenseur de perméabilité dynamique.

2 Description locale et estimations

On considère un milieu poreux rigide périodique. La période Ω est $O(l)$ et caractérise l'échelle des pores. Sur cette période, le solide et l'espace poreux occupent respectivement les domaines Ω_s et Ω_l et leur frontière commune est désignée par Γ .

Soit L la longueur caractéristique macroscopique. La condition fondamentale qui doit être vérifiée pour pouvoir appliquer la méthode d'homogénéisation est la séparation des échelles : $\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1$. L'espace poreux est saturé par un fluide viscoélastique linéaire incompressible. Pour un écoulement lent (c.-à-d. à faible nombre de Reynolds), la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\tau}. \quad (1)$$

Pour un fluide viscoélastique linéaire, le déviateur des contraintes, $\tilde{\tau}$, est tel que :

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} + (\lambda_2)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tau}}{\partial t^2} + \dots (\lambda_n)^n \frac{\partial^n \tilde{\tau}}{\partial t^n} = 2\mu \left(\tilde{D} + \theta_1 \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} + (\theta_2)^2 \frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial t^2} + \dots (\theta_n)^n \frac{\partial^n \tilde{D}}{\partial t^n}, \right) \quad (2)$$

où les λ_k et les θ_k , ($k = 1, \dots, n$) sont respectivement les temps caractéristiques de relaxation et de retard. Notons que le modèle viscoélastique linéaire (1-2) est valide si tous les temps de relaxation et de retard sont petits par rapport au temps caractéristique de l'écoulement :

$$\lambda_k \ll \frac{l}{V}, \quad \theta_k \ll \frac{l}{V}, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3)$$

La description locale de l'écoulement s'écrit :

$$\rho \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^k \frac{\partial^{k+1} \vec{v}}{\partial t^{k+1}} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\vec{\nabla} p) - \mu \sum_{k=1}^n (\theta_k)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\Delta \vec{v}) + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}. \quad (6)$$

Pour obtenir des effets viscoélastiques à l'échelle macroscopique, les temps caractéristiques de relaxation et de retard doivent être du même ordre de grandeur que le temps caractéristique dynamique T , introduit par le terme $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. On considère donc le cas où :

$$\frac{T}{\lambda_k} = O(1), \quad \frac{T}{\theta_k} = O(1) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (4) introduit les nombres adimensionnels suivants :

$$Q = \frac{|\vec{\nabla} p|}{|\mu \Delta \vec{v}|}, \quad Re_t = \frac{|\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}|}{|\mu \Delta \vec{v}|}, \quad \Lambda_k = \frac{|\vec{\nabla} p|}{|(\lambda_k)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\vec{\nabla} p)|}, \quad \Theta_k = \frac{|\mu \Delta \vec{v}|}{|\mu (\theta_k)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\Delta \vec{v})|} \quad (8)$$

On montre que si on prend L comme longueur caractéristique de référence, l'ordre de grandeur de Q correspondant est $Q_L = O(\varepsilon^{-2})$. D'autre part on montre qu'un régime transitoire à l'échelle macroscopique implique : $Re_{tL} = O(\varepsilon^{-2})$. Enfin, compte tenu de (7), il vient : $\Lambda_{k_L} = O(1)$, $\Theta_{k_L} = O(1)$. On déduit de ces ordres de grandeur la description locale normalisée. Dans l'espace de Fourier, elle s'écrit :

$$\tilde{\rho}\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \varepsilon^2\tilde{\mu}\Delta\vec{v}, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (10)$$

$$\vec{v}/\Gamma = \vec{0}, \quad (11)$$

où

$$\tilde{\rho} = i\omega\rho, \quad \tilde{\mu} = \mu S(i, \omega), \quad S(i, \omega) = \frac{1 + \theta_1 i\omega + (\theta_2 i\omega)^2 + \dots (\theta_n i\omega)^n}{1 + \lambda_1 i\omega + (\lambda_2 i\omega)^2 + \dots (\lambda_n i\omega)^n}. \quad (12)$$

3 Comportement macroscopique

La méthode d'homogénéisation utilisée est basée sur le petit paramètre ε caractérisant la séparation des échelles. La pression et la vitesse, sont recherchées sous forme de développements asymptotiques en puissances de ε . L'homogénéisation conduit au comportement macroscopique suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (13)$$

où \vec{V} est la vitesse macroscopique de filtration du fluide et est définie par :

$$\vec{V} = -\tilde{K}(\omega)\vec{\nabla}p. \quad (14)$$

Le tenseur de perméabilité dynamique $\tilde{K}(\omega)$ est défini par

$$\tilde{K} = \langle \tilde{k} \rangle_\Omega, \quad \langle \cdot \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_i} \cdot d\Omega, \quad (15)$$

où les k_{ij} sont solutions d'un problème aux limites défini sur la période Ω . L'équation (14) est la loi de Darcy généralisée (Auriault, 1980). \tilde{K} est un tenseur du second ordre qui est symétrique, complexe et dépendant de la pulsation. $\tilde{K}(\omega = 0)$ est la perméabilité intrinsèque. On montre de plus que \tilde{K} est inversible et on désigne par \tilde{H} son inverse, $\tilde{H}(\omega) = \tilde{K}^{-1}(\omega) = \tilde{H}_r + i\tilde{H}_i$. La loi de filtration peut ainsi se réécrire, n désignant la porosité :

$$\vec{\nabla}_x(np) = -n\tilde{H}_r(\omega)\vec{V} - n\frac{\tilde{H}_i(\omega)}{\omega}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}. \quad (16)$$

Sous cette forme, la loi de filtration exprime la conservation de la quantité de mouvement : la contrainte np exprime la contrainte partielle du fluide, le terme $n\tilde{H}_r(\omega)$ caractérise la dissipation visqueuse du fluide et $n\frac{\tilde{H}_i(\omega)}{\omega}$ est la masse volumique apparente du fluide dans le milieu poreux.

4 Conclusion

Bien que valable pour une classe de fluides très réduite et sous des conditions restrictives, le modèle de filtration que nous proposons est cependant robuste dans son domaine de validité. Ce domaine de validité est défini par l'intermédiaire des ordres de grandeur des nombres adimensionnels. Les comportements décrits par (16) sont très sensibles aux propriétés visco-élastiques du fluide.

Références bibliographiques

- J.-L. AURIAULT (1980) : Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid. *Int. J. Eng. Sc.*, 18, pp. 775-785.
- M. LÓPEZ DE HARO, J.A. DEL RÍO, and S. WHITAKER, Flow of Maxwell Fluids in Porous Media. *Transport in Porous Media*, 25, 2, pp. 167-192, 1996.
- J.-L. AURIAULT, Heterogeneous medium: Is an equivalent description possible?. *International Journal of Engineering Science*, 29, pp. 785-795, 1991.