HAL open science

Synthèse modale probabiliste de systèmes à plusieurs degrés de liberté

Sylvain Dubreuil, Franck Petitjean, Michel Salaün

To cite this version:

Sylvain Dubreuil, Franck Petitjean, Michel Salaün. Synthèse modale probabiliste de systèmes à plusieurs degrés de liberté. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01717838

HAL Id: hal-01717838

https://hal.science/hal-01717838v1

Submitted on 26 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2013
11e Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2013

Synthèse modale probabiliste de systèmes à plusieurs degrés de liberté

Sylvain DUBREUIL [1], Franck PETITJEAN [2], Michel SALAÜN [3]

[1] Institut Clément Ader (ICA) et Institut Catholique d'Arts et Métiers (ICAM), sylvain.dubreuil@isae.fr
[2] Institut Catholique d'Arts et Métiers (ICAM), frank.petitjean@icam.fr
[3] Institut Clément Ader (ICA), ISAE, michel.salaun@isae.fr

Résumé — Notre travail concerne les études dynamiques basse fréquence de satellites. Le but est d'étendre l'analyse modale en prenant en compte les incertitudes sur les paramètres d'entrée du modèle. Pour cela, l'approche probabiliste a été choisie. Les paramètres incertains du modèle sont donc définis par des variables aléatoires de lois connues. L'objectif de cette analyse est de déterminer la variabilité d'une fonction de réponse en fréquence (FRF) entre deux points de la structure. Nous supposons qu'il est possible d'identifier les lois de probabilité des valeurs propres du système et que l'amortissement modal est déterministe. Nous présentons une expression analytique des densités de probabilité de la FRF, ainsi qu'une méthodologie permettant de les calculer y compris dans le cas où les valeurs propres sont corrélées.
Mots clés — synthèse modale, dynamique, fiabilité, modèle probabiliste

1 Oscillateur harmonique de pulsation propre aléatoire

Dans le cas déterministe, le point de départ de la synthèse modale est l'étude de l'oscillateur à un degré de liberté. Sa fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{-\omega^2 + \underline{\lambda}}{(-\omega^2 + \underline{\lambda})^2 + (d\omega)^2} + j\frac{-d\omega}{(-\omega^2 + \underline{\lambda})^2 + (d\omega)^2} \quad ,$$

avec $j^2 = -1$, ω la pulsation considérée, d le terme d'amortissement et $\underline{\lambda}$ le carré de la pulsation propre.

Les incertitudes sur les propriétés de l'oscillateur (masse et raideur) vont conduire à une pulsation propre aléatoire. On note λ la variable aléatoire modélisant le carré de la pulsation propre aléatoire, de densité de probabilité p_λ et $H(\omega)$ la fonction de transfert aléatoire correspondante. On considère l'amortissement d comme déterministe. Heinkelé [1] propose d'utiliser les résultats classiques sur les transformations de variables aléatoires pour obtenir les expressions des densités de probabilité des parties réelle et ima–ginaire de $H(\omega)$ et il obtient :

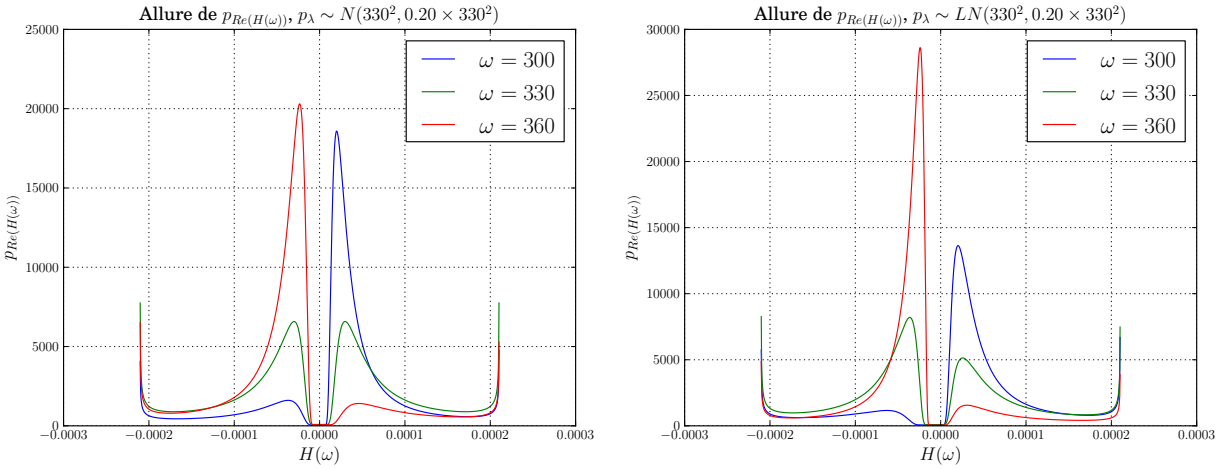
$$\begin{aligned} p_{Re(H)}(Re(h);\omega,d) = & \frac{\left(1+\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2}\right)^2}{2Re(h)^2(1-4Re(h)^2d^2\omega^2+\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2})} p_\lambda\left(\omega^2 + \frac{1+\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2}}{2Re(h)}\right) \\ & + \frac{\left(-1+\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2}\right)^2}{2Re(h)^2(-1+4Re(h)^2d^2\omega^2+\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2})} p_\lambda\left(\omega^2 + \frac{1-\sqrt{1-4Re(h)^2d^2\omega^2}}{2Re(h)}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned} p_{Im(H)}(Im(h);\omega,d) \quad = \quad & \frac{\sqrt{d\omega}}{-2Im(h)\sqrt{-Im(h)d\omega(1+Im(h)d\omega)}} \\ & \left[p_\lambda\left(\omega^2 + \frac{\sqrt{-Im(h)d\omega(1+Im(h)d\omega)}}{Im(h)}\right) + p_\lambda\left(\omega^2 - \frac{\sqrt{-Im(h)d\omega(1+Im(h)d\omega)}}{Im(h)}\right)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Dans [1], ces expressions sont calculées analytiquement lorsque p_λ est une densité uniforme. Mais leur généralisation est possible numériquement si la variable aléatoire λ est de moment d'ordre 2 fini. En pratique, cette hypothèse est réaliste, les variations de la pulsation propre étant dues aux variations

des paramètres d'entrée du modèle, qui sont bornées ici. Ainsi, l'intégration numérique de ces densités donne accès aux grandeurs caractéristiques (moyenne, écart type, quantiles à $x\%$). L'analyse des parties réelle et imaginaire étant relativement similaire, dans la suite, nous ne traiterons que celle de la partie réelle. La figure 1 illustre l'allure de la fonction $p_{Re(H)}(Re(h);\omega,d)$ pour différentes valeurs de ω et un amortissement $d = 0,02\sqrt{E[\lambda]}$.

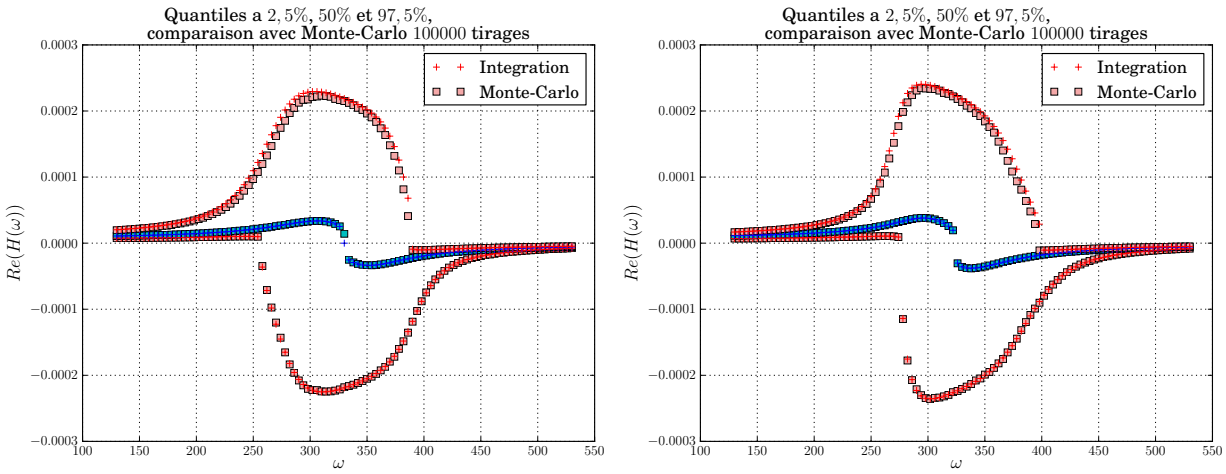


i) ii)

Fig. 1 – Allure de la densité de la partie réelle de la fonction de transfert d'un oscillateur de valeur propre aléatoire lorsque : i) p_λ suit une loi normale de moyenne 330^2 et de coefficient de variation $0,2$; ii) p_λ suit une loi log-normale de mêmes paramètres.

On pourra noter que lorsque λ suit une loi log-normale, donc non symétrique par rapport à sa moyenne, la densité de la partie réelle de la FRF pour $\omega = \sqrt{E[\lambda]}$ n'est plus symétrique par rapport à 0. On remarquera également que lorsque ω s'éloigne de $\sqrt{E[\lambda]}$, la densité de la FRF tend vers une densité de Dirac en 0. Ainsi, nous pouvons définir une bande de fréquence où l'oscillateur aura une densité de probabilité non négligeable.

La figure 2 présente les quantiles à $2,5\%$, 50% et $97,5\%$ obtenus par intégration numérique de ces densités, comparés avec une simulation issue de 100000 tirages de Monte-Carlo.



i) ii)

Fig. 2 – Quantiles à $2,5\%$, 50% et $97,5\%$ - Comparaison entre intégration numérique et simulations de Monte-Carlo : i) p_λ suit une loi normale ; ii) p_λ suit une loi log-normale.

L'intégration numérique est effectuée par la méthode des trapèzes (le nombre de points varie en fonction de la pulsation considérée). La densité de probabilité (1) ayant des limites infinies aux bords de son domaine, ces zones sont intégrées de façon analytique en considérant un équivalent. Les résultats

présentés sur la figure 2 montrent que l'on peut être confiant quant à la précision de la méthode.

Afin d'adapter la méthode de synthèse modale au cadre probabiliste, nous présentons maintenant une généralisation de ces résultats à un système à plusieurs degrés de liberté (ddl).

2 Système à plusieurs ddl.

2.1 Synthèse modale

On considère le modèle mécanique d'une structure obtenu par discrétisation éléments finis. On note $[\underline{\mathtt{M}}]$, $[\underline{\mathtt{K}}]$ et $[\underline{\mathtt{D}}]$ les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du modèle moyen. Ce modèle moyen est le modèle mécanique pour lequel les variables aléatoires modélisant les paramètres d'entrée, sont remplacées par leurs valeurs moyennes. L'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel s'écrit alors :

$$(-\omega^2 [\underline{\mathtt{M}}] + j\omega [\underline{\mathtt{D}}] + [\underline{\mathtt{K}}])\, \underline{y}(\omega) = \underline{f}(\omega) \ , \tag{3}$$

où $\underline{y}(\omega)$ est le vecteur des ddl moyens et $\underline{f}(\omega)$ le vecteur des efforts extérieurs moyens appliqués aux ddl de la structure. La synthèse modale s'appuie sur la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(-\omega^2 [\underline{\mathtt{M}}] + [\underline{\mathtt{K}}])\, \underline{y} = 0 \ . \tag{4}$$

L'intérêt de la synthèse modale est de sélectionner une base de vecteurs propres $[\underline{\varphi}]$ de dimension N faible devant le nombre total de ddl de la structure. On notera $\underline{\lambda_k}$,$k = 1, \cdots, N$, les valeurs propres correspondantes. En effet, les premiers modes suffisent à décrire le comportement basse fréquence de la structure. La projection de l'équation (3) dans cette base conduit à une réduction du problème étudié. En faisant l'hypothèse que la matrice d'amortissement se diagonalise également dans la base $[\underline{\varphi}]$ (hypothèse de Basile communément admise), la matrice des fonctions de transfert du système réduit est diagonale. Son terme diagonal s'écrit :

$$[\underline{H}]_{kk}(\omega) = \frac{-\omega^2 + \underline{\lambda_k}}{(-\omega^2 + \underline{\lambda_k})^2 + (d_k\omega)^2} + j\frac{-d_k\omega}{(-\omega^2 + \underline{\lambda_k})^2 + (d_k\omega)^2} \ , \tag{5}$$

où l'on reconnaît l'équation de l'oscillateur décrit dans la première partie. Ainsi, la fonction de transfert entre deux ddl a et b de la structure s'écrit : $[\underline{F}]_{ab} = \sum_{i=1}^{N} [\underline{H}]_{ii} [\underline{\varphi}]_{bi} [\underline{\varphi}]_{ai}$.

Les incertitudes sur les paramètres d'entrée de la structure vont conduire à un problème aux valeurs propres aléatoires. Afin de simplifier le problème, nous faisons l'hypothèse que la base des vecteurs propres aléatoires reste proche de la base moyenne $[\underline{\varphi}]$. Ainsi l'aléa est uniquement porté par la matrice des fonctions de transfert aléatoires $[\mathbf{H}]$ dont chaque terme diagonal est un oscillateur aléatoire étudié dans la première partie. Nous considérons donc le vecteur aléatoire $Re(\{\mathbf{H}\})$ de densité jointe $p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\}))$. La transformation permettant de calculer la fonction de transfert entre deux ddl a et b étant une combinaison linéaire des variables aléatoires de ce vecteur, la fonction caractéristique de $Re(F_{ab})$ s'écrit :

$$\Phi_{Re(F_{ab})}(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(j < v, \sum_{i=1}^{N} Re(h_i)[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai} >) p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\}))\mathrm{d}Re(\{\mathbf{h}\}) \ . \tag{6}$$

Une fois cette fonction caractéristique calculée, la formule de Gil-Pelaez [2] permet d'obtenir la fonction de répartition de la distribution selon :

$$P[Re(F_{ab}) < Re(f_{ab})] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Im[e^{-jf_{ab}v}\Phi_{Re(F_{ab})}(v)]}{v}\mathrm{d}v \ . \tag{7}$$

En pratique nous utilisons la formule donnée dans [3]. L'équation (6) est une intégrale de dimension N relativement à la densité jointe du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$. Il est donc important de connaître la structure de dépendance de ce vecteur.

2.2 Cas indépendant

Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que les oscillateurs aléatoires composant le vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$ sont indépendants. Ceci revient à considérer que les valeurs propres du système sont indépendantes. Dans ce cas, l'expression (6) se découple en un produit de N intégrales de dimension un :

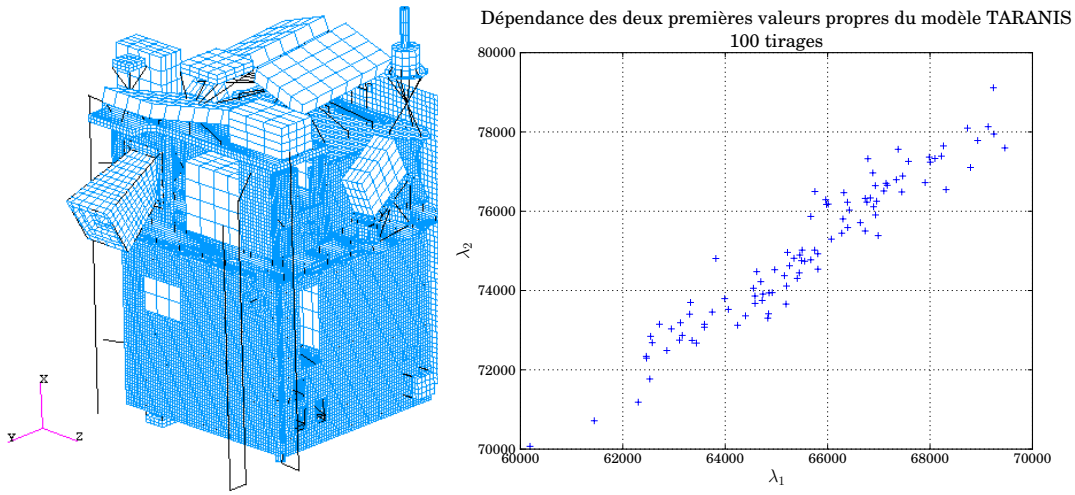
$$\Phi_{Re(F_{ab})}(v) = \prod_{i=1}^{N} \int_{\frac{-1}{2d_i\omega}}^{\frac{1}{2d_i\omega}} \exp(jv[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}Re(h_i))p_{Re(H_i)}(Re(h_i))\mathrm{d}Re(h_i) \quad , \tag{8}$$

puis en faisant le changement de variable : $y_i = [\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}Re(h_i)$ lorsque $[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}Re(h_i) \neq 0$, et en notant que : $\int_{\frac{-1}{2d_i\omega}}^{\frac{1}{2d_i\omega}} \exp(jv[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}s_i)p_{Re(H_i)}(Re(h_i))\mathrm{d}Re(h_i) = 1$ si $[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}Re(h_i) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_{Re(F_{ab})}(v) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}|} \int_{\frac{-[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}}{2cw}}^{\frac{[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}}{2d_iw}} \exp(jvy_i)p_{Re(H_i)}\left(\frac{y_i}{[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}}\right)\mathrm{d}y_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|[\underline{\varphi}]_{bi}[\underline{\varphi}]_{ai}|}\Phi_{Re(H_i)}(v) \quad .\end{aligned} \tag{9}$$

Le calcul des fonctions caractéristiques $\Phi_{Re(H_i)}(v)$ est effectué par transformée de Fourier rapide, ce qui permet un calcul performant de $\Phi_{Re(F_{ab})}(v)$.

Cependant, la simplification faite en considérant l'indépendance des valeurs propres semble difficilement justifiable sur les cas réels. À titre d'exemple, la figure 3 ii) montre la dépendance des deux premières valeurs propres du satellite TARANIS (figure 3 i)). Ces résultats sont obtenus alors que les paramètres d'entrée du modèle (matériaux et géométriques) sont des variables aléatoires indépendantes. C'est pourquoi nous allons devoir prendre en compte la dépendance des valeurs propres et observer son influence sur la dispersion de la fonction de réponse en fréquence.



i) ii)

Fig. 3 – i) Modèle éléments finis du satellite TARANIS. ii) Allure de la dépendance des deux premières valeurs propres du modèle.

2.3 Modélisation de la structure de dépendance

Dans cette partie, nous développons les calculs pour $N = 2$ afin de simplifier les écritures, la généralisation étant immédiate. De plus, en pratique, le cas $N = 2$ risque d'être le plus fréquemment rencontré car la dépendance des valeurs propres ne doit être modélisée que si les modes concernés interviennent sur la même bande de fréquences. Nous nous intéressons donc à la loi jointe des FRF de deux oscillateurs aléatoires exprimée sous la forme d'un vecteur aléatoire $Re(\{\mathbf{H}\})$ dont on connaît les densités marginales explicitées dans la partie 1. Pour cela, nous proposons d'utiliser la théorie des copules, présentée dans

[4] et dont on trouvera une description très accessible dans [5]. En effet, un résultat appelé théorème de Sklar [4] permet de modéliser la dépendance des valeurs propres.

Ce théorème dit que la densité de probabilité p d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{X_1, X_2\}$, de densité marginales p_1 et p_2 s'écrit : $p(x_1,x_2) = p_1(x_1) \times p_2(x_2) \times c(F_1(x_1), F_2(x_2))$ avec $c(u_1,u_2) = \dfrac{\partial C_{u_1,u_2}(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$, où $C_{u_1,u_2}(u_1,u_2)$ est la copule modélisant la structure de dépendance du vecteur.

On suppose donc qu'il est possible d'identifier (par exemple via un nombre raisonnable de simulations du problème aux valeurs propres) les densités marginales des valeurs propres ainsi que leur structure de dépendance. Pour exprimer la densité jointe du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$, nous utilisons les résultats classiques sur les transformations de variables aléatoires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que les résultats sur les transformations de copule présentés dans [4]. Ces derniers sont développés pour des transformations monotones et leur extension au cas de la transformation non-monotone (5) est la principale difficulté de cette application.

On appelle $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire $[\lambda_1, \lambda_2]$ de densité jointe $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ et on cherche à calculer la loi $P_{\mathbf{Y}}$ de $\mathbf{Y}$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow [-1/(2d_1\omega), 1/(2d_1\omega)] \times [-1/(2d_2\omega), 1/(2d_2\omega)] \\ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= Y = \begin{pmatrix} Re(H_1) = \mathcal{F}(x_1\,; d_1, \omega) \\ Re(H_2) = \mathcal{F}(x_2\,; d_2, \omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1/(2d\omega), 1/(2d\omega)] \\ \mathcal{F}(\lambda; d, \omega) &= Re(H) = \frac{-\omega^2 + \lambda}{(-\omega^2+\lambda)^2 + (d\omega)^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Finalement, en appliquant un calcul de loi image, nous obtenons l'expression de la densité jointe du vecteur aléatoire $\mathbf{Y}$ en fonction des transformations précédentes, des densités marginales des valeurs propres et de la copule modélisant leur structure de dépendance. Cette expression peut ensuite être uti–lisée afin de calculer numériquement la fonction caractéristique (6).

Nous allons maintenant utiliser cette méthodologie, notamment dans la détermination de certains quantiles de la partie réelle d'une FRF.

3 Résultats numériques

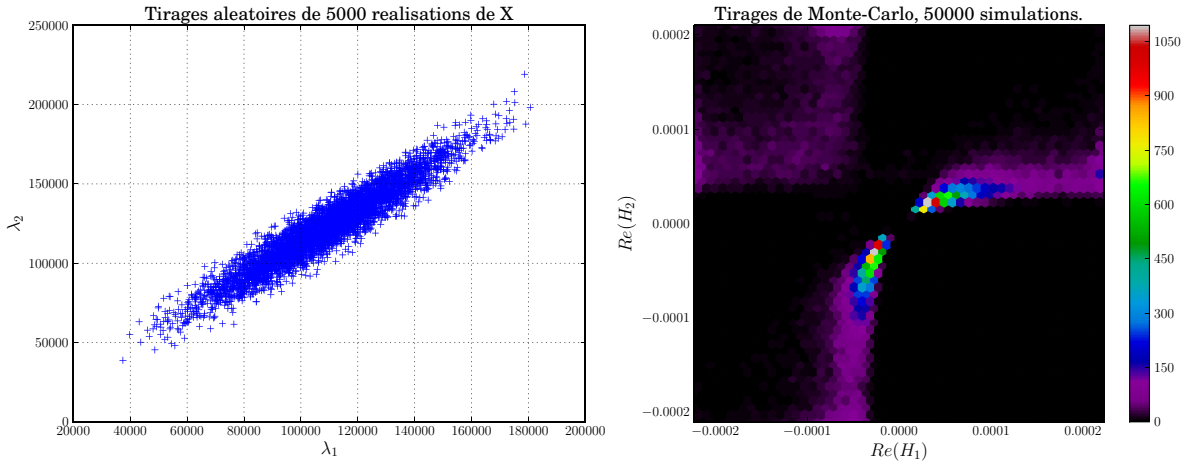
Nous considérons deux oscillateurs aléatoires de valeurs propres aléatoires λ_1 et λ_2. La densité jointe de ces deux oscillateurs est $p_{\mathbf{X}}(x) = p_{\lambda_1}(\lambda_1) \times p_{\lambda_2}(\lambda_2) \times c(F_{\lambda_1}(x_1), F_{\lambda_2}(x_2))$, où p_{λ_1} et p_{λ_2} sont les densités marginales, $F_{\lambda 1}$ et $F_{\lambda 2}$ les fonctions de répartitions marginales et c la dérivée par rapport à λ_1, λ_2 de la copule C modélisant la structure de dépendance entre les valeurs propres.

3.1 Structure de dépendance du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$

Pour illustrer notre propos, nous considérons le cas suivant :
- p_{λ_1} est une densité normale de moyenne 330^2 et de coefficient de variation $0,2$;
- p_{λ_2} est une densité normale de moyenne 350^2 et de coefficient de variation $0,2$;
- C est une copule gaussienne, de paramètre $\tau = 0,95$, appelé coefficient de corrélation de Kendall. Nous ne détaillerons pas ici les paramètres des copules, ceux-ci peuvent être trouvés par exemple dans [4]. La figure 4 i) illustre la modélisation stochastique choisie pour les valeurs propres. Cette modélisation semble réaliste au vu du résultat sur une structure réelle présenté figure 3 ii).

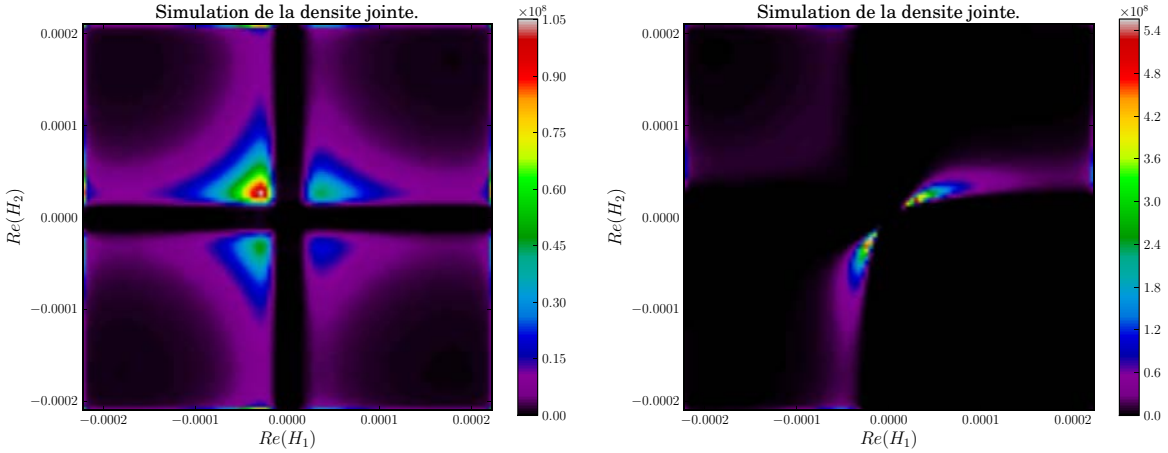
Nous nous intéressons maintenant à la loi jointe du vecteur aléatoire $Re(\{\mathbf{H}\}) = \{Re(H_1), Re(H_2)\}$. Pour cela, nous appliquons la formule de transformation de copule mise en place dans la section précédente. Nous présentons les résultats pour $\omega = 340$. La figure 4 ii) est obtenue par une simulation de Monte-Carlo de 50000 tirages. La représentation choisie permet de visualiser la densité jointe empirique. Les figures 5 i) et 5 ii) représentent les densités de probabilités obtenues sans prendre en compte la corrélation (*i.e.* $p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\})) = p_{Re(H_1)}(h_1) \times p_{Re(H_2)}(h_2)$), et en la prenant en compte.

Il apparaît clairement que la corrélation des valeurs propres entraîne une dépendance importante de $Re(H_1)$ et $Re(H_2)$. De plus, la comparaison des figures 4 ii) et 5 ii) valide la méthode de transformation de copule. Cependant, s'il est clair que la densité jointe de $Re(\{\mathbf{H}\})$ est modifiée par la corrélation des valeurs propres, il reste à observer l'influence de celle-ci sur les variations d'une FRF.



i) ii)

Fig. 4 – i) Modélisation des valeurs propres - ii) Tirage de Monte-Carlo du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$.



i) ii)

Fig. 5 – Allure de la densité de probabilité jointe de $Re(\{\mathbf{H}\})$: i) sans corrélation ; ii) avec prise en compte de la corrélation.

3.2 Influence de la corrélation des valeurs propres sur les variations d'une FRF.

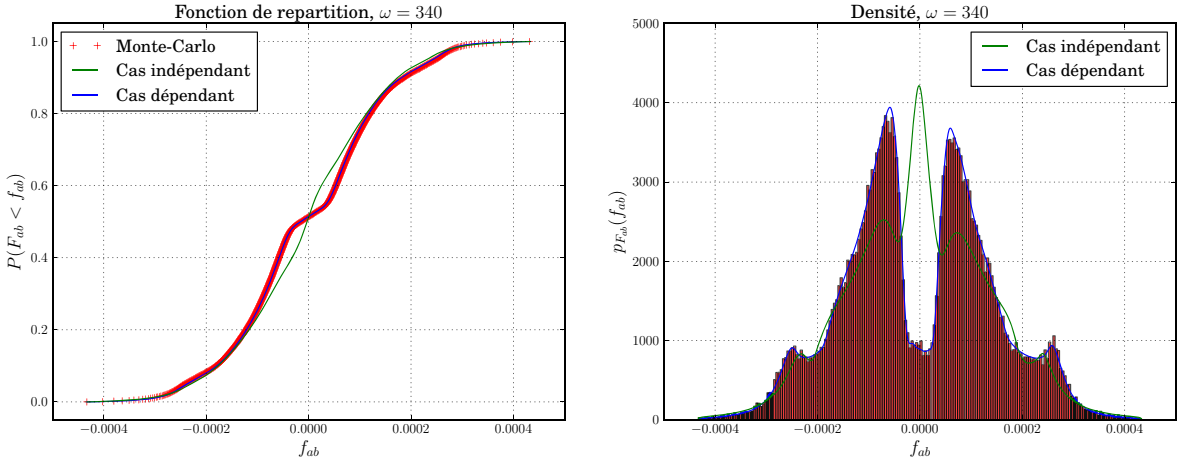
Nous allons maintenant utiliser le calcul de la fonction caractéristique d'une FRF entre deux ddl a et b et son inverse. Afin d'illustrer l'influence de la dépendance des valeurs propres, nous nous plaçons dans le cas précédent et nous choisissons les coefficients de la base modale $[\underline{\varphi}]_{ai}$ et $[\underline{\varphi}]_{bi}$, $i = 1,2$, constants et égaux à un.

Avec l'hypothèse d'indépendance, nous effectuons le calcul de la fonction caractéristique (9) par transformée de Fourier rapide puis son inverse par transformée de Fourier rapide inverse. L'intégration numérique de la densité obtenue permet d'accéder aux quantiles souhaités.

La prise en compte de la corrélation entre les valeurs propres se fait par le calcul d'une intégrale double pour la fonction caractéristique. Numériquement, le calcul de cette intégrale se fait par un découpage

en quadrangles du domaine, la taille des quadrangles étant adaptée au gradient de la fonction. Comme dans le cas en une dimension, les bords du domaine sont intégrés de façon semi-analytique.

La figure 6 i) présente les fonctions de répartition obtenues sans prise en compte de la corrélation (courbe verte), avec modélisation de la corrélation par une copule (courbe bleue) et enfin par simulation de Monte-Carlo (courbe rouge, 1000000 de tirages).



i) ii)

Fig. 6 – i) Fonctions de répartition obtenues en prenant en compte, ou non, la corrélation des valeurs propres - ii) Densité de probabilité empirique et densités calculées dans les cas corrélé et indépendant.

Il est clair que la structure de dépendance des valeurs propres modifie la fonction de répartition et que la méthode d'intégration en deux dimensions de la fonction caractéristique est efficace. Afin de valider la méthode de calcul de la fonction caractéristique dans le cas corrélé, nous pouvons également calculer la densité de probabilité $p_{F_{ab}}$ grâce à la formule sommatoire de Poisson [6], qui donne ici : $p_{F_{ab}}(f_{ab}) \approx \frac{h}{\pi}\sum_{k=0}^{K}\Phi_{Re(F_{ab})}(kh)\exp(-jkhf_{ab})$, où h est le pas de discrétisation de la fonction caractéristique et K le nombre de points. La comparaison avec la densité empirique calculée par Monte-Carlo est faite figure 6 ii). On observe une très bonne adéquation. Dans le cas indépendant, la densité est calculée par transformée de Fourier rapide inverse de la fonction caractéristique. La représentation de cette dernière sur la figure 6 ii) permet d'observer une nouvelle fois l'influence de la corrélation.

On notera également que l'erreur commise en ne prenant pas en compte la corrélation semble être plus faible pour les faibles quantiles. Toutefois, ce résultat est dépendant du type de copule et de la pulsation considérée.

Remarque. *L'algorithme FFT étant très efficace en terme de rapport temps de calcul sur précision, il pourrait sembler naturel de l'utiliser pour l'intégration en deux dimensions. Toutefois nous n'avons pas retenu cette solution pour deux raisons. Le nombre de points de discrétisation nécessaire est élevé au carré ce qui pose des problèmes de mémoire. Ce problème pourrait être traité par l'utilisation de grilles creuses mais la FFT demande des grilles équidistantes, qui ne sont pas du tout adaptées à notre problème (fort gradient sur de petites zones). Enfin, l'intégrale (6) n'est pas une "vraie" transformée de Fourier en dimension N, car seuls les points sur la diagonale nous seraient utiles, ce qui diminue énormément l'intérêt de cette approche.*

Nous appliquons maintenant les deux méthodes sur le cas précédent pour une bande de pulsations de $200-450\,rad.s^{-1}$. La figure 7 présente les quantiles à $2,5\%$, 50% et $97,5\%$ obtenus par les deux méthodes, ainsi que les résultats obtenus par simulation de Monte-Carlo avec 100000 tirages. On remarque que la méthode prenant en compte la corrélation des valeurs propres est parfaitement en accord avec les simulations de Monte-Carlo. Il est également intéressant de noter que les résultats obtenus sans prendre en compte la corrélation ne sont pas très éloignés des simulations de Monte-Carlo, mais ceci peut dépendre également du type de structure de dépendance.

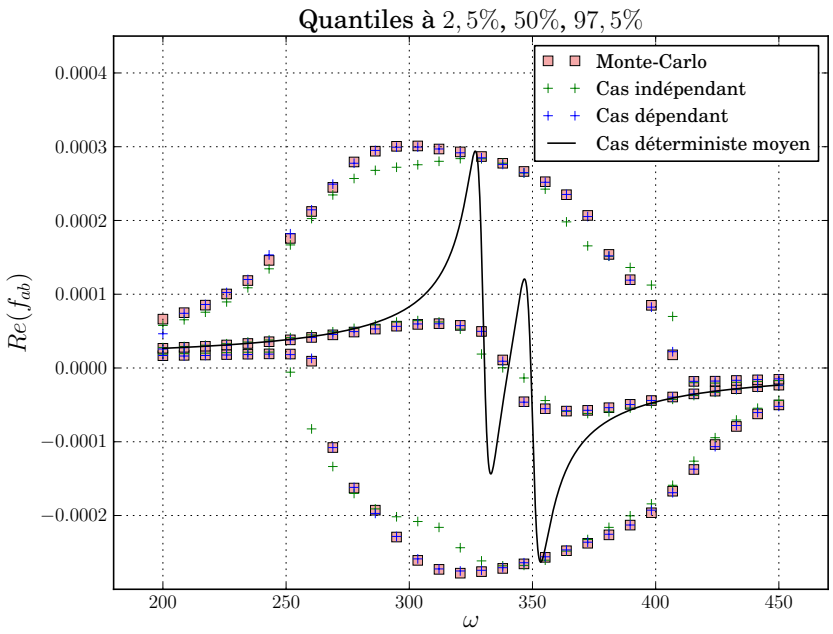


Fig. 7 – Quantiles à $2,5\%$, 50% et $97,5\%$.

4 Conclusions et perspectives

Le but de ce travail était de présenter une méthode de synthèse modale probabiliste basée sur l'expression analytique de la densité d'une fonction de transfert d'un oscillateur de valeur propre aléatoire. Le cas des valeurs propres dépendantes est traité grâce à la modélisation par les copules et une mé–thode d'intégration numérique en deux dimensions. L'influence de la dépendance des valeurs propres a été illustrée à travers un exemple. Cette méthodologie a également été appliquée à un modèle éléments finis simple, et l'est actuellement sur un modèle de satellites. Dans ce cas, l'étape d'identification des lois marginales des valeurs propres et de leur structure de dépendance (non traité ici) est primordiale.

La suite de cette étude concerne, dans un premier temps, l'identification plus précise des types de dépendances ayant une influence sur la dispersion d'une FRF (types et paramètres des copules). En effet, il pourrait être intéressant de justifier l'hypothèse d'indépendance des valeurs propres si son influence est négligeable pour certaines applications. Dans un second temps, l'hypothèse de vecteurs propres déterministes, même si elle est indispensable au calcul de la fonction caractéristique, semble peu réaliste dans un cas réel. Nous cherchons donc à quantifier l'influence de cette hypothèse et, si celle-ci s'avère importante, trouver un moyen de la contourner.

Remerciements

Ce travail est financé par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et Thales Alenia Space (TAS). Les auteurs remercient Fabrice Buffe (CNES), Jérôme Buffe et Anne Carpine (TAS) pour leur soutien.

Références

[1] C. Heinkelé. *Synthèse modale probabiliste. Théorie et applications*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, Lyon, 2008.

[2] J. Gil-Pelaez. Note on the inversion theorem. *Biometrika*, 38 :481–483, 1951.

[3] R. B. Davies. Numerical inversion of a characteristic function. *Biometrika*, 60 :415–417, 1973.

[4] R. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer, 2006.

[5] P. Clauss. Théorie des copules. Notes de cours, ENSAI.

[6] J. Abate and W. Whitt. The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems*, 10 :5–88, 1992.