

Enrichissement modal du Selective Mass Scaling

Sylvain GAVOILLE¹ *

¹ ESI, sylvain.gavoille@esi-group.com

* Auteur correspondant

Résumé — En raison de problèmes de convergence et des temps de calcul prohibitifs, les méthodes de résolution explicite sont souvent préférées pour la résolution de problèmes non linéaires. Par ailleurs, on observe que, pour la plupart des problèmes quasi-statiques, l'énergie est essentiellement associée aux basses fréquences, et que la stabilité du schéma temporel est associée aux hautes fréquences. L'idée du Selective Mass Scaling est d'ajouter seulement de la masse artificielle sur les modes associés aux hautes fréquences. De cette façon, le pas de temps critique augmente sans affecter de façon significative la réponse de la structure en basses fréquences. Cela permet de réduire considérablement les temps de calcul.

Mots clés — mass scaling, résolution explicite.

1. Introduction

Au sein d'ESI, nous nous intéressons particulièrement à la simulation de crash et des problèmes d'emboutissage. Pour ce genre d'applications, la stratégie retenue est l'utilisation d'un schéma de résolution explicite. Cette approche permet de s'affranchir des problèmes de convergence généralement rencontrés avec une approche implicite.

L'utilisation du mass scaling standard est une stratégie bien connue pour accélérer les calculs réalisés dans un cadre explicite. Le mass scaling augmente la masse des éléments ayant le plus petit pas de temps critique [1] afin de pouvoir choisir un pas de temps de calcul plus grand. Cela a pour effet de réduire le temps de calcul en diminuant le nombre d'itérations à faire pour un temps d'étude donné.

Malheureusement, cet ajout de masse non physique dégrade considérablement la solution. Pour améliorer la qualité des résultats, Olovsson [2] propose une nouvelle méthode de mass scaling : le Selective Mass Scaling (SMS). Cette méthode permet d'obtenir une solution cohérente pour les mouvements de corps rigides au niveau élémentaire. Cela a pour effet d'améliorer la précision vis-à-vis de la méthode standard de scaling tout en ayant un gain de temps de calcul. Cette approche a motivé de nombreux travaux tels que ceux réalisés par Cocchetti et al. [3] sur les éléments coque-solide, mais encore Askes et al. [4] pour unifier cette approche SMS avec la méthode de micro-inertie ou de pénalité sur l'inertie.

Bien que cette méthode ait largement prouvé son efficacité sur des problèmes de quasi-statique, cette approche reste encore difficilement applicable à des problèmes de dynamique rapide comme le crash d'une voiture. L'approche que nous proposons dans ces travaux permet de prendre en compte plus de modes au niveau élémentaire. Cela a pour effet de pouvoir obtenir des résultats plus précis et par conséquent de s'intéresser à une gamme de problèmes plus large.

2. Stabilité du schéma explicite

Les travaux qui suivent se concentrent sur des approches utilisant le schéma aux différences centrées, lequel est conditionnellement stable. Cela signifie que le pas de temps choisi pour l'étude doit vérifier la condition suivante :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (1)$$

où ω_{\max} est la pulsation maximale associée à la structure étudiée. On peut aussi vérifier que :

$$\omega_{\max} \leq \omega_{\max}^e \quad (2)$$

où ω_{\max}^e est la pulsation maximale parmi l'ensemble des éléments du maillage.

Cette dernière condition nous permettra par la suite de raisonner pour l'enrichissement directement au niveau élémentaire. La pulsation maximale ω_{\max}^e peut être obtenue en résolvant le problème suivant pour chaque élément et en prenant la valeur maximale de ω^e :

$$\omega^e = \underset{\omega}{\text{Argmax}}(\det[\mathbf{k}^e - \omega^2 \mathbf{m}^e] = 0) \quad (3)$$

où \mathbf{k}^e et \mathbf{m}^e sont respectivement les matrices de rigidité et de masse au niveau élémentaire.

3. Selective Mass Scaling

3.1. Principe

L'idée de base de cette approche est d'ajouter de la masse artificielle afin de réduire les hautes fréquences du système, tout en affectant le moins possible les basses fréquences. On peut définir la matrice de masse élémentaire modifiée $\bar{\mathbf{m}}$ de cette façon :

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + \lambda \quad (4)$$

où m est la matrice de masse diagonale et λ contient les termes de masses artificielles ajoutés.

Le principe de base de l'approche consiste à définir la matrice de masse ajoutée λ d'une telle façon qu'elle n'affecte pas le comportement pour une famille de modes $\{\underline{\phi}_i\}$:

$$\forall \underline{\phi}_i \quad \bar{\mathbf{m}} \underline{\phi}_i = \mathbf{m} \underline{\phi}_i \Rightarrow \lambda \underline{\phi}_i = 0 \quad (5)$$

Olovsson [2] propose plusieurs méthodes pour définir λ :

- Méthode I :

La première approche consiste à utiliser la matrice de raideur élémentaire \mathbf{k} . Cela nous amène à la forme suivante de masse modifiée :

$$\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + \alpha \mathbf{k} \quad (6)$$

On vérifie aisément que la matrice $\lambda = \alpha \mathbf{k}$ permet de vérifier la propriété (3). Définir $\lambda = \alpha \mathbf{k}$ n'est pas pratique étant donné que \mathbf{k} change tout au long d'une simulation en raison de la déformation de l'élément ou encore l'apparition de phénomènes non linéaires. Par ailleurs, dans un cadre de résolution explicite, la construction de la matrice de raideur élémentaire est rarement réalisée. On s'intéresse plutôt directement au calcul des efforts internes.

- Méthode II :

Pour la seconde approche, on construit λ en utilisant une famille de vecteurs orthogonaux correspondant aux modes de corps rigides en translation $\{\underline{\phi}_{RT}\}$:

$$\lambda = \frac{\beta^e m^e}{n} \prod_R (\mathbf{I}_d - \underline{\phi}_{RT} \underline{\phi}_{RT}^T) \quad (7)$$

où m^e , β^e et n sont respectivement la masse élémentaire, le paramètre contrôlant la masse ajoutée sur l'élément et le nombre de nœuds sur l'élément.

Cette approche est intéressante vis-à-vis de l'approche précédente parce qu'elle permet de s'affranchir d'une reconstruction de la matrice de masse tout au long du calcul puisqu'elle ne dépend pas du comportement local.

La matrice de masse virtuelle λ comprend deux valeurs propres : 0 et $\frac{\beta^e m^e}{n}$. Cela permet de choisir facilement le pas de temps que l'on désire pour la simulation puisqu'il existe une relation simple entre le pas de temps obtenu avec cette approche $\overline{\Delta t}_{crit}^e$ et le pas de temps critique obtenu sans scaling $\Delta t_{crit}^e = \frac{2}{\omega^e}$. En effet, en utilisant les équations (1) et (3) pour les approches avec et sans SMS, nous obtenons la relation suivante :

$$\overline{\Delta t}_{crit}^e = \Delta t_{crit}^e \sqrt{1 + \beta^e} \quad (8)$$

En fixant un pas de temps objectif pour la simulation $\Delta t_{obj} = r \overline{\Delta t}_{crit}^e$, on en déduit que l'on peut choisir β^e avec l'expression suivante :

$$\beta^e = \left(\frac{\Delta t_{obj} \omega^e}{2r} \right)^2 - 1 \quad (9)$$

où r est un facteur de sécurité compris entre 0 et 1, généralement choisi à 0,9.

3.2. Discussion

L'application de cette approche avec la méthode II à un cas test de poutre en flexion comme illustré à la figure 1, montre l'apport de cette approche en termes de précision vis-à-vis de l'approche standard de mass scaling. Dans ce cas précis, nous obtenons une accélération de 4 sur le temps de calcul pour le calcul avec SMS en comparaison avec le calcul sans mass scaling.

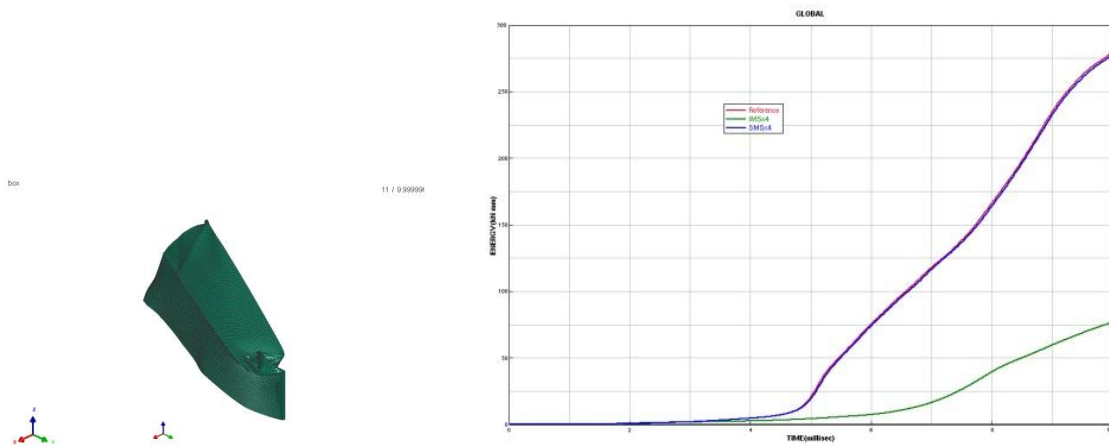


Fig. 1. Cas test de flexion d'une poutre modélisée avec des éléments coques et un comportement élastoplastique

L'utilisation du Selective Mass Scaling permet, dans un cadre de résolution explicite, d'obtenir des résultats précis pour un coût de calcul réduit.

4. Enrichissement modal du Selective Mass Scaling

Dans les approches introduites par Olovsson [2], la méthode I est plus précise que la méthode II puisque la condition (5) est vérifiée aussi pour les modes de corps rigides en rotation, en plus des modes de corps rigides en translation. Toutefois, la méthode I est peu intéressante en termes de temps de calcul puisqu'elle nécessite une réactualisation à chaque incrément de la masse. Par ailleurs, la matrice de raideur élémentaire n'est généralement pas disponible dans un code de calcul explicite puisque l'on a seulement besoin de calculer les efforts internes.

Pour définir une nouvelle approche de construction de λ , il faut définir les propriétés que cette matrice doit vérifier :

1. Elle doit être positive afin de s'assurer que l'on rajoute bien de la masse.
2. Le noyau ne doit être constitué que des modes de corps rigides. Si des modes de déformation se situent dans le noyau, la condition de stabilité sur l'élément reviendrait à celle obtenue sans scaling. Pour s'en assurer, on peut écrire l'équation (3) dans la base des modes de corps rigide de \mathbf{k}^e .

3. Il faut définir une condition simple pour contrôler l'ajout de masse en fonction du pas de temps objectif Δt_{obj} désiré.

En d'autres termes, on cherche λ tel que :

$$\begin{cases} \nabla \underline{\phi}_R & \lambda \underline{\phi}_R = 0 \\ \nabla \underline{\phi}_D & \lambda \underline{\phi}_D = \beta^e m^e \underline{\phi}_D \end{cases} \quad (10)$$

où $\{\underline{\phi}_R\}$ est l'ensemble des modes de corps rigides en translation et en rotation, et $\{\underline{\phi}_D\}$ l'ensemble des modes de déformation de la matrice \mathbf{k}^e .

Cela nous amène à définir la matrice de masse ajoutée λ de cette façon :

$$\lambda = \beta^e m^e \frac{\int_{\Omega^e} \nabla^s \underline{N}_i : \nabla^s \underline{N}_j d\Omega}{\text{Tr} \left[\int_{\Omega^e} \nabla^s \underline{N}_i : \nabla^s \underline{N}_j d\Omega \right]} \quad (11)$$

où $\nabla^s \underline{N}_i$ est la partie symétrique du gradient de la fonction de forme \underline{N}_i au nœud i de l'élément et Ω^e est le support de l'élément.

En choisissant cette forme pour la matrice de masse ajoutée λ , nous nous assurons de ne pas reconstruire tout au long du calcul la matrice de masse. Par ailleurs, nous pouvons choisir le paramètre contrôlant la masse ajoutée β^e en utilisant l'équation (9).

5. Résultats numériques

On se propose d'éprouver l'approche mise en place précédemment sur un cas test de flexion 3 points d'une poutre en acier. Dans le cas test présenté à la figure 2, la poutre en acier a les dimensions 5mm x 5mm x 160 mm. La poutre est discrétisée avec des éléments hexaédriques de 1,25 mm de côté. Quant au comportement matériau, une loi de comportement élastoplastique est utilisée. Les caractéristiques matériaux sont une densité massique de 7,8kg/dm³, un module de compressibilité de 172,5 GPa, un module de cisaillement de 79,61 GPa, une limite d'élasticité de 100 MPa et un module tangent pour la loi élastoplastique bilinéaire de 207 GPa.

La poutre est en appui simple à chacune de ses extrémités. Un déplacement de 10 mm est appliqué à la poutre via un corps rigide en contact avec la poutre. Le pas de temps critique pour ce calcul dans une configuration sans mass scaling est de 132 μ s.

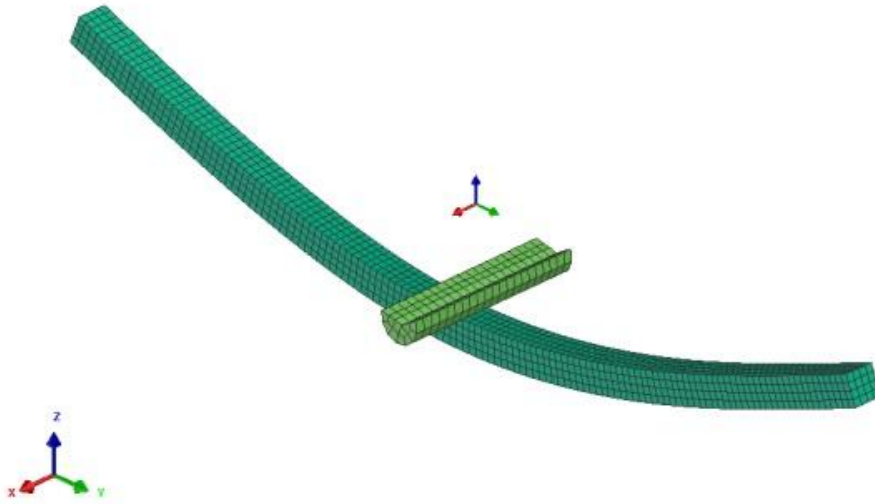


Fig. 2. Illustration en fin de simulation de l'essai de flexion 3 points d'une poutre en acier.

Par la suite, nous allons effectuer une étude comparative de la méthode II introduite par Olovsson [2] (noté « SMS ») avec la méthode présentée ci-dessus à la section 4 (noté « SMS enrichi »). Nous comparons ces deux approches en terme de précision avec le calcul réalisé sans scaling (noté « reference » ou courbe rouge). Pour ce faire, nous effectuons une étude paramétrique en fonction du pas de temps objectif Δt_{obj} . Les valeurs de pas de temps objectifs Δt_{obj} choisies sont respectivement pour les courbes vertes, bleues et jaunes : 0,8ms, 1,6ms et 3,2ms.

A la figure 3, nous avons tracé le pas de temps utilisé au cours du calcul. Nous remarquons que, quel que soit le pas de temps objectif Δt_{obj} choisi, l'approche « SMS enrichi » est plus stable et permet de conserver le pas de temps fixé pour la simulation. Par ailleurs, il est plus difficile pour la méthode « SMS » de respecter le pas objectif quand sa valeur devient nettement plus importante que celle du pas de temps critique. En d'autres termes, l'approche « SMS enrichi » permet de conserver une valeur stable du pas de temps tout au long du calcul quelle que soit la valeur de pas temps objectif choisie Δt_{obj} .

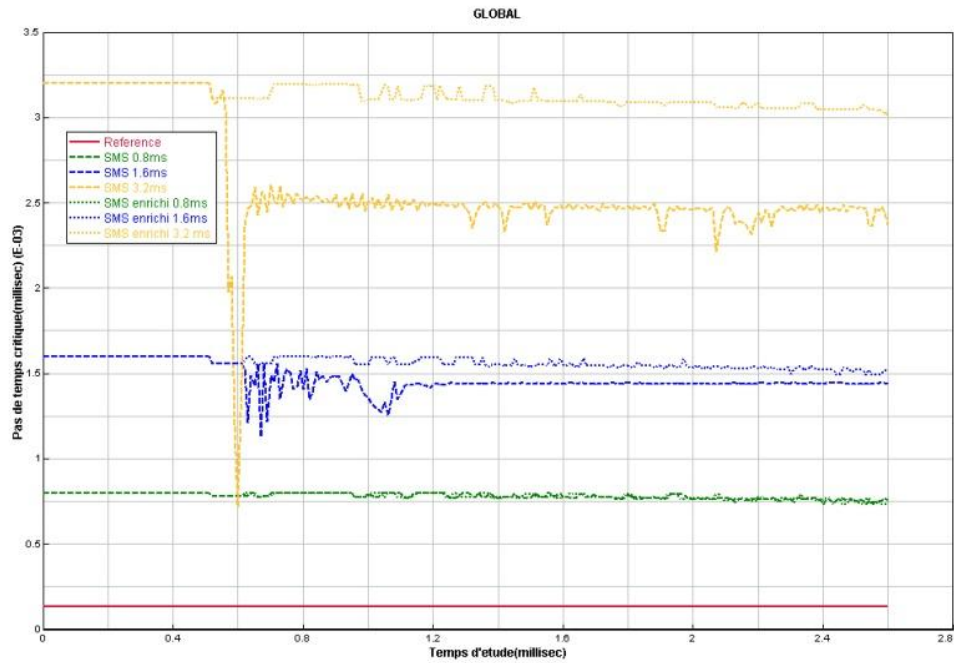


Fig. 3. Pas de temps utilisé au cours du calcul

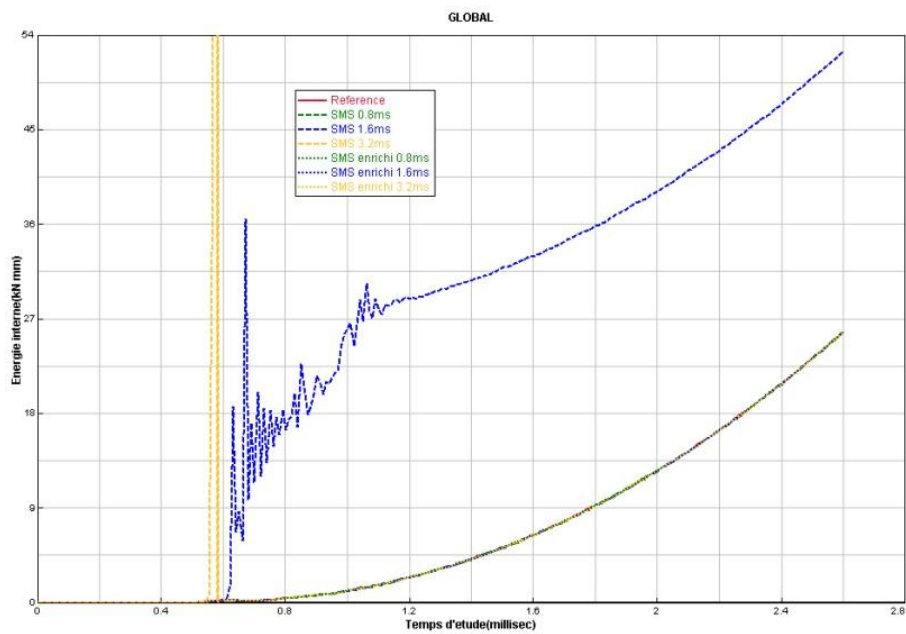


Fig. 4. Energie interne

Quant à la figure 4, elle représente l'énergie interne au cours du calcul pour chacune des configurations étudiées. Cette étude permet d'estimer la précision des différentes approches en fonction des différents pas de temps objectifs Δt_{obj} fixés. Comme nous

pouvons l'observer, l'approche « SMS enrichi » permet de restituer la solution de référence quel que soit le pas de temps objectif Δt_{obj} . Quant à l'approche « SMS », elle perd rapidement en précision. Les résultats sont très imprécis pour des valeurs de Δt_{obj} égales à 1,6ms et 3,2ms.

6. Conclusion

Dans cette étude, une nouvelle méthode pour le Selective Mass Scaling a été introduite. L'objectif de cette approche est de permettre d'augmenter le pas de temps de calcul, dans le cadre d'une résolution à l'aide d'un schéma explicite, sans altérer significativement la réponse de la structure. L'approche proposée est simple, dans le sens où elle peut être facilement mise en place dans un code explicite existant.

Pour l'instant, cette approche est appliquée par intuition sur différents types de problèmes. Il reste à définir un critère pertinent permettant de savoir si cette approche peut être appliquée sur un cas ou non, sachant qu'une analyse modale sur l'ensemble de la structure aurait un coût de calcul prohibitif. Par ailleurs, il serait intéressant de construire un estimateur d'erreur entre la solution obtenue avec le SMS et la solution sans scaling.

A travers le cas test présenté dans ce papier, nous avons pu observer que l'approche mise en place est plus robuste que l'approche initiale proposée pour le Selective Mass Scaling. Cependant, il reste à éprouver cette approche sur d'autres cas afin de s'en assurer.

Références

- [1] T.J.R. Hughes. The Finite Element Method : Linear and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publication, 2000.
- [2] L. Olovsson, K. Simonsson, M. Unosson. Selective Mass Scaling for explicit finite element analyses. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 63, page1436-page1445, 2005.
- [3] G. Cocchetti, M. Pagani, U. Perego. Selective mass scaling and critical time-step estimate for explicit dynamics analyses with solid-shell elements. Computers and Structures (accepté pour publication), 2012.
- [4] H. Askes, D.C.D. Nguyen, A. Tyas. Increasing the critical time step: micro-inertia, inertia penalties and mass scaling, Comput Mech, volume 47, pages 657-page667, 2011.