



HAL
open science

OBTENCIÓN DE LOS ESFUERZOS A PARTIR DEL ENSAYO DE CORTE APLICANDO EL MÉTODO DE ROTACIÓN DE EJES

Norly Belandria, Ucar Roberto, Bongiorno Francisco, Esmeralda de Barcia

► **To cite this version:**

Norly Belandria, Ucar Roberto, Bongiorno Francisco, Esmeralda de Barcia. OBTENCIÓN DE LOS ESFUERZOS A PARTIR DEL ENSAYO DE CORTE APLICANDO EL MÉTODO DE ROTACIÓN DE EJES. Modelos Computacionales en Ingeniería. Desarrollos Novedosos y Aplicaciones, 2010, Merida, Venezuela. hal-01716863

HAL Id: hal-01716863

<https://hal.science/hal-01716863v1>

Submitted on 24 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBTENCIÓN DE LOS ESFUERZOS A PARTIR DEL ENSAYO DE CORTE APLICANDO EL MÉTODO DE ROTACIÓN DE EJES.

Norly Belandría.

Roberto Ucar Navarro.

Francisco Bongiorno Ponzó.

nbelandria@ula.ve

robertoucar@cantv.net.

frabon@ula.ve.

Grupo de Investigaciones en Geología Aplicada. Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Departamento Geomecánica, Mérida. 5101, Venezuela.

Esmeralda De Barcia.

dbarcia@ula.ve.

Laboratorio de Mecánica de Suelos y Pavimentos, Facultad de Ingeniería, Departamento de Vías, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela.

Resumen. *El ensayo de corte permite determinar la resistencia al esfuerzo cortante de un suelo, mediante los parámetros de cohesión (C) y ángulo de fricción interna (ϕ) del material. En este trabajo a partir de los resultados de dicho ensayo en un suelo, se obtuvo la magnitud y dirección de los esfuerzos principales, realizando la representación gráfica mediante tres puntos de rotura, cuyas coordenadas se han obtenido utilizando el ensayo de corte directo en la condición “no drenada”. Posteriormente, se representaron dichos puntos, obteniéndose la envolvente de falla, luego se aplicó la rotación de ejes, apoyándose en la bien conocida expresión del ángulo de falla $\alpha_f = (45^\circ + \phi/2)$, que es el ángulo que forma el plano de falla con el esfuerzo principal menor, la cual permitió relacionar los ejes x e y con los ejes x' e y' por medio de los cosenos directores, de esta manera, se halló la matriz de rotación. Este procedimiento se realizó con la finalidad de compararlo con la solución analítica que relaciona los esfuerzos principales al utilizar la ecuación de Mohr – Coulomb, con el método de rotación de ejes, observándose que el error es despreciable al aplicar la metodología propuesta.*

Palabras Claves: Rotación de ejes, Esfuerzos principales, Mohr - Coulomb, Ensayo de corte.

1.- INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como finalidad el estudio de la resistencia cortante de un suelo con la finalidad de obtener sus parámetros de corte, cohesión (C) y ángulo de fricción interna (ϕ) ángulo de rotura (α) y la magnitud de los esfuerzos σ_1 y σ_3 .

El método de rotación de ejes permite determinar la magnitud de los esfuerzos a partir del ensayo de corte cuyos datos se obtienen en el laboratorio y que permiten determinar la ecuación de Mohr - Coulomb. Posteriormente, conociendo el esfuerzo normal, el esfuerzo tangencial, y el ángulo de rotura a partir de la rotación de ejes se pueden determinar la magnitud de los esfuerzos de una forma aproximada y luego comparándolo con el método analítico

2.- MARCO REFERENCIAL:

2.1- Criterio de falla de Mohr- Coulomb: Mohr (1900) presentó una teoría sobre la ruptura de los materiales. Esta teoría afirma que un material falla debido a una combinación crítica de esfuerzo normal y esfuerzo cortante. La envolvente de falla definida por dicha relación, para la mayoría de problemas de mecánica de suelos, es suficiente aproximar el esfuerzo cortante sobre el plano de falla como una función lineal del esfuerzo normal (Coulomb, 1776). Esta relación se escribe como:

$$\tau_f = c + \sigma_{nm} \tan \phi \quad (\text{Criterio de falla Mohr- Coulomb}) \quad (1)$$

Donde:

c = cohesión.

ϕ = ángulo de fricción interna.

$\tan \phi = \mu$ = pendiente de la recta.

2.2- Prueba de corte directo en el laboratorio: El ensayo de corte directo consiste en hacer deslizar una porción de suelo, respecto a otra a lo largo de un plano de falla predeterminado mediante la acción de una fuerza de corte horizontal incrementada, mientras se aplica una carga normal al plano del movimiento. La fuerza normal sobre la muestra de suelo se aplica desde la parte superior de la caja de corte. La fuerza cortante es aplicada moviendo una mitad de la caja respecto a la otra para generar la falla en la muestra de suelo.

3.- DATOS EXPERIMENTALES:

3.1- Forma analítica: La figura (1) muestra la representación gráfica de la envolvente de cizallamiento, obtenida mediante tres puntos de rotura, cuyas coordenadas se obtienen utilizando el ensayo de corte. $P_1 (1 ; 1,2)$, $P_2 (2 ; 1,9)$, $P_3 (4 ; 3,3)$ en Kg.f/cm².

Al representar dichos puntos, se obtiene por tanto la envolvente de falla o ecuación de Mohr - Coulomb.

$$\tau_f = 0,5 + 0,7\sigma_{nm} \text{ Kg/cm}^2 \quad (2)$$

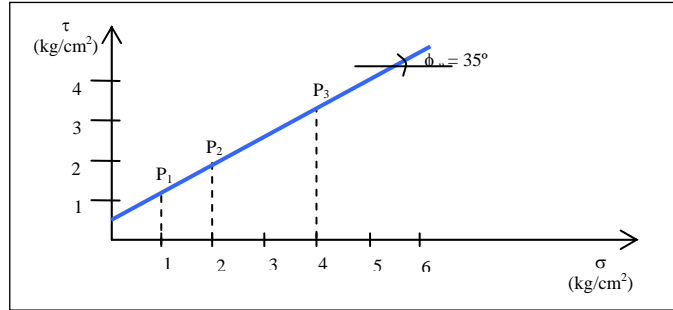


Figura 1. Representación gráfica de la envolvente de cizallamiento, obtenida mediante tres puntos de rotura en el laboratorio.

Igualmente se puede determinar la dirección y la magnitud de los esfuerzos principales (ver figura 2) como a continuación se describe:

$$\alpha_f = \left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right) = \left(45^\circ + \frac{35^\circ}{2}\right) = 62,5^\circ \quad (3)$$

Donde: α_f es ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor.

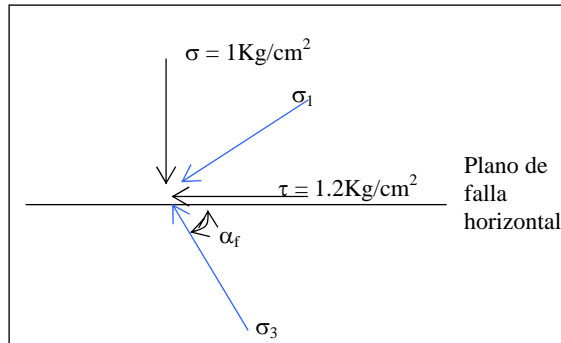


Figura 2. Representación gráfica de la magnitud y la dirección de los esfuerzos principales.

Utilizando los conceptos de la teoría de elasticidad se sabe que:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\alpha \\ \tau_f &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\text{sen}2\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

A través de dichas ecuaciones se despeja σ_1 y σ_3 , obteniéndose:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + \tau \tan \alpha = 1 \text{ Kg/cm}^2 + 1,2 \text{ Kg/cm}^2 \cdot \tan(62,5^\circ) = 3,30 \text{ Kg/cm}^2 \\ y \quad \sigma_3 &= \sigma_m - \tau \cot \alpha = 1 \text{ Kg/cm}^2 - 1,2 \text{ Kg/cm}^2 \cdot \cot(62,5^\circ) = 0,37 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Por cuanto, la relación entre los esfuerzos principales, al utilizar la ecuación de Mohr-Coulomb, viene expresada por:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \right) + 2C \left(\frac{\cos \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \right) \quad (6)$$

Fácilmente se puede hallar la presión sin confinar (q_u) al considerar $\sigma_3 = 0$, es decir:

$$\sigma_{1(falla)} = q_u = 2C \left(\frac{\cos \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \right) \quad (7)$$

Por lo tanto:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \right) + q_u \quad (8)$$

La magnitud de q_u obtenida es:

$$q_u = 2C \tan \alpha_f = 2 \cdot 0,5 \cdot \tan(62,5^\circ) = 1,92 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \quad (9)$$

Entonces la ecuación de la recta puede representarse como (ver figura 3):

$$\sigma_1 = m \sigma_3 + q_u \quad \text{donde} \quad m = \tan \beta = \tan^2(45^\circ + \phi / 2) = \tan^2 \alpha_f \quad (10)$$

$$\tan \beta = \tan^2(62,5) = 3,69 \Rightarrow \beta = 75^\circ$$

$$\sigma_1 = 3,69 \cdot \sigma_3 + 1,92$$

Otra manera de representar los esfuerzos se puede observar en la figura 4:

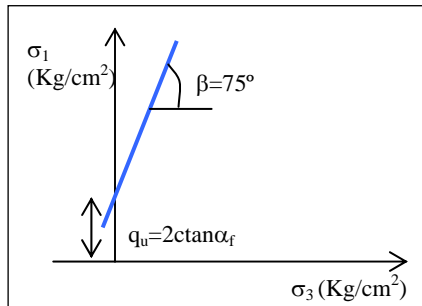


Figura 3. Representación gráfica de los esfuerzos

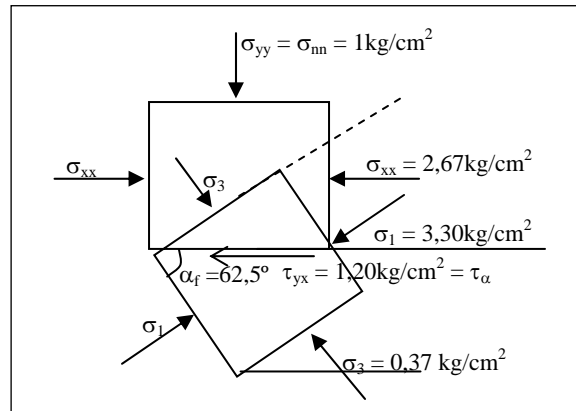


Figura 4. Representación de los diferentes esfuerzos.

Puesto que $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_3 = \text{constante}$ (Invariante de Esfuerzos). Siendo la presión lateral σ_{xx} en el momento de la falla:

$$\sigma_{xx} = (\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_{yy} = 2,67 \text{ Kg} / \text{cm}^2. \quad (11)$$

La ecuación entre los esfuerzos principales σ_1 , σ_3 puede obtenerse gráficamente como sigue, ver figura 5:

$$\text{sen } \phi = \frac{\overline{AD}}{FA} \quad (12)$$

Por lo tanto, despejando σ_1 ,

$$\sigma_1 = \sigma_3 \left(\frac{1 + \text{sen } \phi}{1 - \text{sen } \phi} \right) + 2c \left(\frac{\cos \phi}{1 - \text{sen } \phi} \right) \quad (13)$$

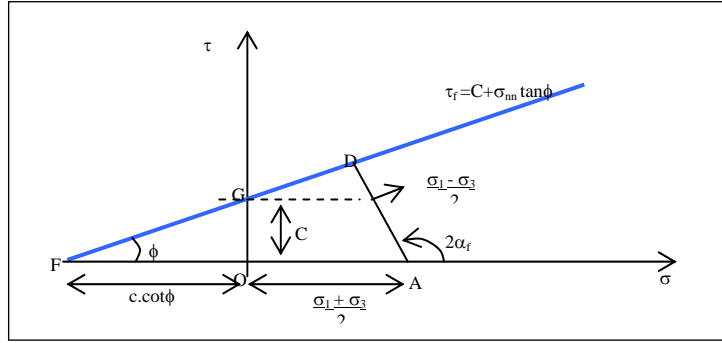


Figura 5: Relación trigonométrica del círculo de Mohr.

3.2- Resolución matricial: Otra manera de analizar, es matricialmente, representando en un sistema de coordenado xy y relacionarlo mediante los cosenos directores con el plano $x'y'$, determinando la matriz de rotación:

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(90 + \alpha) \\ \cos(90 - \alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

Aplicando la relación, entre los diferentes planos, es decir, el plano xy con respecto al plano $x'y'$:

$$\overline{\sigma}' = \overline{R} \cdot \overline{\sigma} \cdot \overline{R}^T \quad (15)$$

Donde:

$\overline{\sigma}'$ = Matriz de esfuerzo en el plano $x' y'$

$\overline{\sigma}$ = Matriz de esfuerzo en el plano $x y$

\overline{R} = Matriz de rotación

\overline{R}^T = Matriz transpuesta de rotación.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es estas condiciones, $\sigma_{x'x'} = \sigma_3$; $\sigma_{y'y'} = \sigma_1$, y $\sigma_{yy} = \sigma_{nn}$, $\tau_{xy} = \tau_{nt}$. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (17)$$

Determina el esfuerzo σ_{xx} que es la presión lateral en el momento de la falla:

$$0 = [\cos \alpha \quad -\operatorname{sen} \alpha] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{xx} = 2,68 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \quad (18)$$

Determinando el esfuerzo σ_3 :

$$\sigma_3 = [\cos \alpha \quad -\operatorname{sen} \alpha] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_3 = 0,37 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \quad (20)$$

Determinando el esfuerzo σ_1 :

$$\sigma_1 = [\cos \alpha \quad \operatorname{sen} \alpha] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = 3,30 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \quad (22)$$

CONCLUSIONES.

A través de la metodología de rotación de ejes llevada a cabo en el presente trabajo, se obtiene la magnitud y la dirección de los esfuerzos principales aproximada, utilizando como base los resultados obtenidos por el ensayo de corte. Por otra parte, al comparar el método de rotación de ejes con el método analítico de Mohr _ Coulomb se observó que prácticamente se obtienen los mismos resultados con un error despreciable.

La técnica de rotación de ejes es un método fácil de manejar y nos da una herramienta práctica en problemas sencillos siendo fácilmente aplicable en soluciones de la geomecánica.

Agradecimientos

El presente artículo es una aplicación de los resultados obtenidos en guías de ensayos del profesor Ucar Roberto, Isidro Castellet del laboratorio de Mecánica de Suelos, ULA, Mérida.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Apostol, Tom. Matemática básica para ingenieros. Editorial reveseté S.A. Volumen I, Barcelona. 575 pp, 1965.
- [2] Edelbro, Catrin. Evaluation of rock mass strength criteria. Licentiate thesis, Lulea University of technology. Departament of civil an environmental engineering. 91pp, 2004.
- [3] Ucar, Roberto. Determination of shear failure envelope in rock masses. Journal of Geotechnical Engineering L4SCE) 112, pp. 303- 315, 1986.
- [4] Goncalves, R. Introducción al análisis de esfuerzo, Universidad Simón Bolívar Caracas Venezuela. Industria Gráfica Integral C.A. p. 1-93, 1999.
- [5] Ucar, Roberto. Manual de Anclajes en Ingeniería Civil. Universidad Politécnica de Madrid, España. p. 53 – 275, 2004.
- [6] Tejerizo, M. Ampliación de Matemáticas para Técnicos. Editorial S.A.E.T.A. Madrid. pp 770, 1965.