



HAL
open science

Schémas asymptotiquement conservatifs en énergie dans un problème de vibro-impact de plaques

Cédric Pozzolini, Yves Renard, Michel Salaün

► **To cite this version:**

Cédric Pozzolini, Yves Renard, Michel Salaün. Schémas asymptotiquement conservatifs en énergie dans un problème de vibro-impact de plaques. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. pp.0. hal-01717108

HAL Id: hal-01717108

<https://hal.science/hal-01717108>

Submitted on 25 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Schémas asymptotiquement conservatifs en énergie dans un problème de vibro-impact de plaques

Cédric POZZOLINI^{1,2}, Yves RENARD³, Michel SALAÜN⁴

¹ Université Paris Est, IFSTTAR-GRETTIA, 77447 Marne la Vallée Cedex 2

² INSA-Lyon, CNRS, LaMCoS UMR5259, F-69621 Villeurbanne, cedric.pozzolini@insa-lyon.fr

³ Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, ICJ UMR5208, LaMCoS UMR5259, F-69621 Villeurbanne, yves.renard@insa-lyon.fr

⁴ Université de Toulouse, ICA (Institut Clément Ader), F-31055 Toulouse, michel.salaun@isae.fr

Résumé — Le mouvement d'une plaque entre des obstacles rigides est étudié. Plusieurs familles de schémas totalement discrétisés sont comparées et l'intérêt de la méthode de la Dynamique Singulière pour obtenir des schémas conservatifs en énergie est illustré. Enfin, l'influence du coefficient de restitution lors du choc est mise en évidence.

Mots clés — Inéquations variationnelles, Plaque de Kirchhoff-Love, Impact sur un obstacle rigide, Coefficient de restitution.

1 Introduction

On étudie la dynamique d'une plaque élastique vibrant entre deux obstacles rigides. Le contact est modélisé par des conditions de type Signorini entre le déplacement et la réaction de contact. De façon classique pour ce type de problème, les schémas totalement discrétisés combinent une approximation éléments finis en espace, et un schéma en temps. Mais la plupart des méthodes sont instables dès qu'elles sont appliquées suffisamment longtemps, ou présentent des oscillations numériques parasites. Ici, nous avons adapté la méthode de la masse singulière proposée en [9]. Il s'agit d'une formulation semi-discrète en espace dans laquelle on change la matrice de masse dans l'inéquation variationnelle, ce qui a pour effet d'empêcher que les forces inertielles créent des oscillations numériques parasites. Dans ce cadre, plusieurs familles de schémas totalement discrétisés sont proposées et l'influence d'une loi d'impact donnée par un coefficient de restitution entre les vitesses avant et après choc est étudiée.

2 Position du problème

On considère une plaque mince élastique, de plan moyen noté Ω . Ici, on s'intéresse uniquement au problème de flexion, pour lequel on utilise le modèle de Kirchhoff-Love, dans lequel la seule inconnue est la flèche, qui sera notée u . Lorsque le mouvement de la plaque est limité par des obstacles rigides, situés au-dessus et au-dessous de celle-ci, la flèche doit appartenir au convexe :

$$\mathbb{K} = \{w \in \mathbb{V} / g_1(x) \leq -g < 0 < g \leq g_2(x), \forall x \in \Omega\}, \quad (1)$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions définies de Ω dans $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et g un réel strictement positif. Par ailleurs, $\mathbb{V} = \left\{ w \in H^2(\Omega) / w = 0 = \frac{\partial w}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_c \right\}$ est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, Γ_c désignant la partie de la frontière de Ω où la plaque est encastrée.

Alors le problème de l'élasto-vibro-impact peut être décrit par l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : [0, T] \rightarrow \mathbb{K} \text{ tel que pour presque tout } t \in [0, T] \text{ et pour tout } w \in \mathbb{K} : \\ \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) (w - u(t)) dx + a(u(t), w - u(t)) \geq \int_{\Omega} f (w - u(t)) dx , \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{K} , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) , \quad \forall x \in \Omega . \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans cette relation, f désigne l'effort transverse appliqué à la plaque, ρ est sa masse volumique et 2ε son épaisseur. De plus, on a :

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u + \nu \Delta u \delta_{\alpha\beta} \right] \partial_{\alpha\beta}^2 w dx ,$$

où $\partial_{\alpha\beta}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}$, E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson, pour une plaque constituée d'un matériau homogène isotrope. Enfin, $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker, et on adopte la convention de sommation implicite sur les indices répétés, les indices grec prenant les valeurs 1 ou 2.

Si l'on pose $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$, et si on suppose que $f \in L^2(0, T; \mathbb{H})$, $u_0 \in \mathbb{K}$ et $v_0 \in \mathbb{H}$, nous avons démontré dans [8] que le Problème (2) a une solution u appartenant à $L^2(0, T; \mathbb{K})$. Pour cela, nous avons étendu aux plaques de Kirchhoff-Love le résultat de Dumont et Paoli [3], obtenu pour les poutres d'Euler-Bernouilli.

Cependant, on ne peut espérer l'unicité de la solution, à cause d'un contre-exemple présenté dans [1] pour les poutres. En effet, le Problème (2) ne décrit pas complètement le mouvement. Il faut rajouter une loi d'impact (cf [5]). Par exemple, lors d'un impact en (x_0, t_0) , cette loi devrait donner la relation entre les vitesses avant et après impact, selon :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0^+) = -e \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0^-) , \quad (3)$$

où le nombre e , appelé coefficient de restitution, est un nombre compris entre 0 et 1. $e = 1$ correspond à un choc parfait : la vitesse est conservée, au signe près, tandis que $e = 0$ est un choc absorbant. Bien que Paoli et Schatzman [6] aient mis en évidence le fait que ce coefficient de restitution n'est pas bien défini, l'idée est ici de l'incorporer dans (2), en particulier quand $e = 1$, et d'observer son effet sur quelques schémas numériques.

3 Semi-discrétisation en espace et méthode de la dynamique singulière

Le but de cette section est de présenter une semi-discrétisation bien posée en espace du Problème (2). Comme d'habitude, la discrétisation spatiale utilise une méthode d'éléments finis. Ici, comme on a choisi le modèle de plaque de Kirchhoff-Love, une approximation éléments finis conformes nous conduit à utiliser les triangles HCT (Hsieh-Clough-Tocher) réduits et les quadrangles FVS (Fraeijs de Veubeke-Sanders) réduits [2], dont l'un des intérêts principaux est de ne porter que 3 degrés de liberté par noeud, comme des éléments classiques pour le modèle de Mindlin.

Ensuite, l'idée originale, due à Renard [9], est d'introduire différentes approximations pour le déplacement u et la vitesse $v = \frac{\partial u}{\partial t}$. On introduit donc \mathbb{V}^h et \mathbb{H}^h , sous-espaces de dimension finie de \mathbb{V} et \mathbb{H}

respectivement, et $\mathbb{K}^h \subset \mathbb{V}^h$ approximation du convexe \mathbb{K} . La nouvelle formulation de (2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h : [0, T] \rightarrow \mathbb{K}^h \text{ et } v^h : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^h \text{ tels que pour tout } t \in (0, T] : \\ \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon \frac{\partial v^h}{\partial t} (w^h - u^h) + a(u^h, w^h - u^h) \geq \int_{\Omega} f (w^h - u^h) dx , \quad \forall w^h \in \mathbb{K}^h , \\ \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon \left(v^h - \frac{\partial u^h}{\partial t} \right) q^h dx = 0 , \quad \forall q^h \in \mathbb{H}^h , \\ u^h(x, 0) = u_0^h(x) , \quad v^h(x, 0) = v_0^h(x) , \quad \forall x \in \Omega , \end{array} \right. \quad (4)$$

où $u_0^h \in \mathbb{K}^h$ et $v_0^h \in \mathbb{H}^h$ sont des approximations de u_0 et v_0 . Le cas $\mathbb{H}^h = \mathbb{V}^h$ correspond à l'approximation classique de (2).

Soient ϕ_i ($1 \leq i \leq N_V$) et ψ_i ($1 \leq i \leq N_H$) des bases de \mathbb{V}^h et \mathbb{H}^h . La formulation variationnelle discrète associée au problème ci-dessus introduit les matrices \mathbf{K} (matrice de rigidité), \mathbf{B} et \mathbf{C} (matrices de masse) de tailles N_V^2 , $N_H \times N_V$ et N_H^2 , définies par :

$$\mathbf{K}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) , \quad \mathbf{B}_{ij} = \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon \phi_i \psi_j dx , \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon \psi_i \psi_j dx .$$

Les vecteurs associés, notés F , U (de composantes u_i) et V (composantes v_i), de taille N_V , N_V et N_H , s'écrivent :

$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx , \quad u^h(t) = \sum_{i=1}^{N_V} u_i(t) \phi_i , \quad v^h(t) = \sum_{i=1}^{N_H} v_i(t) \psi_i .$$

En notant $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$ et $\ddot{W} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, la seconde équation de (4) devient :

$$\mathbf{C} V(t) = \mathbf{B} \dot{U}(t) .$$

Comme \mathbf{C} est toujours inversible, on obtient : $V(t) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \dot{U}(t)$, puis : $\dot{V}(t) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \ddot{U}(t)$, ce qui permet d'éliminer V . Ainsi, le problème semi-discrétisé (4) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U : [0, T] \rightarrow \mathbb{K}^h \text{ et } V : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^h \text{ tels que pour tout } t \in (0, T] : \\ (W - U(t))^T (\mathbf{M} \ddot{U}(t) + \mathbf{K} U(t)) \geq (W - U(t))^T F , \quad \forall W \in \mathbb{K}^h , \\ \mathbf{C} V(t) = \mathbf{B} \dot{U}(t) , \\ U(0) = U_0 , \quad V(0) = V_0 , \end{array} \right. \quad (5)$$

où \mathbf{M} désigne la matrice de masse singulière : $\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}$.

L'approximation \mathbb{K}^h du convexe \mathbb{K} donné par (1) s'obtient de la façon suivante. Les contraintes ne sont considérées qu'aux noeuds, notés $(x_i)_{1 \leq i \leq N_N}$, du maillage, sauf ceux qui sont bloqués. Autrement dit, \mathbb{K}^h s'écrit :

$$\mathbb{K}^h = \{w^h \in \mathbb{V}^h / g_1(x_i) \leq w^h(x_i) \leq g_2(x_i) , \quad 1 \leq i \leq N_N\} .$$

En posant $\alpha_i^- \equiv g_1(x_i)$ et $\alpha_i^+ \equiv g_2(x_i)$ pour tout i , cet espace peut se réécrire :

$$\mathbb{K}^h = \{W \in \mathbb{R}^{N_N} / \alpha_i^- \leq (G^i)^T W \leq \alpha_i^+ , \quad 1 \leq i \leq N_N\} ,$$

où G^i est le vecteur de \mathbb{R}^{N_N} tel que $(G^i)^T W = w^h(x_i)$, pour tout x_i . On introduit ainsi la matrice \mathbf{G} , de taille $N_N \times N_V$ et de terme général $\mathbf{G}_{ij} = (G^i)_j$.

Enfin, en définissant le sous-espace \mathbb{F}^h de \mathbb{W}^h , comme :

$$\mathbb{F}^h = \left\{ w^h \in \mathbb{V}^h / \int_{\Omega} 2\rho\varepsilon w^h \xi^h dx = 0, \forall \xi^h \in \mathbb{H}^h \right\} = \ker \mathbf{B},$$

on peut montrer [9] que : si \mathbb{V}^h , \mathbb{H}^h et \mathbb{K}^h satisfont la condition Inf-Sup suivante :

$$\inf_{Q \in \mathbb{R}^{N_N} \setminus \{0\}} \sup_{W \in \mathbb{F}^h \setminus \{0\}} \frac{Q^T \mathbf{G} W}{\|Q\| \|W\|} > 0,$$

alors le Problème (5) admet une solution unique $U(t)$. De plus, cette solution $U(t)$ est conservative en énergie, dans le sens où l'énergie discrète :

$$E^h(t) = \frac{1}{2} \dot{U}^T(t) \mathbf{M} \dot{U}(t) + \frac{1}{2} U^T(t) \mathbf{K} U(t) - U^T(t) F,$$

reste constante au cours du temps.

En pratique, nous avons choisi les schémas éléments finis suivants :

- En triangles : la vitesse est constante sur chaque élément (approximation P_0) et le déplacement discrétisé en HCT réduit ;
- En quadrangles : la vitesse est constante sur chaque élément (approximation Q_0) et le déplacement discrétisé en FVS réduit ;

Dans ces deux cas, montrer théoriquement la condition Inf-Sup semble très complexe, aussi avons-nous eu recours à une vérification numérique pour les exemples présentés plus loin (plus de détails sont donnés dans [8]).

4 Schémas totalement discrétisés

4.1 Schémas de type Newmark

Pour prendre en compte le coefficient de restitution e (3), nous suivons le choix de Paoli-Schatzman [6], qui consiste à remplacer dans le schéma de Newmark U^{n+1} par $\frac{U^{n+1} + eU^{n-1}}{1+e}$. Ceci conduit au schéma de Newmark- e - β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U^{n+1,e} \equiv \frac{U^{n+1} + eU^{n-1}}{1+e} \in \mathbb{K}^h \text{ tel que pour tout } W \in \mathbb{K}^h : \\ (W - U^{n+1,e})^T \left(\mathbf{M}_r \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{K} (\beta U^{n+1} + (1-2\beta)U^n + \beta U^{n-1}) \right) \\ \geq (W - U^{n+1,e})^T F^{n,\beta}, \end{array} \right.$$

avec $F^{n,\beta} = \beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}$. On notera que le schéma de Newmark ($\beta, \gamma = 1/2$) implicite correspond à $e = 0$. Dans ce cas, nous avons montré sa stabilité inconditionnelle pour $\beta = 1/2$ [7].

Dans le cas d'une matrice de masse singulière, on peut montrer [8] que le schéma de Newmark s'écrit exactement de la même façon, la matrice de masse régulière \mathbf{M}_r étant remplacée par la matrice de masse singulière \mathbf{M} .

4.2 Schéma du point milieu

Le schéma du point milieu appliqué à (5) consiste à trouver $U^{n+1/2}$ dans \mathbb{K}^h tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (W - U^{n+1/2})^T (\mathbf{M} A^{n+1/2} + \mathbf{K} U^{n+1/2}) \geq (W - U^{n+1/2})^T F^n, \forall W \in \mathbb{K}^h, \\ U^{n+1/2} = \frac{U^n + U^{n+1}}{2}, \quad V^{n+1/2} = \frac{V^n + V^{n+1}}{2}, \\ \mathbf{B} U^{n+1} = \mathbf{B} U^n + \Delta t \mathbf{C} V^{n+1/2}, \quad \mathbf{C} V^{n+1} = \mathbf{C} V^n + \Delta t \mathbf{B} A^{n+1/2}, \end{array} \right.$$

où $A^{n+1/2}$ est l'accélération au "pas de temps milieu" $n + 1/2$. Comme \mathbf{C} est inversible, on peut exprimer les vitesses discrétisées et l'accélération $A^{n+1/2}$ en fonction des déplacements, ce qui conduit à la nouvelle formulation :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^n \text{ et } V^n \text{ étant connus, trouver } U^{n+1/2} \in \mathbb{K}^h \text{ tel que :} \\ (W - U^{n+1/2})^T \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} U^{n+1/2} + \mathbf{K} U^{n+1/2} \right) \geq (W - U^{n+1/2})^T \bar{F}^n, \quad \forall W \in \mathbb{K}^h, \\ \text{où } \bar{F}^n = F^n + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} U^n + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{B}^T V^n, \\ U^{n+1} = 2U^{n+1/2} - U^n, \quad V^{n+1} = 2\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - V^n. \end{array} \right. \quad (6)$$

Dans le cas $\mathbb{H}^h = \mathbb{W}^h$, qui correspond à la discrétisation classique pour laquelle vitesse et déplacement sont approchés de la même façon, on obtient un schéma similaire à (6), les seules différences étant que la matrice de masse singulière \mathbf{M} est remplacée par la matrice de masse régulière \mathbf{M}_r , tandis que $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ et donc $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} = I$. Enfin, on n'a pas démontré la convergence de ces schémas mais on observe de bons résultats numériques avec la matrice de masse singulière et des instabilités dans le cas régulier.

5 Résultats numériques

On considère une plaque de plan moyen $\Omega =]0, L[\times]0, l[$, de longueur $L = 120 \text{ cm}$, de largeur $l = 40 \text{ cm}$ et de demi-épaisseur $\varepsilon = 0.5 \text{ cm}$. Ses caractéristiques mécaniques sont $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7.77 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 0.3$. La plaque est située au-dessus d'un obstacle rigide plan, autrement dit :

$$g_2(x_1, x_2) = +\infty, \quad g_1(x_1, x_2) = -0.1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

et elle est supposée encadrée sur le côté $x_1 = 0$ et libre sur les 3 autres.

Comme on s'intéresse essentiellement à la conservation de l'énergie, le terme source vaut $f(x, t) \equiv 0$ pour tout x et t . Toute l'énergie est contenue dans le déplacement initial u_0 , obtenu comme la position d'équilibre statique de la plaque soumise à un effort constant $f_0 = 14600 \text{ N}$, et dans la vitesse initiale $v_0 = 0$. D'autres résultats numériques associés à des chargements différents sont présentés dans [7]. Enfin, tous les tests numériques ont été réalisés avec GETFEM++ [4] via l'interface Matlab.

5.1 Etude du déplacement pour $e = 0$ ou $e = 1$

On étudie d'abord l'effet de la discrétisation de la matrice de masse (singulière ou régulière), ainsi que celui du coefficient de restitution e , lors de l'utilisation d'un schéma de Newmark de paramètre $\beta = 1/2$. On remarquera juste que $e = 1$ n'est testé qu'avec une matrice de masse singulière. Les figures 1 et 2 représentent le déplacement d'un coin de la plaque, situé sur le bord opposé à l'encastrement. Comme on pouvait s'y attendre, les déplacements obtenus avec $e = 1$ sont moins amortis que les autres.

5.2 Conservation de l'énergie

Les calculs suivants illustrent les effets de la discrétisation de la matrice de masse et du coefficient de restitution e sur les variations de l'énergie. En l'absence de chargement, l'énergie discrète E_n s'écrit :

$$E_n = \frac{1}{8\Delta t^2} (U^{n+1} - U^{n-1})^T \mathbf{M} (U^{n+1} - U^{n-1}) + \frac{1}{2} (U^n)^T \mathbf{K} U^n.$$

Les figures 3 et 4 donnent l'évolution de l'énergie calculée avec divers pas de temps, pour un schéma de Newmark de paramètre $\beta = 1/2$. Quand e est nul, on sait que ce schéma est globalement dissipatif (voir par exemple [3]). On peut observer effectivement que l'énergie reste constante entre les impacts

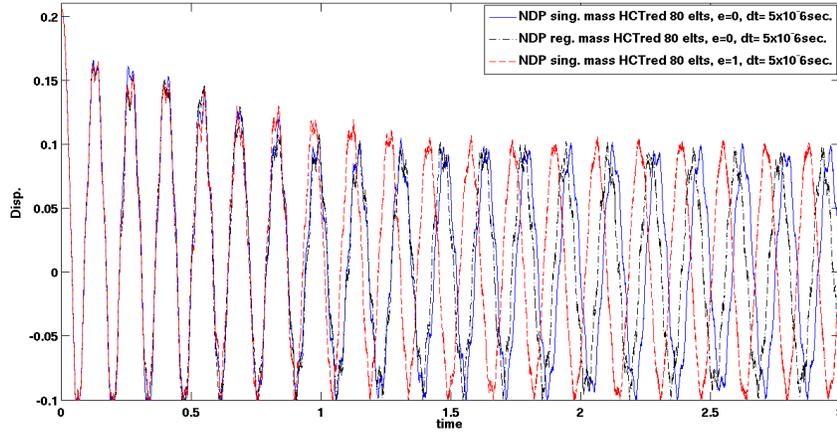


Fig. 1 – HCT réduit (80 triangles). Schéma de Newmark , $\Delta t = 5.10^{-6}$. $e = 0$ ou $e = 1$, matrices de masse régulière ou singulière.

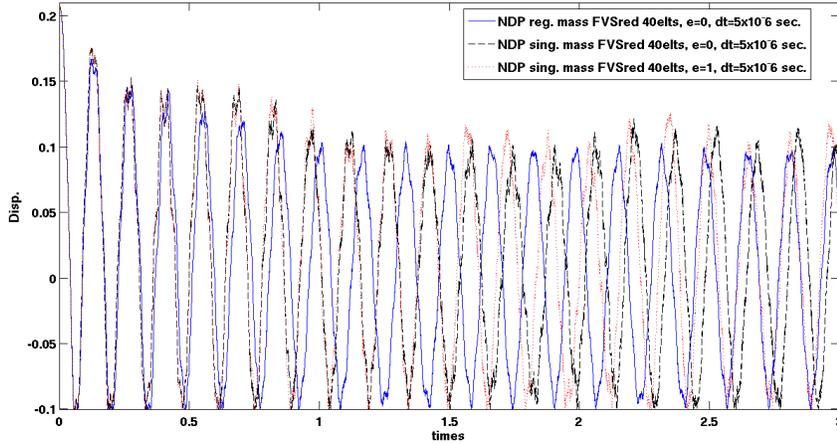


Fig. 2 – FVS réduit (40 quadrangles). Schéma de Newmark , $\Delta t = 5.10^{-6}$. $e = 0$ ou $e = 1$, matrices de masse régulière ou singulière.

mais décroît à chacun d'eux. Cependant, lorsque le pas de temps tend vers zéro, cette perte d'énergie diminue et on peut penser que le schéma devient conservatif à la limite. Pour comparaison, on indique l'évolution de l'énergie lors d'un calcul utilisant la matrice de masse régulière, avec le plus petit pas de temps. On voit ainsi que la perte d'énergie est bien moindre avec la matrice de masse singulière. Par ailleurs, lorsque $e = 1$, l'énergie augmente légèrement et peut être stabilisée quand le pas de temps est assez petit. Enfin, on pourra noter que cette condition sur le pas de temps semble plus restrictive pour les triangles que pour les quadrangles.

Les figures 5 et 6 donnent l'évolution de l'énergie calculée avec divers pas de temps, pour un schéma du point milieu, utilisant la matrice de masse singulière, schéma dont on peut espérer qu'il soit conservatif. On note exactement les mêmes choses qu'avec le schéma de Newmark : l'énergie augmente légèrement et peut être stabilisée avec un pas de temps assez petit, cette condition semblant plus restrictive pour les triangles que pour les quadrangles.

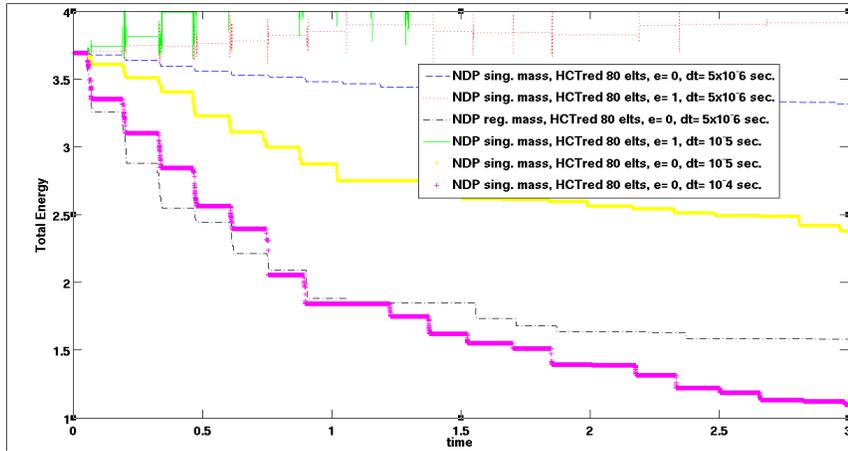


Fig. 3 – HCT réduit (80 triangles). Schéma de Newmark pour divers pas de temps. $e = 0$ ou $e = 1$, matrices de masse régulière ou singulière.

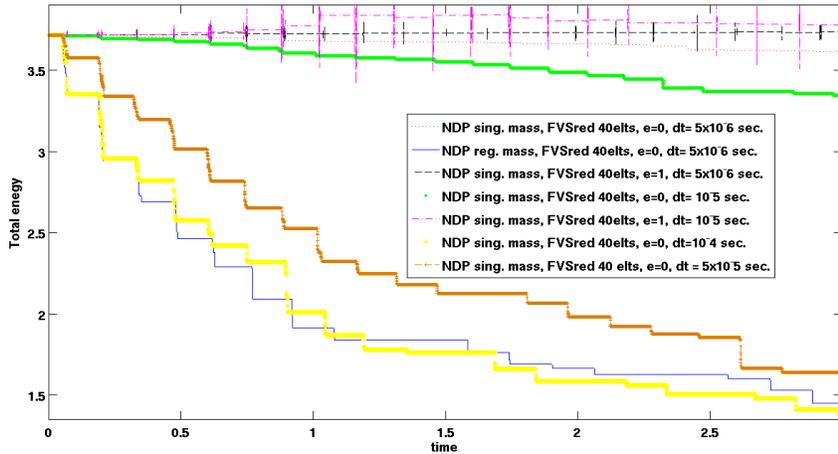


Fig. 4 – FVS réduit (40 quadrangles). Schéma de Newmark pour divers pas de temps. $e = 0$ ou $e = 1$, matrices de masse régulière ou singulière.

6 Conclusion

Ce papier présente une application de la méthode de la dynamique singulière au cas d'un modèle de plaque en flexion de Kirchhoff-Love. Les possibilités de cette méthode sont illustrées à travers plusieurs exemples numériques et deux schémas, asymptotiquement conservatifs en énergie, sont présentés. La suite de ce travail sera d'améliorer ce modèle par la prise en compte du glissement et de l'amortissement, ainsi qu'une meilleure compréhension de l'effet et de la signification du coefficient de restitution e lors de l'impact.

Références

- [1] J. Ahn, D.E. Stewart, *An Euler-Bernoulli beam with dynamic contact : discretization, convergence and numerical results*, SIAM J. Numer. Anal., 43 (4), 1455–1480, 2005.
- [2] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978

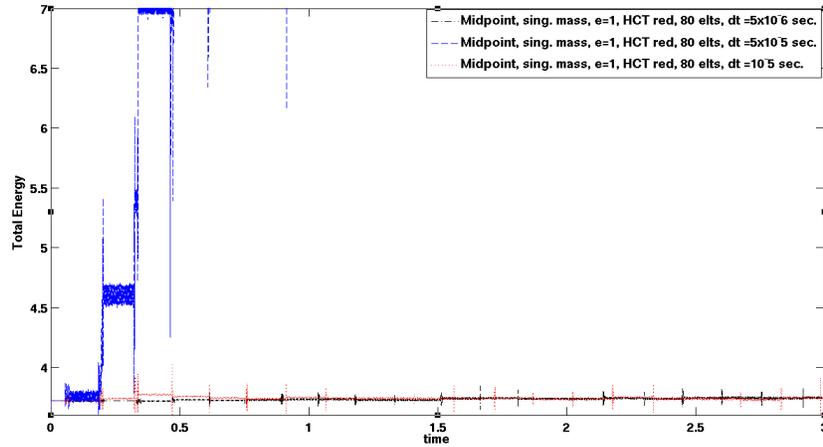


Fig. 5 – HCT réduit (80 triangles). Schéma du point milieu pour divers pas de temps. $e = 1$, matrice de masse singulière.

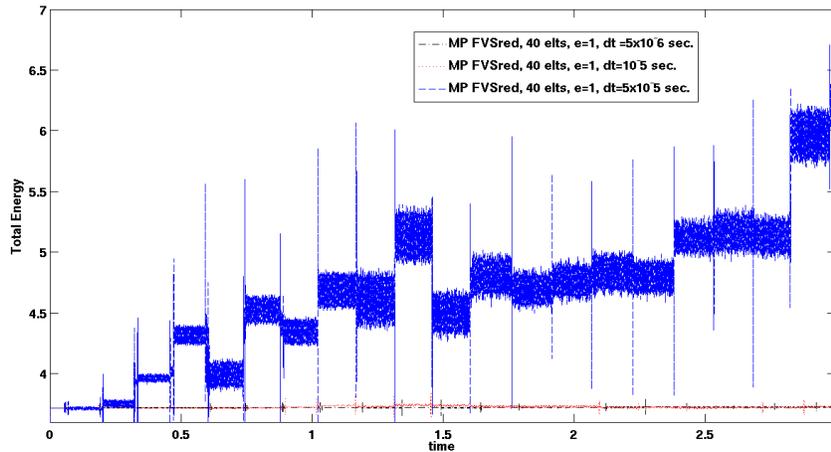


Fig. 6 – FVS réduit (40 quadrangles). Schéma du point milieu pour divers pas de temps. $e = 1$, matrice de masse singulière.

- [3] Y. Dumont, L. Paoli. *Vibrations of a beam between obstacles : convergence of a fully discretized approximation*, M2AN, 40 (4), 705–734, 2006.
- [4] Y. Renard, J. Pommier, *An open source generic C++ library for finite element methods*. <http://home.gna.org/getfem/>
- [5] L. Paoli, *Time discretization of vibro-impact*, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A, 359, 2405–2428, 2001.
- [6] L. Paoli, M. Schatzman, *Numerical simulation of the dynamics of an impacting bar*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 196, 2839–2851, 2007.
- [7] C. Pozzolini, Y. Renard, M. Salaün, *Vibro-Impact of a plate on rigid obstacles : existence theorem, convergence of a scheme and numerical simulations*, IMA J. Numer. Anal., doi : 10.1093/imanum/drr057, 2012.
- [8] C. Pozzolini, Y. Renard, M. Salaün. *Energy conservative finite element semi-discretization for vibro-impacts of plates on rigid obstacles*, submitted, 2012.
- [9] Y. Renard. *The singular dynamic method for constrained second order hyperbolic equations. Application to dynamic contact problems*, J. Comput. Appl. Math., 234 (3), 906–923, 2010.