



**HAL**  
open science

## Conception optimale de formes surfaciques par paramétrage intrinsèque

Paul Du Cauzé De Nazelle, Frederic Gillot, Louis Jézéquel

► **To cite this version:**

Paul Du Cauzé De Nazelle, Frederic Gillot, Louis Jézéquel. Conception optimale de formes surfaciques par paramétrage intrinsèque. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01717069

**HAL Id: hal-01717069**

**<https://hal.science/hal-01717069>**

Submitted on 25 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Conception optimale de formes surfaciques par paramétrage intrinsèque

Paul du CAUZÉ de NAZELLE<sup>1</sup>, Frédéric GILLOT<sup>2</sup>, Louis JÉZÉQUEL<sup>3</sup>

<sup>1</sup> D<sub>2</sub>S, LTDS, paul.du-cauze-de-nazelle@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> D<sub>2</sub>S, LTDS, frederic.gillot@ec-lyon.fr

<sup>3</sup> D<sub>2</sub>S, LTDS, louis.jezequel@ec-lyon.fr

**Résumé** — Nous présentons dans cet article une méthode de paramétrage innovante, basée sur la formulation de coques minces de Koiter, et couplée à l'utilisation de patches de Bézier. On montre qu'il est possible d'obtenir un paramétrage efficace pour l'optimisation, en particulier qui permet une large exploration de l'espace de conception ainsi que le calcul des gradients de forme pour différents critères de dimensionnement.

**Mots clés** — optimisation, forme surfacique, théorie des coques minces de Koiter, patch de Bézier

## 1 Introduction

Afin d'améliorer la qualité des solutions proposées par l'optimisation dans les processus de conception, il est important de se donner des outils permettant à l'optimiseur de parcourir l'espace de conception le plus largement possible. Nous présentons ici une méthode efficace pour l'optimisation, qui permet d'importantes modifications de forme.

Nous proposons une méthode qui consiste à exploiter la formulation de Koiter des équations de coques [1], celle-ci intégrant paramètres de forme et mécanique, afin de l'utiliser pour faire de l'optimisation de forme sur critères mécaniques. Cette méthode a par ailleurs pour avantage de permettre le calcul des gradients. D'autre part, nous proposons de la coupler à l'utilisation des points de contrôles de carreaux de Bézier comme paramètres d'optimisation, et ainsi, de limiter au strict nécessaire le nombre de variables du problème d'optimisation, tout en permettant une large exploration de l'espace de conception.

Nous présentons dans cet article les éléments théoriques qui permettent de mettre en œuvre cette méthode, puis nous l'appliquons à deux fonctions de forme différentes afin de montrer son efficacité.

## 2 Paramétrage de forme surfacique

L'utilisation de la formulation de coques minces de Koiter [1] nous permet, en utilisant une écriture curviligne des équations d'élasticité [2, 3], d'introduire des paramètres de formes dans les équations mécaniques. Cette écriture fait intervenir des éléments de géométrie différentielle que nous allons détailler dans un premier temps, puis nous allons énoncer la formulation de Koiter, et ainsi, voir qu'il existe un dépendance aux paramètres de forme. Nous proposons d'exploiter cette dépendance pour calculer les gradients de formes de différents critères mécaniques.

### 2.1 Éléments de géométrie différentielle

Soit  $\Omega$  une forme surfacique  $3D$ , on définit alors la fonction de forme  $\varphi$  qui associe un domaine de référence bidimensionnel  $\Omega_0$  au domaine  $\Omega$  (voir figure 1) par :

$$(\xi_1, \xi_2) \in \Omega_0 \mapsto \varphi(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

On définit alors les bases locales covariantes (2) et contra-variantes (3) ainsi que la première (4) et la seconde forme fondamentale (6) de la fonction  $\varphi$ . Dans la suite de cet article, les indices grecs prennent

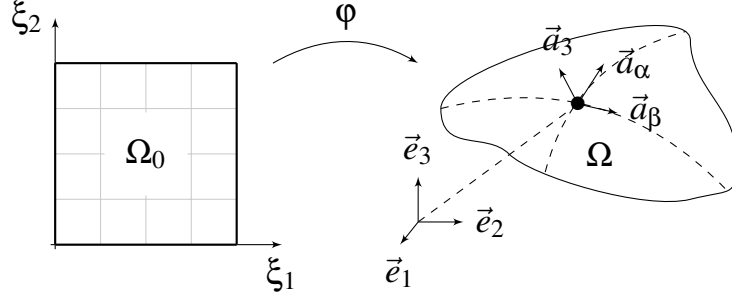


Fig. 1 – Représentation d’une géométrie  $\Omega$  à l’aide d’une fonction de forme associée et d’un plan de référence  $\Omega_0$

leurs valeurs dans  $\{1, 2\}$  et les indices latins les prennent dans  $\{1, 2, 3\}$ . À partir de (5), on peut calculer l’élément d’aire de la surface  $dS = \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2$ .

$$\begin{aligned} \vec{a}_\alpha &= \varphi_{,\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\alpha} \\ \vec{a}_3 &= \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \delta_\beta^\alpha &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}, \\ \vec{a}^\beta \cdot \vec{a}_\alpha &= \delta_\alpha^\beta, \\ \vec{a}^3 &= \vec{a}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (4)$$

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) \quad (5)$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\beta,\alpha} \quad (6)$$

Le tenseur métrique  $(a_{\alpha\beta})$  permet alors de passer de la base covariante à la base contravariante à l’aide de la relation (7) où  $(a^{\alpha\beta})$  est l’inverse de la matrice  $(a_{\alpha\beta})$ .

$$\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta, \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta = a^{\beta\alpha} \quad (7)$$

De même, on peut définir les composantes mixtes (8) et contravariantes (9) de la seconde forme fondamentale, ou inversement, calculer les composantes covariantes à partir des composantes contravariantes correspondantes (10).

$$b_\alpha^\beta = a^{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha} \quad (8)$$

$$b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\nu} b_{\lambda\nu} \quad (9)$$

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\nu} b^{\lambda\nu} \quad (10)$$

On définit alors le symbole de Christoffel (11) qui permet de calculer les dérivées des vecteurs de base dans le repère global.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \vec{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \vec{a}_\alpha \quad (11)$$

Après avoir défini les bases de la géométrie différentielle, on peut calculer la surface moyenne d’une coque mince. Cette surface moyenne nous permet alors de poser les équations de coques comme nous allons le voir dans la section suivante.

## 2.2 Le modèle linéaire de Koiter

On propose de calculer les matrices de masse et de rigidité dans le cadre de la théorie des coques de Koiter, basé sur les hypothèses de Kirchhoff-Love. On repart de la formulation variationnelle classique d'un problème d'élasticité :

$$\text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \quad (12)$$

$\mathcal{U}_{ad}$  est un sous-espace de  $H^1(\Omega_0)$  qui permet de prendre en compte les conditions aux limites (encastrement en périphérie, bord libre, etc.), on définit les expressions suivantes, qui correspondent aux formulations classiques de l'élasticité :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega_0} \varepsilon E^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\sigma\tau}(\vec{v}) + \frac{\varepsilon^3}{3} E^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) \rho_{\sigma\tau}(\vec{v}) \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \quad (13)$$

$$f(\vec{v}) = \int_{\Omega_0} \vec{p}\vec{v} \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Gamma_0} \vec{N}\vec{v} + M^\alpha (v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda) d\gamma \quad (14)$$

où  $\gamma_{\alpha\beta}$ , défini en (15), est le tenseur des taux de déformations en membrane,  $\rho_{\alpha\beta}$ , défini en (16), est le tenseur des taux de déformations en flexion, et  $E^{\alpha\beta\sigma\tau}$  le tenseur d'élasticité, dont nous définissons la loi pour un matériau isotrope en (17). Les composantes covariantes du déplacement de la coque,  $\vec{u}$ , sont mesurées par rapport à sa configuration de référence  $\Omega = \varphi(\Omega_0), (u_i(\xi_1, \xi_2))_{i=1}^3$  qui sont exprimées dans la base contravariante au point  $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ . Le tenseur de déformation en membrane s'écrit de la manière suivante (on utilise la convention de sommation d'Einstein)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\partial_\beta \vec{u} \cdot \vec{a}_\alpha + \partial_\alpha \vec{u} \cdot \vec{a}_\beta) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3 \end{aligned} \quad (15)$$

et le tenseur des déformations en flexion

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) = (\partial_{\alpha\beta} \vec{u} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \vec{u}) \cdot \vec{a}_3 \quad (16)$$

$$= \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma u_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3 \quad (16a)$$

$$+ b_\alpha^\sigma (\partial_\beta u_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_\tau) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha u_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u_\sigma) \quad (16b)$$

$$+ (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau) u_\tau \quad (16c)$$

$$E^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{2\nu E}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{E}{1+\nu} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \quad (17)$$

On note que la dépendance de cette formulation aux paramètres de forme intervient au travers des tenseurs métriques et des symboles de Christoffel.

## 2.3 Équation dynamique d'une coque mince

On cherche le déplacement de la coque  $\vec{\mathbf{U}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  exprimé dans le repère global :  $\vec{\mathbf{U}} = \vec{u} + \xi_3(u_{3|\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \vec{a}^\alpha$ , on rappelle que  $\vec{u} = u_i \vec{a}^i$  et  $u_{3|\alpha} = u_{3,\alpha}$ , solution de du problème (18) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) + a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, t), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{array} \right. \quad (18)$$

avec :

$$\begin{aligned} b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) &= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{U}}}{\partial t^2} \cdot \vec{\mathbf{V}} d\Omega, \\ d\Omega &= (1 - b_\alpha^\alpha \xi_3 + (\xi_3)^2) d\xi_3 dS \\ dS &= \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (19)$$

Grâce aux expressions de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , on peut expliciter  $b(\vec{u}, \vec{v})$  sous la forme suivante :

$$b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) = \int_{\Omega} \rho \left[ \ddot{u}_i a^i + \xi_3 (\ddot{u}_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda}) \vec{a}^{\alpha} \right] \left[ v_i a^i + \xi_3 (v_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda}) \vec{a}^{\alpha} \right] d\Omega \quad (20)$$

On développe et on intègre dans l'épaisseur suivant  $\xi_3$ , en prenant  $o(\varepsilon^3)$  on obtient alors une écriture approchée de  $b$  sous la forme :

$$b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) \simeq \int_{\Omega} \rho \varepsilon \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{3} (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) \right) (a^{\alpha\beta} \ddot{u}_{\alpha} v_{\beta} + \ddot{u}_3 v_3) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{3} a^{\alpha\beta} ((\ddot{u}_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda}) + (\ddot{u}_{\alpha} v_{3|\beta} + \ddot{u}_{3|\alpha} v_{\beta} + 2b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda} v_{\beta}) b_{\beta}^{\eta}) \right] \sqrt{ad} \xi_1 d\xi_2 \quad (21)$$

On peut alors envisager le calcul des gradients de forme pour différents critères mécaniques.

### 3 Calcul de la dérivée par rapport à $\varphi$

On définit le problème ( $\mathcal{P}$ ) d'optimisation de forme (22) comme un ensemble formé d'une équation d'état (souvent représenté par sa formulation faible), une fonction de coût  $J_{\varphi}$  dépendant de la forme  $\varphi$ .

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} a_{\varphi}(\vec{u}, \vec{v}) = f_{\varphi}(\vec{v}) \\ \arg \min_{\varphi \in \mathcal{G}_{ad}} J_{\varphi}(\vec{u}) \end{cases} \quad (22)$$

On écrit le lagrangien conformément à [4] sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = J_{\varphi}(\vec{u}) - \partial_{\vec{u}} P_{\varphi}(\vec{u}) \vec{v} \quad (23)$$

où la fonctionnelle  $P_{\varphi}$  est l'énergie potentielle de la coque, dans le cas linéaire, elle s'écrit sous la forme :

$$P_{\varphi}(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v}) \quad (24)$$

#### 3.1 Problème direct :

L'équation d'état s'écrit donc : Pour  $\varphi \in \mathcal{G}_{ad}$  et  $\vec{v} \in \vec{V}$  donnés, on considère le problème :

$$\text{Trouver } \vec{u}_{\varphi} \in \vec{V} \text{ tel que } \partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}) \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \quad (25)$$

soit encore :

$$\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}) \vec{w} = -\partial_{\vec{u}} P_{\varphi}(\vec{u}_{\varphi}) \vec{w} \quad (26)$$

#### 3.2 Problème adjoint :

L'équation d'état adjoint s'écrit : Pour  $\varphi \in \mathcal{G}_{ad}$  donnée et pour  $\vec{u}_{\varphi} \in \vec{V}$  solution de l'équation d'état (25), on considère le nouveau problème :

$$\text{Trouver } \vec{v}_{\varphi} \in \vec{V} \text{ tel que } \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}_{\varphi}) \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \quad (27)$$

On en déduit donc :

$$\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}_{\varphi}) \vec{w} = \partial_{\vec{u}} J_{\varphi}(\vec{u}_{\varphi}) \vec{w} - \partial_{\vec{u}, \vec{u}}^2 P_{\varphi}(\vec{u}_{\varphi}) (\vec{v}_{\varphi}, \vec{w}) \quad (28)$$

### 3.3 Dérivée de forme de l'objectif :

On cherche à exprimer la dérivée de  $J_\varphi$  par rapport à la forme :  $DJ_\varphi\Psi$ , pour cela, on remarque que  $J_\varphi = \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)$ , avec  $\vec{u}_\varphi$  et  $\vec{v}_\varphi$  les solutions du problème direct et du problème adjoint respectivement. On écrit alors la dérivée au sens dérivée de Fréchet :

$$\begin{aligned} DJ_\varphi\Psi &= D_\varphi\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)\Psi \\ &= \partial_\varphi\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)\Psi + \partial_{\vec{u}}\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)(D\vec{u}(\varphi)\Psi) + \partial_{\vec{v}}\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)(D\vec{v}(\varphi)\Psi) \\ &= \partial_\varphi\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)\Psi \end{aligned} \quad (29)$$

Avec (25) et (27) on en déduit que  $DJ_\varphi\Psi = \partial_\varphi\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)\Psi$ , soit encore :

$$DJ_\varphi\Psi = \partial_\varphi J_\varphi(\vec{u}_\varphi)\Psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_\varphi(\vec{u}_\varphi)(\vec{v}_\varphi, \Psi) \quad (30)$$

### 3.4 Énergie de déformation

On cherche à minimiser l'énergie de déformation, le problème d'optimisation est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = f(\varphi, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \\ \text{Arg min}_{\varphi \in \mathcal{G}_{ad}} J_\varphi(\vec{u}), \quad \text{avec : } J_\varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}a(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) \end{cases} \quad (31)$$

On reprend les expressions (23) du lagrangien et (24) de l'énergie potentielle. Le problème direct est alors donné par :

$$\partial_{\vec{v}}\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \vec{v})\vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \Leftrightarrow f(\varphi, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

et admet une solution unique  $\vec{u}_0$ . Le problème adjoint s'écrit grâce à l'expression  $\partial_{\vec{u}}\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_0, \vec{v})\vec{w} = 0$  soit encore :

$$a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

Or  $a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{w}) = f(\varphi, \vec{w})$ , on obtient alors :

$$f(\varphi, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

Le problème adjoint admet donc lui aussi une solution unique, qui est identique à celle du problème direct, on dit que le problème est auto-adjoint. On peut alors calculer la dérivée du critère par rapport à la forme :

$$\begin{aligned} DJ_\varphi\Psi &= \partial_\varphi J_\varphi(\vec{u}_\varphi)\Psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_\varphi(\vec{u}_\varphi)(\vec{v}_\varphi, \Psi) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0)\Psi - \partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0)\Psi + \partial_\varphi f(\varphi, \vec{u}_0)\Psi \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0)\Psi + \partial_\varphi f(\varphi, \vec{u}_0)\Psi \end{aligned}$$

### 3.5 Positionnement de la première fréquence de résonance

Un problème classique dans le dimensionnement de pièces automobile consiste à repousser les fréquences propres en dehors de la plage d'excitation du moteur et ainsi s'assurer que la pièce n'entre pas en résonance avec celui-ci. En pré-dimensionnement, ne connaissant pas les fréquences exactes du GMP (qui sont somme toute relativement basses), on cherche à maximiser la première fréquence propre de la pièce étudiée et ainsi la repousser hors du domaine de variation des fréquences moteur. Nous allons donc dans un premier temps étudier les modes de vibrations libres de la coque et maximiser la première valeur propre. Le problème de vibrations libres est obtenu à partir du problème (18) où les efforts extérieurs sont nuls :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver le déplacement } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ b\left(\varphi, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) + a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

On cherche des solutions sous la forme  $\vec{u}(x, t) = \vec{w}(x)e^{i\omega t}$ , où  $\omega$  est la pulsation de la coque, ce qui nous ramène au problème équivalent suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } (\omega, \vec{w}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tels que :} \\ a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) - \omega^2 b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

On pose maintenant  $\lambda = \omega^2$ , le problème devient :

$$\text{Trouver } (\lambda, \vec{w}) \in \mathbb{R}^+ \times \left( (H^1(\Omega_0))^2 \times H^2(\Omega_0) \right) \text{ tels que :} \quad (32)$$

$$a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = \lambda b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad}$$

D'après [5] le problème (32) admet une suite croissante de valeurs propres, de multiplicité finie dont les vecteurs propres associés forment une base hilbertienne de  $((H^1(\Omega_0))^2 \times H^2(\Omega_0))$ . On définit la première valeur propre  $\lambda_0$ , associée au premier vecteur propre  $\vec{\theta}_0$  de la coque en libre-libre comme étant la plus petite des valeurs propres solutions de ce problème. Afin de se ramener à un problème de minimisation, on considère le critère  $J_\varphi = -\lambda_0$ , le calcul de  $\lambda_0$  est obtenu à l'aide du quotient de Rayleigh (33).

$$J_\varphi = -\lambda_0 = -\min_{\vec{u}} \frac{a(\varphi, \vec{u}, \vec{u})}{b(\varphi, \vec{u}, \vec{u})} \quad (33)$$

D'après [6], l'application  $J_\varphi : \varphi \in \mathcal{G}_{ad} \mapsto -\lambda_0(\varphi) \in \mathbb{R}^-$  est dérivable lorsque la première valeur propre est de multiplicité 1, tandis qu'elle est seulement sous-dérivable (c.f. [7] ou [8]) lorsque l'ordre de multiplicité est supérieur à 1, voir [9].

On propose d'utiliser le formalisme décrit précédemment afin de calculer la dérivée de  $J_\varphi$ . On suppose par la suite que la valeur première valeur propre est de multiplicité 1 ou de multiplicité constante. On calcule l'énergie potentielle sous la forme (34) :

$$P_\varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}a(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) - \frac{\lambda}{2}b(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) \quad (34)$$

On définit le lagrangien sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) = J_\varphi(\vec{u}, \lambda) - \partial_{\vec{u}} P_\varphi(\vec{u}) \vec{v} \quad (35)$$

On obtient le problème direct à partir du calcul de  $\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w}$ , on cherche donc la solution du problème :

$$\text{Trouver } (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tels que : } \partial_{\vec{u}} P_\varphi(\vec{u}) \vec{v} = a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) - \lambda b(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad}$$

La solution de ce problème est donc le couple  $(\lambda_0, \eta_i \vec{\theta}_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , où  $(\vec{\theta}_i)_{i=1}^n$  sont  $n$  les vecteurs propres de (32) associés à la valeur propre  $\lambda_0$ . Il s'agit maintenant de calculer  $\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w}$  Le problème adjoint est obtenu à partir de  $\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w}$  :

$$\begin{aligned} \forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w} &= \partial_{\vec{u}} J_\varphi(\vec{u}) \vec{w} - \partial_{\vec{u}, \vec{u}}^2 P_\varphi(\vec{u})(\vec{v}, \vec{w}) \\ &= - \frac{2a(\varphi, \vec{w}, \vec{u})b(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) - 2b(\varphi, \vec{w}, \vec{u})a(\varphi, \vec{u}, \vec{u})}{b(\varphi, \vec{u}, \vec{u})^2} \\ &\quad - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

On calcule maintenant cette dérivée au point solution  $(\lambda_0, \eta_i \vec{\theta}_i)$  du problème direct, on norme ce vecteur, que l'on nomme dorénavant  $\vec{\theta}_0$ , par  $b(\vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) = 1$ . On rappelle que  $a(\vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) = \lambda_0$ , dans ce cas,  $\forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad}$  on a :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{\theta}_0, \lambda_0, \vec{v}) \vec{w} &= - \frac{2a(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0)b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) - 2b(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0)a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0)}{b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0)^2} \\ &\quad - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= - 2a(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0) + 2\lambda_0 b(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Le problème adjoint est donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{\theta}_0, \lambda_0, \vec{v}) \vec{w} = a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) - \lambda_0 b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

La solution du problème adjoint s'écrit donc, elle aussi, sous la forme  $\zeta_i \vec{\theta}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note par la suite cette solution  $\vec{\theta}_1$ . On peut alors calculer la dérivée de forme de  $J_\varphi$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{G}_{ad}$  on a :

$$\begin{aligned} DJ_\varphi \psi &= \partial_\varphi J_\varphi(\vec{\theta}_0) \psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_\varphi(\vec{\theta}_0)(\vec{\theta}_1, \psi) \\ &= -\partial_\varphi a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi + \lambda_0 \partial_\varphi b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi - \partial_\varphi a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_1) \psi + \lambda_0 \partial_\varphi b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_1) \psi \\ &= -\partial_\varphi a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0 + \vec{\theta}_1) \psi + \lambda_0 \partial_\varphi b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0 + \vec{\theta}_1) \psi \end{aligned} \quad (36)$$

À l'instar du problème de minimisation de l'énergie de déformation, on remarque que ce problème est lui aussi auto-adjoint, on peut alors choisir  $\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0$  et on obtient :

$$DJ_\varphi \psi = -2\partial_\varphi a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi + 2\lambda_0 \partial_\varphi b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi \quad (37)$$

## 4 Applications et résultats numériques

### 4.1 Cylindre

On cherche à décrire un cylindre à l'aide de la fonction de forme (38). Le changement de variable entre le domaine de référence et le cylindre est représenté figure 2. Cet exemple simple nous permet déjà de faire une remarque importante concernant le domaine de référence : *il faut qu'il soit indépendant de la fonction de forme  $\varphi$ , en effet lorsque l'on dérive par rapport à la forme, il faut s'assurer que le domaine reste fixe.*

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \left[ R \cos\left(\frac{\xi_1}{R}\right), R \sin\left(\frac{\xi_1}{R}\right), H \cdot \xi_2 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

On propose de maximiser la première fréquence propre du cylindre avec pour paramètres d'optimisation  $R$  et  $H$ . On reprend l'expression (37) afin de calculer le gradient. Afin de résoudre le problème d'optimi-

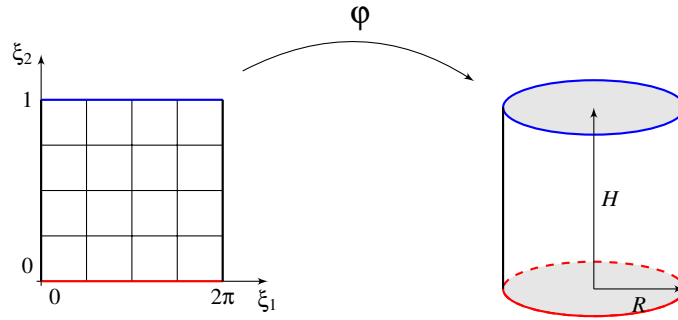


Fig. 2 – Description d'une fonction de formes entre un domaine de référence et un cylindre

sation, on impose de rester à surface constante ; on rappelle que le calcul de la surface peut s'effectuer grâce à l'expression suivante :

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \quad (39)$$

On propose d'utiliser deux types de contraintes, la première, on souhaite que la surface soit constante, il s'agit donc d'une contrainte égalité. Pour le second type, on autorise une augmentation de la surface jusqu'à 10%, la contrainte s'écrit donc sous la forme d'une inégalité. Les résultats d'optimisation sont donnés dans le tableau 1, pour  $(R, H) \in [.45 m, .55 m] \times [.05 m, .15 m]$ .

Les contraintes sont respectées dans les deux cas, cependant, le gain sur la fréquence propre n'est pas aussi important que l'augmentation de surface, ce qui réduit l'intérêt de cette solution.



	Initiale	Contrainte égalité	Contrainte inégalité
$R(m)$	0,5	0,45	0,45
$H(m)$	0,1	0,111111	0,122222
$f_0(Hz)$	1,915678	2,370338	2,373657
$S(m^2)$	0,314159265	0,314159234	0,345574564
$\%S$	-	0,00%	10,00%

Tableau 1 – Optimisation de la première fréquence propre d'un cylindre à surface constante

## 4.2 Patches splines

Nous avons choisi d'utiliser les patches de Bézier comme fonctions de formes pour l'industrialisation de la méthode, en effet ils sont la base de la modélisation CAO, ce qui permet d'assurer une cohérence avec les outils utilisés par les concepteurs. De plus, pour des patches de classe 4, classiquement utilisés par les modeleurs géométriques, il est possible d'interpoler un grand nombre de formes. Ce qui nous assure une exploration importante de l'espace de conception. On remarque qu'ils font couramment l'objet de paramétrage pour l'optimisation de forme, voir par exemple [10, 11, 12].

### Définition de la fonction de forme

Nous définissons un patch spline de classe 4 comme étant la projection d'un carré de côté 1 par la fonction suivante (40) qui est l'écriture matricielle d'un patch spline tel que l'on peut le trouver dans [13, 14]. Le patch décrit est défini à partir de 16 points de contrôles qui seront les variables d'optimisation.

$$\left\| \begin{array}{l} T_i = [t^3, t^2, t, 1], \\ B \text{ matrice spline,} \\ P_X, P_Y, P_Z : \text{coordonnées des points de contrôles} \\ \varphi : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi_1, \xi_2 \longmapsto \begin{cases} T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_X \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \\ T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_Y \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \\ T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_Z \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \end{cases} \end{array} \right. \quad (40)$$

### Fonction de Bézier

La fonction de Bézier a été pensée par l'ingénieur Renault Pierre Bézier en 1962 pour concevoir par ordinateur les pièces automobiles. C'est donc naturellement que nous décrivons cette fonction. Elle est définie à l'aide de la matrice  $B$  (41) et de ses points de contrôles. Ses principales propriétés sont :

- la courbe ne passe pas, en général, par les points de contrôle à l'exception du premier et du dernier,
- la courbe est toujours contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle,
- une courbe fermée peut-être générée en prenant le même point comme premier et dernier point de contrôle.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Nous proposons de maximiser la première fréquence propre de ce patch de Bézier en libre-libre. Nous utilisons les 16 points de contrôle du patch dans les 3 directions comme paramètres d'optimisation, nous partons d'une plaque carrée de côté 1m, dont les caractéristiques mécaniques sont :

- $\varepsilon = .35e^{-3} m$  : la demie-épaisseur de la pièce,
- $E = 210 \times 1e9 GPa$  : le module d'Young,
- $\nu = 0.3$  : le coefficient de Poisson,
- $\rho = 7300 Kg/m^3$  : la masse volumique.

Dans un premier temps, nous calculons la première fréquence de flexion de plaque à l'aide de la formule théorique [15] :

$$f_0 = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{E(2\varepsilon)^2}{\rho a^4(1-\nu^2)}} \quad (42)$$

où  $\alpha = 4.07$  est un coefficient empirique, et  $a$  le côté de la plaque, on obtient  $f_0 = 2.549412 Hz$ , le calcul élément finis, pour un maillage  $10 \times 10$  donne  $f_0^h = 2.536843 Hz$ , soit une erreur de 0.4%.

L'optimisation a convergé en cinq itérations, les résultats sont résumés dans le tableau 2, on constate que la solution optimale, représentée figure 3, permet d'augmenter la fréquence propre de 36,45%.

Iter	$f_0$ (Hz)	$\Delta f_0$ (%)
0	2,442508	–
1	2,655227	8,71
2	2,809681	15,03
3	2,952545	20,88
4	3,332729	36,45
5	3,332729	36,45

Tableau 2 – Optimisation de la première fréquence propre d'un patch spline

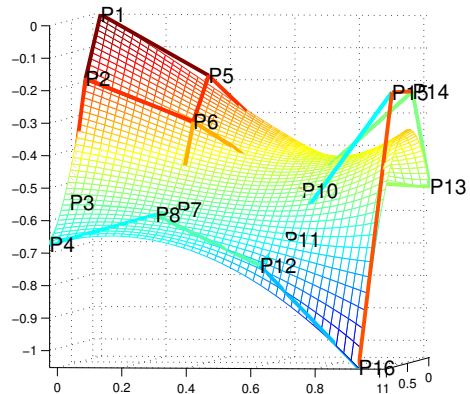


Fig. 3 – Configuration optimale d'un patch de Bézier sous critère de fréquence propre

On peut remarquer que, pour augmenter la fréquence propre, l'optimiseur fait intervenir un maximum de courbures possibles. L'optimisation converge rapidement vers l'optimum (en cinq itérations) et permet d'atteindre des formes complexes. En effet, cet exemple permet de souligner la capacité de la méthode à explorer un espace de conception important, en partant d'une plaque on est capable d'obtenir des formes faisant intervenir beaucoup de courbures.

## 5 Conclusion

Nous avons montré l'efficacité de la formulation de coques minces de Koiter à être utilisée comme paramétrage pour l'optimisation de forme d'éléments surfaciques. Nous avons proposé l'utilisation de carreaux de Bézier comme fonction élémentaire, ce qui permet d'envisager des modifications de forme importantes. La méthode proposée permet le calcul de gradients, ce qui permet de mettre en place un processus d'optimisation efficace, nous avons détaillé ici ce calcul pour deux critères de dimensionnement.

De plus, l'un des points forts de la méthode est de ramener le problème mécanique sur un domaine de référence, ceci nous permet d'effectuer les calculs sur un maillage fixe, et ainsi de s'affranchir d'étapes de remaillage au cours de l'optimisation.

Enfin, on peut envisager d'utiliser un carreau de Bézier comme super-élément pour modéliser des formes complexes tout en maîtrisant le nombre de variables d'optimisation. Il sera donc possible d'optimiser des géométries directement issues d'un modèleur CAO, la solution obtenue pouvant elle-même être relue directement par le modèleur.

## Références

- [1] W. T. Koiter. Foundations and basic equations of shell theory : a survey of recent progress. *Afdeling der Werktuigbouwkunde, Technische Hogeschool*, 5 :93–105, 1968.
- [2] M. Bernadou. *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1994.
- [3] P.G. Ciarlet. *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*. Number vol. 66 ;vol. 99 in *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*. Springer, 2005.
- [4] J. Céa. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 20(3) :371–402, 1986.
- [5] F. Riesz, B. Szokefalvi-Nagy, and Magyar Tudományos Akadémia (Budapest). *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Akadémiai Kiadó, 1952.

- [6] B. Rousselet and D. Chenais. Continuité et différentiabilité d'éléments propres : Application à l'optimisation de structures. *Applied Mathematics and Optimization*, 22 :27–59, 1990.
- [7] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [8] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Études Mathématiques. Dunod, 1974.
- [9] G. Allaire, S. Aubry, and F. Jouve. Eigenfrequency optimization in optimal design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(28) :3565 – 3579, 2001.
- [10] S. Hyun, C. Kim, J.H. Son, S.H. Shin, and Y.S. Kim. An efficient shape optimization method based on fem and b-spline curves and shaping a torque converter clutch disk. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(13-14) :1803 – 1815, 2004.
- [11] M. Andreoli, A. Janka, and J.A. Désidéri. Free-form-deformation parameterization for multilevel 3d shape optimization in aerodynamics. Technical Report 5019, INRIA, 2003.
- [12] Jamshid A. Samareh, Jamshid A. Samareh, and B Bernstein Polynomial. A survey of shape parameterization techniques. 1999.
- [13] Edmond Boyer. *Représentation des courbes et des surfaces*. UFRIMA, 2009.
- [14] L. Liu and G. Wang. Explicit matrix representation for nurbs curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6) :409 – 419, 2002.
- [15] R.J. Gibert. *Vibrations des structures : interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*. Collection de la Direction des études et recherches d'Électricité de France. Eyrolles, 1988.