



**HAL**  
open science

## **Influence du statut des points d'intégration sur les algorithmes de contact-frottement**

Patrick Massin, Alexandre Martin

### ► **To cite this version:**

Patrick Massin, Alexandre Martin. Influence du statut des points d'intégration sur les algorithmes de contact-frottement. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. ⟨hal-01717088⟩

**HAL Id: hal-01717088**

**<https://hal.science/hal-01717088v1>**

Submitted on 25 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

# Influence du statut des points d'intégration sur les algorithmes de contact-frottement

Alexandre MARTIN <sup>1\*</sup>, Patrick MASSIN <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables - UMR EDF/CNRS/CEA 8193, alexandre-externe.martin@edf.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables - UMR EDF/CNRS/CEA 8193, patrick.massin@edf.fr

\* Auteur correspondant

**Résumé** — Cette contribution propose une nouvelle approche des équations du contact-frottement, basée sur un nouveau schéma d'intégration des équations de la méthode continue. Après avoir rappelé les équations de la méthode continue et le schéma d'intégration actuel, le nouveau schéma d'intégration est présenté. Les propriétés du nouveau schéma d'intégration sont ensuite discutées et illustrées dans le cas du décollement.

**Mots clés** — contact-frottant, méthode continue, intégration numérique

## 1 Introduction

L'approche *mortar* apparaît aujourd'hui comme la méthode disponible dans la littérature la plus robuste pour traiter les problèmes de contact-frottant (*cf.* Laursen *et al.* [4]). Elle propose une méthode d'intégration capable de gérer la non-conformité géométrique des maillages des surfaces des objets en contact. Néanmoins, cette approche est encore trop coûteuse pour être intégrée dans les codes de calcul éléments finis industriels et tridimensionnels.

Cette contribution propose une nouvelle approche, basée sur un nouveau schéma d'intégration des équations de la méthode continue proposée initialement par H. Ben Dia *et al.* [2, 3, 1]. La méthode continue propose de transformer les inéquations apparaissant dans la formulation des lois de contact-frottant par des équations, en introduisant des champs de signe.

La première section rappelle les équations de la méthode continue et les méthodes de discrétisation des champs et des statuts de contact utilisées actuellement. La seconde section présente la nouvelle méthode de discrétisation basée sur une évaluation des statuts de contact aux nœuds. Le système linéaire à résoudre pour une itération de l'algorithme de Newton-Raphson est présenté et sa structure est illustrée sur un exemple.

## 2 La méthode continue

### 2.1 Formulation des équations du contact-frottement

On considère la loi de contact de Signorini :

$$\lambda \leq 0, d_n \leq 0, \lambda \cdot d_n = 0, \quad (1)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de contact, ou pression de contact et  $d_n$  est le jeu. On introduit le multiplicateur de Lagrange augmenté  $g_n$  défini par :

$$g_n = \lambda - \rho_n d_n, \quad (2)$$

où  $\rho_n$  est un réel strictement positif. On définit alors le statut de contact  $S_u$  par :

$$S_u = \begin{cases} 1, & \text{si } g_n \leq 0 \text{ (contact)} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3)$$

La loi de Signorini peut alors être reformulée de façon équivalente :

$$S_u d_n + \frac{1}{h_n} (1 - S_u) \lambda = 0, \quad (4)$$

où  $h_n$  est un réel strictement positif.

On considère la loi de frottement de Coulomb :

$$\begin{cases} \|\mathbf{R}_\tau\| < \mu|\lambda| \Leftrightarrow \mathbf{v}_\tau = \mathbf{0} \\ \|\mathbf{R}_\tau\| = \mu|\lambda| \Leftrightarrow \exists \alpha \geq 0, \mathbf{v}_\tau = -\alpha \mathbf{R}_\tau, \\ d_n \cdot \mathbf{R}_\tau = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où  $\mathbf{R}_\tau$  est la réaction de frottement,  $\mathbf{v}_\tau$  est la vitesse de glissement et  $\mu$  est le coefficient de frottement. La loi de Coulomb peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{R}_\tau = \mu\lambda\mathbf{\Lambda}, \|\mathbf{\Lambda}\| \leq 1, \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{v}_\tau = \|\mathbf{v}_\tau\|, \quad (6)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est le semi-multiplicateur de frottement. On introduit le multiplicateur de frottement augmenté  $\mathbf{g}_\tau$  défini par :

$$\mathbf{g}_\tau = \mathbf{\Lambda} + \rho_\tau \mathbf{v}_\tau. \quad (7)$$

où  $\rho_\tau$  est un réel strictement positif. On définit alors le statut de frottement  $S_f$  par :

$$S_f = \begin{cases} 1, & \text{si } \|\mathbf{g}_\tau\| \leq 1 \text{ (adhérence)} \\ 0, & \text{sinon (glissement)} \end{cases}. \quad (8)$$

La loi de Coulomb peut alors être reformulée de façon équivalente :

$$(1 - S_u)\mathbf{\Lambda} + S_u \left[ (1 - S_f)\mathbf{\Lambda} - S_f h_\tau \mathbf{v}_\tau - (1 - S_f) \frac{\mathbf{\Lambda} + h_\tau \mathbf{v}_\tau}{\|\mathbf{\Lambda} + h_\tau \mathbf{v}_\tau\|} \right] = 0, \quad (9)$$

où  $h_\tau$  est un réel strictement positif.

## 2.2 Formulation variationnelle du problème de contact-frottement

Soit  $CA = (H^1(\Omega))^{2d}$ ,  $H = H^{-1/2}(\Gamma_c)$  et  $\mathbf{H} = (H^{-1/2}(\Gamma_c))^{d-1}$ . La formulation variationnelle du problème de contact-frottement s'écrit, en quasi-statique :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{\Lambda}) \in CA \times H \times \mathbf{H} \text{ t. q. } \forall (\mathbf{u}^*, \lambda^*, \mathbf{\Lambda}^*) \in CA \times H \times \mathbf{H}, \\ \begin{cases} G_{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + G_{\text{ext}}(\mathbf{u}^*) + G_{\text{cont}}(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + G_{\text{frot}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = 0 \\ G_{\text{cont}}^{\text{faible}}(\lambda, \mathbf{u}, \lambda^*) = 0 \\ G_{\text{frot}}^{\text{faible}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda, \mathbf{u}, \mathbf{\Lambda}^*) = 0 \end{cases} \end{cases}, \quad (10)$$

où  $G_{\text{int}}$  représente le travail des efforts intérieurs,  $G_{\text{ext}}$  le travail des efforts extérieurs,  $G_{\text{cont}}$  le travail des forces de contact,  $G_{\text{frot}}$  le travail des forces de frottement,  $G_{\text{cont}}^{\text{faible}}$  la formulation faible de la loi de contact et  $G_{\text{frot}}^{\text{faible}}$  la formulation faible de la loi de frottement.

Le travail des forces de contact s'écrit :

$$G_{\text{cont}}(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \int_{\Gamma_c} S_u \lambda \llbracket \mathbf{u}^* \rrbracket_n d\Gamma_c. \quad (11)$$

La formulation faible de la loi de contact est, d'après (4) :

$$G_{\text{cont}}^{\text{faible}}(\lambda, \mathbf{u}, \lambda^*) = - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \lambda \lambda^* d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} S_u d_n \lambda^* d\Gamma_c. \quad (12)$$

La vitesse de glissement peut être réécrite de façon incrémentale :

$$\mathbf{v}_\tau = \frac{1}{\Delta t} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau, \quad (13)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps. Le travail des forces frottement s'écrit :

$$G_{\text{frot}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u S_f \mathbf{\Lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}^* \rrbracket_\tau d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u (1 - S_f) \frac{\mathbf{\Lambda} + \bar{h}_\tau \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau}{\|\mathbf{\Lambda} + \bar{h}_\tau \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau\|} \cdot \llbracket \mathbf{u}^* \rrbracket_\tau d\Gamma_c, \quad (14)$$

où on a posé  $\bar{h}_\tau = h_\tau / \Delta t$ . La formulation faible de la loi de frottement est, d'après (9) :

$$\begin{aligned} G_{\text{frot}}^{\text{faible}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda, \mathbf{u}, \mathbf{\Lambda}^*) &= \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^* d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u S_f \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau \cdot \mathbf{\Lambda}^* d\Gamma_c - \\ &\int_{\Gamma_c} \frac{1}{\bar{h}_\tau} \mu \lambda S_u (1 - S_f) \left( \mathbf{\Lambda} - \frac{\mathbf{\Lambda} + \bar{h}_\tau \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau}{\|\mathbf{\Lambda} + \bar{h}_\tau \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\tau\|} \right) \cdot \mathbf{\Lambda}^* d\Gamma_c. \end{aligned} \quad (15)$$

Il est à noter que dans (15) le terme de frottement (*i.e.* le terme actif si  $S_u = 1$ ) a été mis à l'échelle (*i.e.* multiplié par  $\mu\lambda/\bar{h}_\tau$ ) dans le but de rendre le système symétrique.

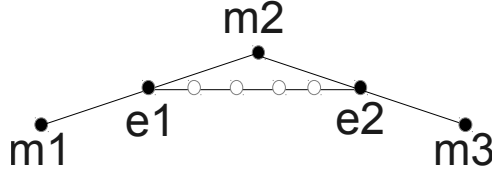


Fig. 1 – exemple de contact entre surfaces courbes discrétisées.

### 2.3 Discrétisation des champs nodaux

La discrétisation de la pression de contact est :

$$\lambda = \sum_{j=1}^{nne} \psi_j \lambda_j, \quad (16)$$

où  $\lambda_j$  et  $\psi_j$  sont respectivement la pression de contact et la fonction de forme associée au nœud esclave  $j$ .

La discrétisation du semi-multiplicateur de frottement s'écrit :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{nne} \psi_j [T] \{\Lambda_j\}, \quad (17)$$

où  $\{\Lambda_j\}$  est l'expression du semi-multiplicateur de frottement associé au nœud  $j$  dans la base du plan tangent au point de contact et  $[T]$  la matrice de passage du plan tangent à l'espace global.

La discrétisation du saut de déplacement est :

$$[[\mathbf{u}]] = \sum_{j=1}^{nne} \phi_j \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k \mathbf{u}_k^m. \quad (18)$$

On en déduit la discrétisation des jeux :

$$[[\mathbf{u}]]_n = \left( \sum_{j=1}^{nne} \phi_j \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k \mathbf{u}_k^m \right) \cdot \mathbf{n}, \quad (19)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface maître de contact, et la discrétisation des sauts de déplacement tangents :

$$[[\mathbf{u}]]_\tau = [P_T] \left( \sum_{j=1}^{nne} \phi_j \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k \mathbf{u}_k^m \right), \quad (20)$$

où  $[P_T]$  est la matrice de projection sur le plan tangent.

### 2.4 Discrétisation des statuts de contact

La discrétisation des statuts de contact repose sur une méthode de collocation, *i.e.* les statuts de contacts sont évalués aux points d'intégration. On a ainsi pour le travail des forces de contact :

$$G_{\text{cont}}(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \sum_{c=1}^{npi} S_{uc} \left[ \sum_{j=1}^{nne} \psi_j(\mathbf{p}_c) \lambda_j \right] \left[ \left( \sum_{j=1}^{nne} \phi_j(\mathbf{p}_c) \mathbf{u}_j^{e*} - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k(\mathbf{p}'_c) \mathbf{u}_k^{m*} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{p}'_c) \right] \omega_c, \quad (21)$$

où  $S_{uc}$  est le statut du point d'intégration  $c$ ,  $\mathbf{p}_c$  les coordonnées du point d'intégration  $c$  sur la surface esclave et  $\mathbf{p}'_c$  les coordonnées du projeté du point d'intégration  $c$  sur la surface maître.

Considérons la configuration de la Fig. 1. Il s'agit d'une situation typique lorsqu'on considère le cas de deux cylindres concentriques en contact. Les sauts de déplacement normaux aux nœuds  $e1$  et  $e2$  sont nuls.

L'usage de l'équation (18) donne des sauts de déplacement normaux aux points d'intégration *a priori* non nuls. Ces jeux sont introduits par la discrétisation des deux surfaces en contact et n'existent pas

dans la réalité. Le problème revient ainsi à estimer une situation à nœuds contactants avec des points d'intégration non-contactants.

Supposons que de plus les nœuds e1 et e2 sont adhérents. Les sauts de déplacement tangents aux nœuds e1 et e2 sont nuls. De la même manière que pour les jeux, l'usage de l'équation (20) donne des sauts de déplacement tangents aux points d'intégration *a priori* non nuls. Le problème revient cette fois à estimer une situation à nœuds adhérents avec des points d'intégration glissants.

### 3 Nouvelle discrétisation des champs

#### 3.1 Discrétisation des champs nodaux

D'après (18), la discrétisation du saut de déplacement au nœud  $j$  est :

$$[[\mathbf{u}]]_j = \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k(\mathbf{n}_j) \mathbf{u}_k^m, \quad (22)$$

où  $\mathbf{n}_j$  est le projeté sur la surface maître du nœud esclave  $j$ . La discrétisation du jeu au nœud  $j$  est alors :

$$[[\mathbf{u}]]_{nj} = \left( \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k(\mathbf{n}_j) \mathbf{u}_k^m \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{n}_j), \quad (23)$$

et la discrétisation du saut de déplacement tangent au nœud  $j$  est :

$$[[\mathbf{u}]]_{\tau j} = [P_T] \left( \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nm} \phi'_k(\mathbf{n}_j) \mathbf{u}_k^m \right). \quad (24)$$

On propose une nouvelle approximation du saut de déplacement basée sur l'interpolation des sauts de déplacements nodaux :

$$[[\mathbf{u}]] = \sum_{j=1}^{nne} \phi_j [[\mathbf{u}]]_j. \quad (25)$$

On en déduit la discrétisation des jeux :

$$[[\mathbf{u}]]_n = \sum_{j=1}^{nne} \phi_j [[\mathbf{u}]]_{nj}, \quad (26)$$

et la discrétisation des sauts de déplacements tangents :

$$[[\mathbf{u}]]_{\tau} = \sum_{j=1}^{nne} \phi_j [[\mathbf{u}]]_{\tau j}. \quad (27)$$

Reprenons l'exemple de la Fig. 1. Les sauts de déplacement normaux aux nœuds e1 et e2 sont nuls, soit  $[[\mathbf{u}]]_{n1} = [[\mathbf{u}]]_{n2} = 0$ . D'après (26), on a donc pour tout point d'intégration :

$$[[\mathbf{u}]]_n = \phi_1 [[\mathbf{u}]]_{n1} + \phi_2 [[\mathbf{u}]]_{n2} = 0. \quad (28)$$

Le problème revient donc à estimer une situation à nœuds contactants avec des points d'intégration contactants.

Si de plus les nœuds e1 et e2 sont adhérents, on a  $[[\mathbf{u}]]_{\tau 1} = [[\mathbf{u}]]_{\tau 2} = 0$ . D'après (27), on a donc pour tout point d'intégration :

$$[[\mathbf{u}]]_{\tau} = \phi_1 [[\mathbf{u}]]_{\tau 1} + \phi_2 [[\mathbf{u}]]_{\tau 2} = 0. \quad (29)$$

Le problème revient cette fois-ci à estimer une situation à nœuds adhérents avec des points d'intégration adhérents.

On a ainsi montré que l'usage de la nouvelle discrétisation des sauts de déplacement permet de lever les contradictions observées avec la méthode actuelle.

### 3.2 Discrétisation des statuts de contact

Les statuts de contact et de frottement sont des fonctions à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Ils vérifient donc

$$S_u^2 \in \{0, 1\}, (1 - S_u)^2 \in \{0, 1\}, S_f^2 \in \{0, 1\} \text{ et } (1 - S_u)^2 \in \{0, 1\}. \quad (30)$$

On ainsi pour le travail des forces de contact :

$$G_{\text{cont}}(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \int_{\Gamma_c} (S_u \lambda) (S_u [\mathbf{u}^*]_n) d\Gamma_c. \quad (31)$$

On introduit de nouvelles discrétisation des champs prenant en compte les statuts de contact. La discrétisation de la pression de contact devient :

$$S_u \lambda = \sum_{j=1}^{nme} S_{uj} \Psi_j \lambda_j, \quad (32)$$

et celle du jeu devient :

$$S_u [\mathbf{u}]_n = \sum_{j=1}^{nme} S_{uj} \Phi_j \left( \mathbf{u}_j^e - \sum_{k=1}^{nme} \Phi'_k(\mathbf{n}_j) \mathbf{u}_k^m \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{n}_j). \quad (33)$$

On obtient donc pour le travail des forces de contact :

$$G_{\text{cont}}(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \int_{\Gamma_c} \left[ \sum_{j=1}^{nme} S_{uj} \Psi_j \lambda_j \right] \left[ \sum_{i=1}^{nme} S_{uj} \Phi_i \left( \mathbf{u}_i^{e*} - \sum_{k=1}^{nme} \Phi'_k(\mathbf{n}_i) \mathbf{u}_k^{m*} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{n}_i) \right] d\Gamma_c. \quad (34)$$

Le problème de contact-frottant comporte trois non-linéarités principales :

1. l'orientation des repères de contact dépend de la géométrie de la surface de contact,
2. les équations du contact-frottement dépendent des valeurs de statuts de contact,
3. le seuil de frottement dépend de la pression de contact,

Ces non-linéarités peuvent être résolues en considérant trois boucles de point fixe imbriquées [2]. On considère donc dans la suite que l'on connaît la géométrie, les valeurs des statuts de contact et le seuil de frottement  $\mu \lambda_s$ . Les non-linéarités restantes sont résolues en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

### 3.3 Système linéaire à résoudre

On introduit pour chaque degré de liberté  $x$  la décomposition  $x = \Delta x + \delta x$ , où  $\Delta x$  est la valeur cumulée depuis le début du processus et  $\delta x$  est l'incrément inconnu. En utilisant la nouvelle discrétisation des champs et les statuts nodaux aux autres termes des équations du contact-frottement, on obtient le système symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} [K_t^e] + [A_{e,g}^e] & [A_{m,g}^e] & [A_\lambda^e] & \left[ \begin{array}{c} [A_{\Lambda,a}^e] + [A_{\Lambda,g}^e] \\ [A_{\Lambda,a}^m] + [A_{\Lambda,g}^m] \\ [0] \\ [A_{\Lambda,g}^\Lambda] + [A_{\Lambda,sc}^\Lambda] \end{array} \right] \\ [A_{m,g}^e]^T & [K_t^m] + [A_{m,g}^m] & [A_\lambda^m] & \\ [A_\lambda^e]^T & [A_\lambda^m]^T & [A_\lambda^\lambda] & \\ \left[ \begin{array}{c} [A_{\Lambda,a}^e] + [A_{\Lambda,g}^e] \\ [A_{\Lambda,a}^m] + [A_{\Lambda,g}^m] \\ [0] \end{array} \right]^T & & [0] & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta \mathbf{u}^e\} \\ \{\delta \mathbf{u}^m\} \\ \{\delta \lambda\} \\ \{\delta \Lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{L_{\text{int}}^{u_e}\} + \{L_{\text{cf}}^{u_e}\} + \{L_{f,a}^{u_e}\} + \{L_{f,g}^{u_e}\} \\ \{L_{\text{int}}^{u_m}\} + \{L_{\text{cf}}^{u_m}\} + \{L_{f,a}^{u_m}\} + \{L_{f,g}^{u_m}\} \\ \{L_\lambda^u\} + \{L_\lambda^\lambda\} \\ \{L_{\Lambda,a}^u\} + \{L_{\Lambda,g}^{u,\Lambda}\} + \{L_{\Lambda,sc}^\Lambda\} \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Les matrices apparaissant dans le système (35) s'écrivent :

$$[A_{e,g}^e]_{ij} = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s \bar{h}_\tau S_{ui} S_{uj} (1 - S_{fi}) (1 - S_{fj}) \phi_i \phi_j [P_T]^T [K_B] [P_T] d\Gamma_c, \quad (36)$$

$$[A_{m,g}^e]_{ij} = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \mu \lambda_s \bar{h}_\tau S_{ui} S_{uk} (1 - S_{fi}) (1 - S_{fk}) \phi_i \phi_k \phi'_j(\mathbf{n}_k) [P_T]^T [K_B] [P_T] d\Gamma_c, \quad (37)$$

$$[A_\lambda^e]_{ij} = - \int_{\Gamma_c} S_{ui} S_{uj} \phi_i \psi_j \{ \mathbf{n}(\mathbf{n}_i) \} d\Gamma_c, \quad (38)$$

$$[A_{\lambda,a}^e]_{ij} = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s S_{ui} S_{uj} S_{fi} S_{fj} \phi_i \psi_j [P_T]^T [T] d\Gamma_c, \quad (39)$$

$$[A_{\lambda,g}^e]_{ij} = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s S_{ui} S_{uj} (1 - S_{fi}) (1 - S_{fj}) \phi_i \psi_j [P_T]^T [K_B] [T] d\Gamma_c, \quad (40)$$

$$[A_{m,g}^m]_{ij} = - \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \sum_{l=1}^{nne} \mu \lambda_s \bar{h}_\tau S_{uk} S_{ul} (1 - S_{fk}) (1 - S_{fl}) \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) \phi_l \phi'_j(\mathbf{n}_l) [P_T]^T [K_B] [P_T] d\Gamma_c, \quad (41)$$

$$[A_\lambda^m]_{ij} = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} S_{uk} S_{uj} \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) \psi_j \{ \mathbf{n}(\mathbf{n}_k) \} d\Gamma_c, \quad (42)$$

$$[A_{\lambda,a}^m]_{ij} = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \mu \lambda_s S_{uk} S_{uj} S_{fk} S_{fj} \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) \psi_j [P_T]^T [T] d\Gamma_c, \quad (43)$$

$$[A_{\lambda,g}^m]_{ij} = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \mu \lambda_s S_{uk} S_{uj} (1 - S_{fk}) (1 - S_{fj}) \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) \psi_j [P_T]^T [K_B] [T] d\Gamma_c, \quad (44)$$

$$[A_\lambda^\lambda]_{ij} = - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} (1 - S_{ui}) (1 - S_{uj}) \psi_i \psi_j d\Gamma_c, \quad (45)$$

$$[A_{\lambda,g}^\lambda]_{ij} = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\bar{h}_\tau} \mu \lambda_s S_{ui} S_{uj} (1 - S_{fi}) (1 - S_{fj}) \psi_i \psi_j [T]^T ([I] - [K_B]) [T] d\Gamma_c, \quad (46)$$

$$[A_{\lambda,sc}^\lambda]_{ij} = \int_{\Gamma_c} (1 - S_{ui}) (1 - S_{uj}) \psi_i \psi_j [T]^T [T] d\Gamma_c, \quad (47)$$

où  $[I]$  est le tenseur identité et  $[K_B]$  est la matrice tangente symétrique issue de la linéarisation de la projection sur la boule unité :

$$[K_B] = \frac{1}{\|\Delta \mathbf{h}\|} \left( [I] - \frac{\Delta \mathbf{h} \otimes \Delta \mathbf{h}}{\|\Delta \mathbf{h}\|^2} \right), \quad (48)$$

où on a posé  $\Delta \mathbf{h} = \Delta \Lambda + \bar{h}_\tau \llbracket \Delta \mathbf{u} \rrbracket_\tau$ . Les seconds membres apparaissant dans le système (35) s'écrivent :

$$\{ L_{cf}^{u_e} \}_i = - \int_{\Gamma_c} S_{ui} \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} \Delta \lambda_j \psi_j \right] \phi_i \{ \mathbf{n}(\mathbf{n}_i) \} d\Gamma_c, \quad (49)$$

$$\{ L_{f,a}^{u_e} \}_i = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s S_{ui} S_{fi} \phi_i [P_T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} S_{fj} \psi_j [T] \{ \Delta \Lambda_j \} \right] d\Gamma_c, \quad (50)$$

$$\{ L_{f,g}^{u_e} \}_i = - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s S_{ui} (1 - S_{fi}) \phi_i [P_T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} (1 - S_{fj}) \frac{\Delta \mathbf{h}_j}{\|\Delta \mathbf{h}_j\|} \right] d\Gamma_c, \quad (51)$$

$$\{ L_{cf}^{u_m} \}_i = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} S_{uk} \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} \Delta \lambda_j \psi_j \right] \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) \{ \mathbf{n}(\mathbf{n}_k) \} d\Gamma_c, \quad (52)$$

$$\{ L_{f,a}^{u_m} \}_i = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \mu \lambda_s S_{uk} S_{fk} \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) [P_T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} S_{fj} \psi_j [T] \{ \Delta \Lambda_j \} \right] d\Gamma_c, \quad (53)$$

$$\{ L_{f,g}^{u_m} \}_i = + \int_{\Gamma_c} \sum_{k=1}^{nne} \mu \lambda_s S_{uk} (1 - S_{fk}) \phi_k \phi'_i(\mathbf{n}_k) [P_T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} (1 - S_{fj}) \frac{\Delta \mathbf{h}_j}{\|\Delta \mathbf{h}_j\|} \right] d\Gamma_c, \quad (54)$$

$$\{ L_\lambda^u \}_i = - \int_{\Gamma_c} S_{ui} \left[ \sum_{j=1}^{nne} S_{uj} \tilde{d}_{nj} \psi_j \right] \psi_i d\Gamma_c, \quad (55)$$

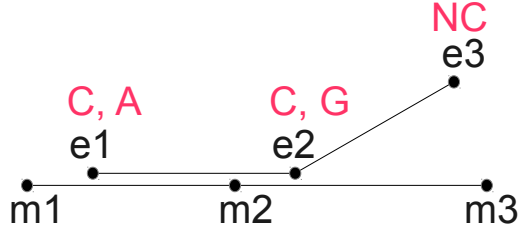


Fig. 2 – exemple de contact-frottement avec décollement.

$$\{L_{\lambda}^{\lambda}\}_i = -\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} (1 - S_{ui}) \left[ \sum_{j=1}^{nme} (1 - S_{uj}) \Delta \lambda_j \psi_j \right] \psi_i d\Gamma_c, \quad (56)$$

$$\{L_{\lambda,a}^u\}_i = -\int_{\Gamma_c} \mu \lambda_s S_{ui} S_{fi} \psi_i [T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nme} S_{uj} S_{fj} \phi_j [\Delta \mathbf{u}]_{\tau_j} \right] d\Gamma_c, \quad (57)$$

$$\{L_{\lambda,g}^{\Lambda,u}\} = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{h_{\tau}} \mu \lambda_s S_{ui} (1 - S_{fi}) \psi_i [T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nme} S_{uj} (1 - S_{fj}) \left( \psi_j [T] \{ \Delta \Lambda_j \} - \frac{\Delta \mathbf{h}_j}{\|\Delta \mathbf{h}_j\|} \right) \right] d\Gamma_c, \quad (58)$$

$$\{L_{\lambda,sc}^{\Lambda}\}_i = \int_{\Gamma_c} (1 - S_{ui}) \psi_i [T]^T \left[ \sum_{j=1}^{nme} (1 - S_{uj}) \psi_j [T] \{ \Delta \Lambda_j \} \right] d\Gamma_c, \quad (59)$$

où on a posé  $\tilde{d}_{nj} = \llbracket \mathbf{x}^{t-1} + \Delta \mathbf{u} \rrbracket_n$ , où  $\mathbf{x}^{t-1}$  sont les coordonnées au début du pas de temps, et  $\Delta \mathbf{h}_j = \psi_j \Delta \Lambda_j + \bar{h}_{\tau} \phi_j [\Delta \mathbf{u}]_{\tau_j}$ .

### 3.4 Illustration dans le cas du décollement

Considérons la situation illustrée par la Figure 2, où le nœud esclave 1 est adhérent, le nœud esclave 2 est glissant et le nœud esclave 3 est non contactant. Le système (35) s'écrit dans ce cas :

– pour la matrice :

	$\delta \mathbf{u}_1^e$	$\delta \mathbf{u}_2^e$	$\delta \mathbf{u}_3^e$	$\delta \mathbf{u}_1^m$	$\delta \mathbf{u}_2^m$	$\delta \mathbf{u}_3^m$	$\delta \lambda_1$	$\delta \lambda_2$	$\delta \lambda_3$	$\delta \Lambda_1$	$\delta \Lambda_2$	$\delta \Lambda_3$
$\mathbf{u}_1^{e*}$	$x+0$	$x+0$	$x+0$	0	0	0	$x$	$x$	0	$u+0$	$0+0$	$0+0$
$\mathbf{u}_2^{e*}$	$x+0$	$x+v$	$x+0$	$v$	$v$	$v$	$x$	$x$	0	$0+0$	$0+v$	$0+0$
$\mathbf{u}_3^{e*}$	$x+0$	$x+0$	$x+0$	0	0	0	0	0	0	$0+0$	$0+0$	$0+0$
$\mathbf{u}_1^{m*}$	0	$v$	0	$x+v$	$x+v$	$x+v$	$x$	$x$	0	$u+0$	$0+v$	$0+0$
$\mathbf{u}_2^{m*}$	0	$v$	0	$x+v$	$x+v$	$x+v$	$x$	$x$	0	$u+0$	$0+v$	$0+0$
$\mathbf{u}_3^{m*}$	0	$v$	0	$x+v$	$x+v$	$x+v$	$y$	$y$	0	$u+0$	$0+v$	$0+0$
$\lambda_1^*$	$x$	$x$	0	$x$	$x$	$y$	0	0	0			
$\lambda_2^*$	$x$	$x$	0	$x$	$x$	$y$	0	0	0			
$\lambda_3^*$	0	0	0	0	0	0	0	0	$z$			
$\Lambda_1^*$	$u+0$	$0+0$	$0+0$	$u+0$	$u+0$	$u+0$				$0+0$	$0+0$	$0+0$
$\Lambda_2^*$	$0+0$	$0+v$	$0+0$	$0+v$	$0+v$	$0+v$				$0+0$	$v+0$	$0+0$
$\Lambda_3^*$	$0+0$	$0+0$	$0+0$	$0+0$	$0+0$	$0+0$				$0+0$	$0+0$	$0+z$

– pour le second membre :

$\mathbf{u}_1^{e*}$	$x+y+u+0$
$\mathbf{u}_2^{e*}$	$x+y+0+v$
$\mathbf{u}_3^{e*}$	$x+0+0+0$
$\mathbf{u}_1^{m*}$	$x+y+u+v$
$\mathbf{u}_2^{m*}$	$x+y+u+v$
$\mathbf{u}_3^{m*}$	$x+y+u+v$
$\lambda_1^*$	$y+0$
$\lambda_2^*$	$y+0$
$\lambda_3^*$	$0+z$
$\Lambda_1^*$	$u+0+0$
$\Lambda_2^*$	$0+v+0$
$\Lambda_3^*$	$0+0+z$

où :

- $x$  désigne un terme quelconque,
- $0$  un terme identiquement nul,
- $u$  un terme pour lequel seule la contribution provenant du contact adhérent 1 est non-nulle,
- $v$  un terme pour lequel seule la contribution provenant du contact glissant 2 est non-nulle,
- $y$  un terme pour lequel la contribution provenant du contact non-contactant 3 est nulle,
- $z$  un terme pour lequel seule la contribution provenant du contact 3 est non-nulle.

On remarque que les termes dans l'équation d'équilibre correspondant au contact 3 sont identiquement nuls, car ce point de contact est non contactant. Dans l'équation d'équilibre, les termes associés au nœud maître 3 sont non nuls, car le nœud maître 3 contribue au contact 2 qui est contactant, bien que le point de contact 3 soit non contactant.

On remarque que les équations représentant la formulation faible de la loi de contact pour les contacts 1 et 2 (*i.e.* les équations associées à  $\lambda_1^*$  et  $\lambda_2^*$ ) ne font intervenir que les déplacements des nœuds, alors que l'équation représentant la formulation faible de la loi de contact pour le contact 3 ne fait intervenir que la pression de contact du nœud esclave 3. On constate ainsi que les équations correspondant à des contraintes de type "jeu de contact nul" pour les contacts contactants sont décorréllées des équations permettant de calculer une pression de contact nulle pour les nœuds non contactants.

On remarque que le nœud esclave 1 qui a le statut adhérent ne contribue qu'aux matrices et seconds membres associés au statut adhérent dans les équations associées à  $u_1^{e*}$  et  $\Lambda_1^*$ . On remarque aussi que le nœud esclave 2 qui a le statut glissant ne contribue qu'aux matrices et seconds membres associés au statut glissant dans les équations associées à  $u_2^{e*}$  et  $\Lambda_2^*$ . On constate ainsi que les équations correspondant aux nœuds adhérents sont correctement décorréllées des équations correspondant aux nœuds glissants. Il est à noter que le fait que les contacts 1 et 2 contribuent aux équations  $u_1^{m*}$ ,  $u_2^{m*}$  et  $u_3^{m*}$  est dû à l'assemblage des éléments de contact.

On remarque que les termes correspondant au frottement pour le contact 3 dans l'équation d'équilibre (*i.e.* les équations associées à  $u_1^{e*}$ ,  $u_2^{e*}$ ,  $u_3^{e*}$ ,  $u_1^{m*}$ ,  $u_2^{m*}$  et  $u_3^{m*}$ ) sont identiquement nuls, car ce point de contact est non contactant. On constate que les équations pour les contacts contactants (*i.e.* les équations associées à  $\lambda_1^*$ ,  $\lambda_2^*$ ,  $\Lambda_1^*$  et  $\Lambda_2^*$ ) sont décorréllées des équations permettant de calculer un semi-multiplicateur de frottement pour les nœuds non contactants (*i.e.* les équations associées à  $\lambda_3^*$ ,  $\Lambda_3^*$ ).

## 4 Conclusion

Un nouveau schéma d'intégration des équations de la méthode continue pour le contact-frottement, basée sur une évaluation des statuts de contact aux nœuds, a été proposée. Il conserve les bonnes propriétés du schéma d'intégration actuel, (*e.g.* la matrice de rigidité reste symétrique), tout en permettant de définir des statuts cohérents dans des cas complexes tels que le contact entre surface courbes ou les situations de décollement.

La mise en œuvre numérique de ce nouveau schéma d'intégration dans le code d'analyse éléments finis Code\_Aster libre est en cours. Le surcoût induit par l'usage de formules de quadrature plus riches, nécessaires à l'intégration du saut de déplacement moyen, ainsi que les ordres de convergences atteignables grâce à cette méthode sont encore à évaluer.

## Références

- [1] M. Abbas. *Éléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue*. Documentation de référence de Code\_Aster. [R5.03.52]. 2012.
- [2] H. Ben Dia, I. Vautier, M. Zarroug. *Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret*, Revue Européenne des Eléments Finis, pages 243-261, 2000.
- [3] H. Ben Dia, M. Zarroug. *Hybrid frictional contact particles-in elements*, Revue Européenne des Eléments Finis, pages 417-430, 2002.
- [4] Tod A. Laursen, Michael A. Puso, Jessica Sanders. *Mortar contact formulations for deformable–deformable contact : Past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering., Elsevier, 205-208, 2012.