



HAL
open science

Décomposition de domaine et réduction de modèle: stratégie de résolution pour le post-flambement local des structures raidies

Ludovic Barrière, Steven Marguet, Philippe Cresta, Bruno Castanié,
Jean-Charles Passieux

► To cite this version:

Ludovic Barrière, Steven Marguet, Philippe Cresta, Bruno Castanié, Jean-Charles Passieux. Décomposition de domaine et réduction de modèle: stratégie de résolution pour le post-flambement local des structures raidies. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01717836

HAL Id: hal-01717836

<https://hal.science/hal-01717836v1>

Submitted on 26 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Décomposition de domaine et réduction de modèle: stratégie de résolution pour le post-flambement local des structures raidies

Ludovic BARRIERE ^{1*}, Steven MARGUET ¹, Philippe CRESTA ², Bruno CASTANIE ¹, Jean-Charles PASSIEUX ¹

¹ Université de Toulouse, Institut Clément Ader, EA 814 - Toulouse, France, ludovic.barriere@isae.fr, steven.marguet@univ-tlse3.fr, [castanie,passieux]@insa-toulouse.fr

² EADS Innovation Works, Campus Engineering, CTO IW SP SC - Blagnac, France, philippe.cresta@eads.net

* Auteur correspondant

Résumé — La simulation par la méthode des éléments finis du post-flambement local des grandes structures raidies est coûteuse en temps de calcul. Le développement de méthodes de résolution efficaces qui tirent profit notamment des architectures parallèles, a permis d'apporter des réponses aux besoins des industriels et des chercheurs dans ce domaine. Ce papier présente une stratégie de résolution qui tente d'améliorer encore les temps de résolution en combinant plusieurs approches en calcul haute performance et en utilisant les spécificités du post-flambement local. La stratégie proposée repose sur la décomposition de domaine avec localisation non-linéaire et la réduction de modèle par base réduite adaptative. Les premiers résultats obtenus montrent la pertinence de l'approche.

Mots clés — Décomposition de domaine, Réduction de modèle adaptative, Localisation non-linéaire, Post-flambement local

1 Introduction

La simulation du post-flambement local des grandes structures raidies représente un enjeu important principalement pour l'industrie aéronautique. En réduisant les épaisseurs des cadres, des lisses et des peaux, tout en maîtrisant le post-flambement, la structure des avions pourrait être allégée. Cependant, le flambement, qu'il soit localisé ou global à l'échelle de la structure, peut conduire à des endommagements à l'échelle du détail structural, comme le décollement peau/raidisseurs dans le cas des structures composites [1, 2]. La multiplicité des échelles et la non-linéarité des phénomènes, conduit à une modélisation fine et engendre des coûts de calcul dépassant souvent les ressources disponibles, à moins d'utiliser une méthode de résolution adaptée.

Très largement utilisées, les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement permettent d'exploiter les ressources des calculateurs parallèles [3]. En présence de non-linéarités locales, la convergence globale est malgré tout pénalisée. C'est pourquoi, dans le cadre de la résolution des problèmes de post-flambement local des grandes structures, Cresta et al. [4] ont proposé la décomposition de domaine avec localisation non-linéaire. Cette stratégie permet de concentrer les ressources sur les sous-domaines qui présentent les plus fortes non-linéarités et de réduire le nombre d'itérations globales.

Une autre façon d'accélérer la résolution d'un problème modélisé par éléments-finis consiste à en réduire la taille des systèmes linéaires par projection dans un sous-espace de dimension réduite [5, 6, 7]. Cette technique de réduction de modèle par projection permet d'utiliser des connaissances sur un problème pour en réduire la dimension à la façon des méthodes de Ritz en analytique. Une des difficultés, face aux non-linéarités géométriques notamment, réside dans l'adaptation de la base réduite (enrichissement par un ou plusieurs vecteurs, ou mise à jour des composantes) afin de maîtriser l'erreur d'approximation [5, 6, 8].

Cet article s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Dans un premier temps une méthode de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement est présentée. Elle découle des approximations réalisées par les méthodes semi-analytiques de calcul en post-flambement des plaques et coques. Dans un second temps, afin de tirer profit du caractère local du post-flambement des grandes structures raidies, la réduction de modèle est formalisée dans le cadre de la décomposition de domaine et une nouvelle

stratégie de résolution est présentée. Une application au post-flambement local d'un panneau raidi est enfin proposée.

2 Réduction de modèle adaptative en post-flambement

La résolution d'un problème de post-flambement passe par la formulation du problème tangent en statique. Le système linéaire (1) de dimension N résulte de la discrétisation par la méthode des éléments-finis et est réduit par projection dans $Im(\underline{C})$ (de type Galerkin), où \underline{C} est une base réduite de dimension $N_r \ll N$ (2). Cette projection permet d'obtenir une approximation de l'incrément de déplacement, $\underline{\delta U}_c = \underline{C} \cdot \underline{\delta \alpha} \approx \underline{\delta U}$ ($\underline{\delta \alpha}$ étant le vecteur des coordonnées généralisées).

$$\underline{K}_t(\underline{U}) \cdot \underline{\delta U} = -\underline{R}(\underline{U}) \quad (1)$$

$$\underline{C}^T \underline{K}_t(\underline{U}) \underline{C} \cdot \underline{\delta \alpha} = -\underline{C}^T \underline{R}(\underline{U}) \quad (2)$$

La constitution d'une base réduite \underline{C} en réduction de modèle est un enjeu majeur, particulièrement quand il s'agit de problèmes non-linéaires comme le post-flambement. Il existe différentes méthodes qui consistent soit à tronquer une base modale [6], soit à calculer des variations autour d'un état d'équilibre (perturbation statique) [5], soit enfin à extraire par décomposition orthogonale propre (POD) un sous-ensemble représentatif d'un ensemble de vecteurs, solutions de problèmes similaires [8] (obtenus par simulations antérieures ou mesures). Ces méthodes impliquent des choix (ordre de troncature, ordre de dérivation et définition des problèmes "similaires") ainsi qu'un coût de calcul parfois limitant. C'est pourquoi les auteurs se sont intéressés à la minimisation de la taille des bases réduites initiales voire à leur suppression [7], quitte à adapter cette base au cours du calcul notamment en présence de non-linéarités qui complexifient la constitution d'une base réduite robuste. Dans ce sens les auteurs de ce papier ont proposé une méthode de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement (PBAMR) [9] qui s'inspire des approches semi-analytiques et qui est présentée succinctement dans cette section.

Enseignements des approches semi-analytiques pour le post-flambement

Les approches semi-analytiques dédiées au post-flambement des structures [10, 11, 12] reposent sur une approximation de l'état d'équilibre en stade précoce de post-flambement. Elles ont montré que le champ de déplacement (de la même façon que le champ de contrainte) y était décomposable en deux termes, le champ de déplacement avant flambement et une variation due au post-flambement, laquelle peut s'écrire comme la combinaison du mode de flambement et d'une variation d'ordre supérieur.

L'intérêt d'une telle décomposition est double. D'une part, avec le simple champ de déplacement avant flambement (souvent calculé linéairement et à faible coût) et un seul mode de flambement, il a été montré que l'erreur sur la courbe effort-déplacement est relativement faible [11] (inférieure à 7% sur les cas étudiés). D'autre part, la variation d'ordre supérieur est approchée au moyen d'un faible nombre de fonctions de Ritz, et permet d'atteindre des niveaux de précision supérieurs pour un faible nombre d'inconnues par rapport à une méthode de Ritz classique [12, 10].

Ces propriétés sont intéressantes du point de vue de la réduction de modèle, notamment pour constituer une base réduite initiale la plus robuste possible et à moindre coût.

Base réduite initiale minimale et procédure de complétion à la volée

Contrairement à ce qui a déjà été proposé en réduction de modèle EF pour le post-flambement [5, 6], où les bases réduites initiales ne sont pas limitées en dimension, et en s'inspirant des approches semi-analytiques, une base réduite initiale \underline{C}_{init} de dimension 2 est construite à partir du champ de déplacement avant flambement $\underline{U}_{|t_0}$ et d'un seul mode de flambement \underline{U}_B (de plus petite charge critique) (3).

$$\underline{C}_{init} = [\underline{U}_{|t_0} / \|\underline{U}_{|t_0}\| \quad \underline{U}_B] \quad (3)$$

Afin de garantir un niveau d'erreur sur le résidu normalisé à l'équilibre, fixé par l'utilisateur à ϵ_{New} , et de prendre en compte l'effet de la redistribution des contraintes en post-flambement, cette base réduite

initiale est complétée par les variations d'ordre supérieur au moyen d'une procédure de complétion. Il existe deux types d'approches de la complétion des bases réduites en calcul non-linéaire :

- La complétion *a posteriori* est basée sur une estimation d'erreur après convergence de l'algorithme de Newton-Raphson sur le problème réduit. Dans le cas où le critère d'erreur à l'équilibre n'est pas satisfait ($\frac{\|R\|}{\|F\|} > \varepsilon_{New}$, F le vecteur des efforts extérieurs), l'équilibre est recalculé sans réduction de modèle, et le résultat sert à compléter la base réduite (après orthonormalisation) ou permet de réaliser une mise à jour de ses composantes (analyse modale, perturbation statique) [5, 6].
- La complétion *à la volée* [8] est basée sur une estimation du ratio entre l'erreur à l'équilibre du problème réduit et celle du problème complet à chaque itération de Newton (4). Lorsque ce ratio est inférieur à un seuil k , l'itération suivante est augmentée d'une étape de calcul de $\underline{\delta U}_k = \underline{\delta U} - \underline{\delta U}_c$. Dans le cas d'un opérateur symétrique défini positif, $\underline{\delta U}_k$ appartient à $Im(C)^{\perp_{kT}}$ et est calculé au moyen d'un algorithme de type Krylov projeté. Autrement dit, $\underline{\delta U}_c$ est l'initialisation d'un gradient conjugué projeté. Le projecteur $\underline{P} : \mathbb{R}^N \mapsto Im(\underline{C})^{\perp_{kT}}$ permet d'obtenir le système à résoudre (5).

$$\frac{\|\underline{C}^T \underline{R}\|}{\|\underline{C}^T \underline{F}\|} < k \frac{\|\underline{R}\|}{\|\underline{F}\|} \quad (4)$$

$$\underline{P}^T \underline{K}_T \underline{P} \underline{\delta U}_k = -\underline{P}^T \underline{R} \quad (5)$$

Le choix de la complétion *à la volée* pour le post-flambement repose sur les considérations suivantes :

- La complétion *à la volée* est plus flexible et a un coût unitaire inférieur à la complétion *a posteriori* (une itération augmentée à la fois contre un incrément entier pour l'approche *a posteriori*).
- La redistribution des contraintes se fait de manière continue pendant le post-flambement (possibilité de compléter la base réduite au fur et à mesure).

L'association d'une base réduite minimale et de la complétion *à la volée* pour le calcul en post-flambement donne lieu finalement à une stratégie de résolution originale. A ce stade, la question des changements de modes de flambement n'a pas été abordée. Par ailleurs, aucun dispositif de maîtrise de la taille de la base réduite pendant le calcul n'a été implémenté [8].

Application à un panneau raidi

Le cas d'application proposé consiste en un panneau raidi artificiellement Fig.1, représentatif des essais structuraux en post-flambement de type carré déformable [2]. Il a été mis en œuvre dans un code de calcul "maison" développé dans le cadre de cette recherche afin d'implémenter et tester des méthodes de résolution.

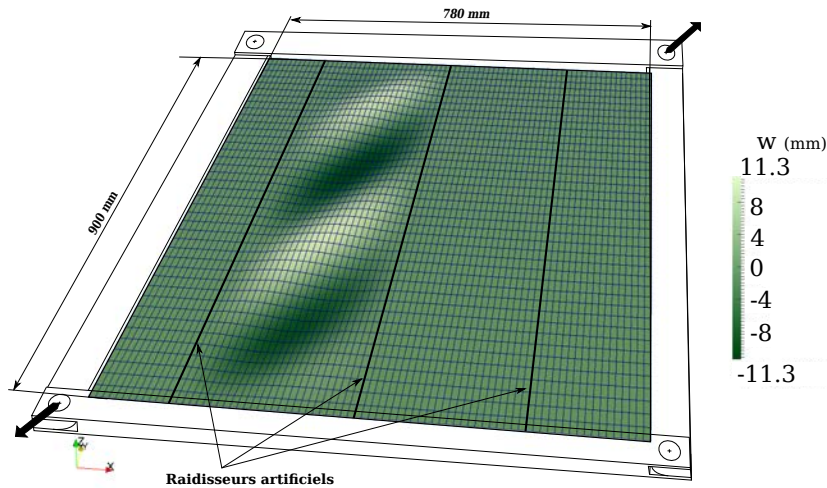
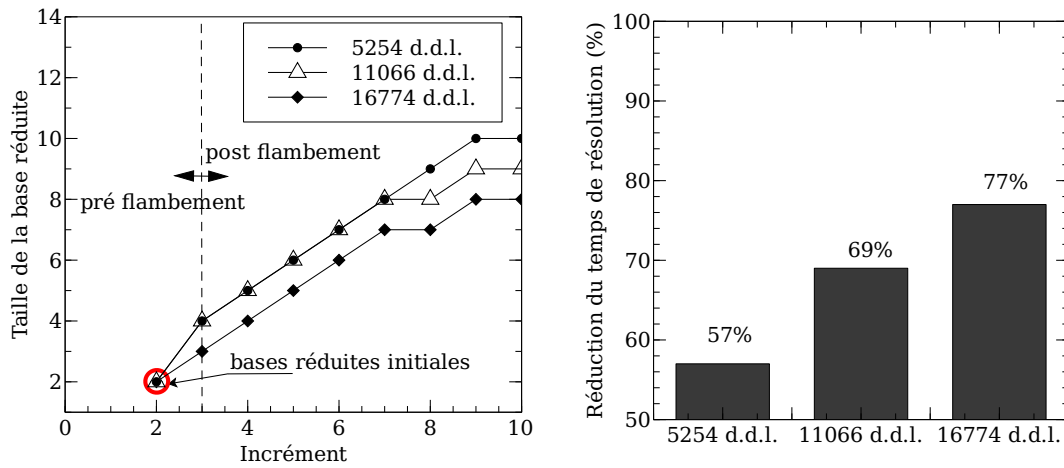


Fig. 1 – Modèle éléments-finis d'un panneau raidi, sollicité en cisaillement par carré déformable. Déformée et champ de déplacement hors-plan en post-flambement.

Du fait d'une dissymétrie des raidisseurs, le flambement reste localisé. Le pilotage se fait en déplacements imposés. La charge maximale appliquée (efforts de réaction) atteint 4.8 fois la charge critique



(a) Évolution de la taille de la base réduite au cours des incréments de chargement. (b) Réduction du temps de résolution par rapport à la méthode de Newton-Raphson sur le problème complet

Fig. 2 – Comportement (a) et performance numérique (b) de la stratégie de résolution en post-flambement par réduction de modèle adaptative pour trois niveaux de raffinement de maillage ($\epsilon_{New} = 5.10^{-3}$ et $k = 1.10^{-2}$).

du premier mode de flambement. Après un premier incrément de chargement en dessous de la charge critique, la base réduite initiale est construite. À partir du 3^{ème} incrément, la structure est en phase de post-flambement (10 incréments au total). Afin d'évaluer l'extensibilité de la stratégie de résolution, trois niveaux de raffinement du maillage ont été étudiés. La résolution du problème complet par la méthode de Newton-Raphson sert de référence. Les temps de calcul mesurés sont ceux de la résolution des systèmes tangents, projection comprise mais hors étapes d'assemblage.

D'après Fig.2a, le nombre de complétions *à la volée* ne dépasse pas deux par incrément pour le maillage le plus grossier et un par incrément pour le plus fin. Ce qui permet à la stratégie de réduire de 77% le temps de résolution des problèmes tangents pour un modèle à moins de 17000 degrés de liberté (Fig.2b), toutes choses égales par ailleurs puisque le nombre total d'itérations n'est que très peu affecté comme le montre le tableau Tab.1. En outre, la performance croît avec la taille du problème.

Raffinement (d.d.l.)	5254	11066	16774
Complétions	8	7	6
Itérations	28	32	33
Itérations (réf.)	27	30	32

Tableau 1 – Influence du raffinement du maillage sur le nombre de complétions et d'itérations ($k = 10^{-2}$, $\epsilon_{New} = 5.10^{-3}$). Le nombre d'itérations de référence (réf.) est celui de la résolution du problème complet.

3 Décomposition de domaine primale et réduction de modèle adaptative

Le précédent cas d'application illustre le phénomène de post-flambement local évoqué en introduction. Or la stratégie PBAMR ne fait pas la différence entre post-flambement global et local. La réduction de modèle et la complétion se font sur l'ensemble du modèle alors que le phénomène non-linéaire se concentre sur une partie de la structure, le reste n'étant pas affecté dans son mode de déformation. Aussi le recours à la décomposition de domaine devrait minimiser le coût de la constitution et de la projection dans une base réduite, mais aussi et surtout celui de la complétion *à la volée*. Des travaux en ce sens ont été menés par Kerfriden et al. [13], bien que la complétion *à la volée* n'ait pas été partitionnée et que les inconnues d'interface n'aient pas été réduites. Les travaux de Craig et Bampton [14], dans le cadre de la dynamique vibratoire, ont eux aussi contribué à rationaliser la réduction de modèle des grandes structures.

Partition de la réduction de modèle

Afin de coupler la décomposition de domaine primale et la réduction de modèle, la base réduite globale $\underline{\underline{C}}$ est partitionnée par sous-domaine. Le problème tangent est écrit par sous-domaine et projeté dans les bases réduites locales (équations (6a) et (6b)). L'équilibre global est assuré au moyen de conditions de raccords (6c) et (6d).

$$\delta U_c^{(s)} = \underline{\underline{C}}^{(s)} \delta \alpha^{(s)} \quad (6a)$$

$$\underline{\underline{C}}^{(s)T} \underline{\underline{K}}_T^{(s)} \underline{\underline{C}}^{(s)} \delta \alpha^{(s)} = -\underline{\underline{C}}^{(s)T} \underline{\underline{R}}^{(s)} + \underline{\underline{C}}^{(s)T} \delta \lambda^{(s)} \quad (6b)$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\underline{C}}^{(s)} \delta \alpha^{(s)} = 0 \quad (6c)$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \delta \lambda^{(s)} = 0 \quad (6d)$$

où $\lambda^{(s)}$ est le vecteur des réactions d'interface imposées par les sous-domaines voisins, $\underline{\underline{t}}^{(s)}$ est l'opérateur de trace discrétisé et $\underline{\underline{A}}^{(s)}$ (respectivement $\underline{\underline{A}}^{(s)}$) est l'opérateur d'assemblage d'interface non-signé (resp. signé) [3].

En approche primale, on dissocie pour chaque base réduite la partie relative aux déplacements d'interface (indice b) de celle relative aux déplacements intérieurs (indice i). L'égalité des déplacements de part et d'autre de l'interface est vérifiée *a priori*. Une unique base réduite d'interface $\underline{\underline{C}}_b$ est alors définie telle que :

$$\delta U_{c_b}^{(s)} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \delta U_{c_b} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \delta \alpha_b \quad (7)$$

La condensation du problème à l'interface se fait classiquement selon la méthode du complément de Schur [3]. Les équations de localisation réduites par sous-domaine (8) et l'équation du problème réduit condensé à l'interface (9) permettent de calculer l'approximation de l'équilibre de la structure par couplage entre la décomposition de domaine primale et la réduction de modèle par projection.

$$\delta \alpha_i^{(s)} = \left(\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{Tii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \left(-\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} - \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{Tib}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \delta \alpha_b \right) \quad (8)$$

$$\underline{\underline{S}}_T \delta \alpha_b = \underline{\underline{b}} \quad (9)$$

Les compléments de Schur locaux réduits $\underline{\underline{S}}_T^{(s)}$ s'ajoutent pour former le complément de Schur global réduit $\underline{\underline{S}}_T$:

$$\underline{\underline{S}}_T = \sum_s \underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{S}}_T^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \quad (10a)$$

$$\underline{\underline{S}}_T^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{Tbb}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{Tbi}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \left(\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{Tii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{Tib}^{(s)} \quad (10b)$$

Le résidu condensé réduit se calcule de la même façon :

$$\underline{\underline{b}} = \sum_s \underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{b}}^{(s)} \quad (11a)$$

$$\underline{\underline{b}}^{(s)} = -\underline{\underline{R}}_b^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{Tbi}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \left(\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{Tii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} \quad (11b)$$

Complétion à la volée en décomposition de domaine

La complétion à la volée partitionnée par sous-domaine et à l'interface consiste à résoudre le système tangent en décomposition de domaine après initialisation par l'approximation δU_c . Le projecteur P , présenté plus tôt, n'est cependant pas la somme de contributions locales indépendantes. On l'élimine

soit en cherchant directement la solution $\underline{\delta U}$ du problème décomposé, soit en remarquant que le système (5) est équivalent au système (12) :

$$\underline{K}_T \underline{\delta U}_k = -\underline{R} - \underline{K}_T \underline{\delta U}_c \quad (12)$$

Le préconditionnement apporté par P est alors perdu, mais cette approche permet d'exploiter les ressources parallèles et de rationaliser la complétion *à la volée*. Cette dernière est donc réalisée à deux niveaux, à l'interface et par sous-domaine :

- En ce qui concerne la complétion de la base réduite d'interface \underline{C}_b , le calcul de $\underline{\delta U}_{k_b}$ (13) fait intervenir le complément de Schur primal non-réduit \underline{S}_T en tant qu'opérateur, et le résidu condensé initialisé \underline{b}_k en tant que second membre.

$$\underline{S}_T \underline{\delta U}_{k_b} = \underline{b}_k = \underline{b} - \underline{S}_T \underline{\delta U}_{c_b} \quad (13)$$

De la même façon que le problème d'interface en décomposition de domaine primale, ce système se résout par un algorithme de type Krylov. Les préconditionneurs efficaces de la décomposition de domaine primale peuvent être utilisés [3]. Le vecteur $\underline{\delta U}_{k_b}$ permet de compléter la base réduite d'interface, et incrémente le déplacement d'interface.

- La complétion de la base réduite du sous-domaine (s), $\underline{C}_i^{(s)}$, consiste à calculer $\underline{\delta U}_{k_i}^{(s)}$ grâce à l'équation de localisation modifiée (14).

$$\underline{\delta U}_{k_i}^{(s)} = \underline{K}_{Tii}^{(s)-1} \left(-\underline{R}_i^{(s)} - \underline{K}_{Tib}^{(s)} \underline{A}^{(s)T} (\underline{\delta U}_{c_b} + \underline{\delta U}_{k_b}) \right) - \underline{\delta U}_{c_i} \quad (14)$$

Critères de complétion locaux et d'interface

Telle que proposée précédemment, la complétion *à la volée* en décomposition de domaine est indépendante par sous-domaine mais l'étape locale dépend de l'étape d'interface comme le montre l'équation (14). Néanmoins, la complétion de la base réduite d'interface n'est pas nécessaire à la complétion des bases réduites locales ($\underline{\delta U}_{k_b}$ peut être égal à $\underline{0}$). Par conséquent, bien qu'un critère de complétion basé sur l'erreur globale à l'équilibre (cf. (4)) déclenche la procédure, les complétions par sous-domaine et pour l'interface sont soumises à des critères locaux qui précisent les zones de la complétion déclenchée en amont. Très simplement, les critères de complétion locaux proposés sont les suivants :

- à l'interface : $\frac{\|\underline{C}_i^T \underline{R}_b\|}{\|\underline{C}_i^T \underline{F}_b\|} < k \frac{\|\underline{R}_b\|}{\|\underline{F}_b\|}$
- par sous-domaine : $\frac{\|\underline{C}_i^{(s)T} \underline{R}_i^{(s)}\|}{\|\underline{C}_i^{(s)T} \underline{F}_i^{(s)}\|} < k \frac{\|\underline{R}_i^{(s)}\|}{\|\underline{F}_i^{(s)}\|}$

Le seuil k des critères de complétion (global, interface et locaux) est pris égal à 1.10^{-2} .

Localisation non-linéaire réduite

À chaque itération globale et après la localisation de l'incrément par sous-domaine, avec ou sans complétion de la base réduite locale, une procédure de localisation non-linéaire est implémentée [4]. Il s'agit d'une boucle de Newton-Raphson (modifiée ou non) qui est imbriquée et qui permet de réduire le nombre d'itérations globales en présence de non-linéarités localisées. Dans la stratégie proposée, cette localisation itérative est réalisée sur le système local réduit par projection (8). Le seuil du critère local d'erreur à l'équilibre est choisi dans un premier temps égal à ε_{New} .

4 Application au post-flambement local d'un panneau raidi

Le panneau artificiellement raidi, présenté en section 2, est repris pour comparaison. Une décomposition en 4 sous-domaines, entre les raidisseurs est proposée et illustrée en Fig.3. Seul le maillage le plus grossier (5254 d.d.l.) est considéré dans cette étude qui ne présente pas les aspects concernant l'extensibilité de la méthode.

Au deuxième incrément, les bases réduites sont initialisées :

- *Par sous-domaine*, mode de déplacement intérieur du premier incrément et premier mode de flambement intérieur (calculé à interfaces fixes) : $\underline{C}_i^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{i|t_0}^{(s)} / \|\underline{U}_{i|t_0}^{(s)}\| & \underline{U}_{i|B}^{(s)} \end{bmatrix}$

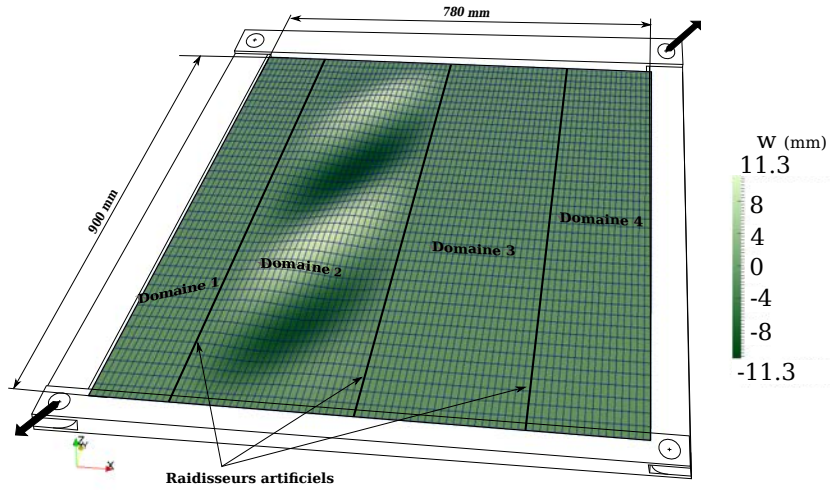


Fig. 3 – Décomposition en 4 domaines, entre les raidisseurs, du modèle élément-fini d'un panneau raidi. Déformée et champ de déplacement hors-plan en post-flambement.

– Pour l'interface, mode de déplacement d'interface du premier incrément (pas de flambement global) : $\underline{C}_b = \underline{U}_b|_{t_0} / \|\underline{U}_b|_{t_0}\|$

L'évolution de la taille des bases réduites par sous-domaine et d'interface est présentée Fig.4. En l'occurrence, les bases réduites des sous-domaines 1, 3 et 4 n'ont pas nécessité de complétion et ne sont donc pas reportées dans ce graphique.

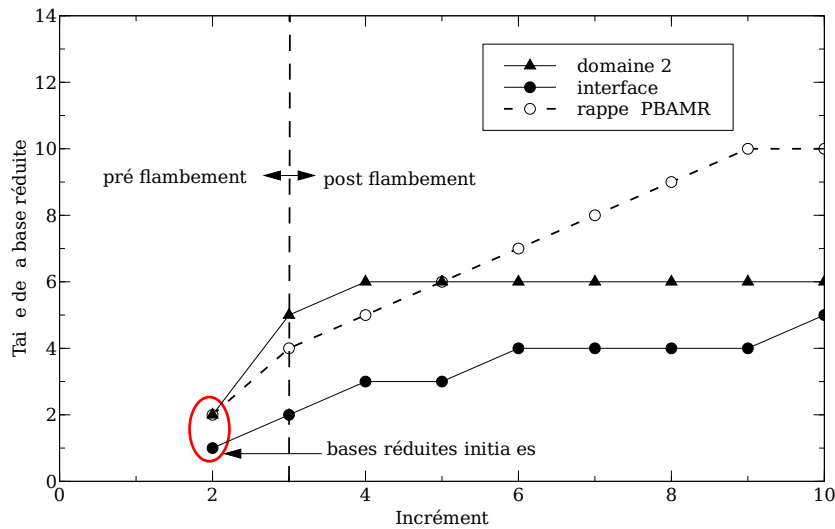


Fig. 4 – Evolution de la taille des bases réduites par sous-domaine et pour l'interface. Rappelée en pointillé, l'évolution de la base réduite de la stratégie PBAMR.

Il est intéressant de noter que, contrairement à la stratégie PBAMR, les complétions locales de la base réduite du sous-domaine 2 se concentrent autour de la bifurcation. Par ailleurs, en plus de réduire le nombre de complétion de 30% par rapport à la stratégie PBAMR (7 contre 10), les complétions d'interface et par sous-domaine semblent bien découplées.

5 Conclusion

Dans cet article, deux stratégies de résolutions pour le post-flambement des structures ont été présentées. La stratégie PBAMR montre que les approches semi-analytiques et l'approximation du champ de déplacement en post-flambement qu'elles proposent, permettent de construire une base réduite pertinente

pour la réduction de modèle adaptative. En post-flambement local, la réduction de modèle adaptative a été rationalisée grâce à la décomposition de domaine primale et permet de compléter les bases réduites de l'interface et des sous-domaines indépendamment entre-eux, ce qui réduit le coût unitaire d'une complétion et leur nombre (−30%).

La réduction du temps de résolution et l'extensibilité de cette deuxième stratégie n'ont pas encore été évaluées. Elle est aussi pour l'instant limitée au post-flambement local (selon les modes de flambement à interfaces fixes d'un sous-domaine) et sans changement de mode de flambement. La rationalisation de la complétion de la base réduite d'interface et la généralisation aux approches duales et mixtes sont enfin des voies d'études envisagées.

Remerciements

Les auteurs remercient EADS Innovation works pour le financement de ce projet de recherche, ainsi que la plateforme CALMIP (CALcul en MIDI-Pyrénées) pour l'allocation des ressources HPC qui ont permis la réalisation de ces travaux (Projet n°2012-P12152).

Références

- [1] J. Bertolini, B. Castanié, J.-J. Barrau, and J.-P. Navarro. Multi-level experimental and numerical analysis of composite stiffener debonding. part 1 : Non-specific specimen level. *Composite Structures*, 90(4) :381 – 391, 2009.
- [2] J. Bertolini, B. Castanié, J.-J. Barrau, J.-P. Navarro, and C. Petiot. Multi-level experimental and numerical analysis of composite stiffener debonding. part 2 : Element and panel level. *Composite Structures*, 90(4) :392 – 403, 2009.
- [3] P Gosselet and C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archive of Computational Methods in Engineering*, 13(4) :515–572, 2006.
- [4] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1436–1446, January 2007.
- [5] A.-K. Noor and J.-M. Peters. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4) :455–462, April 1980.
- [6] A. Kling, R. Degenhardt, and R. Zimmermann. A hybrid subspace analysis procedure for non-linear postbuckling calculation. *Composite Structures*, 73 :162–170, 2006.
- [7] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1) :346–366, January 2005.
- [8] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, and S.-P.-A. Bordas. Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented Newton-Krylov algorithms : An adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8) :850–866, January 2011.
- [9] L. Barrière, S. Marguet, B. Castanié, P. Cresta, and J.-C. Passieux. An adaptive model reduction strategy for post-buckling analysis of stiffened structures. *Thin Walled Structures*. soumis en février 2013.
- [10] W.-T. Koiter. Buckling and post-buckling behaviour of a cylindrical panel under axial compression. Technical Report NLL-TR S.476, National Aerospace Laboratory NLR, May 1956.
- [11] Riccardo Vescovini and Chiara Bisagni. Single-mode solution for post-buckling analysis of composite panels with elastic restraints loaded in compression. *Composites Part B : Engineering*, 43(3) :1258–1274, April 2012.
- [12] Chiara Bisagni and Riccardo Vescovini. Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels. *Thin-Walled Structures*, 47(3) :318–334, March 2009.
- [13] P. Kerfriden, O. Goury, T. Rabczuk, and S.-P.-A. Bordas. A partitioned model order reduction approach to rationalise computational expenses in nonlinear fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, December 2012.
- [14] R.-R Craig and M.-C.-C Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA JOURNAL*, Vol. 6 :pages 1313–1319, 1968.